



ANALYSE TEMPORELLE DES SLCI

Cours 3

Professeur: Y.FARTOUH

v1.1

CPGE - MARRAKECH

1 Système du premier ordre

1.1 Forme de la fonction de transfert

Le système est régi par l'équation différentielle : $\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$ avec les conditions initiales nulles.

Dans le domaine de Laplace, on obtient donc $(\tau p + 1)S(p) = KE(p)$

$$\text{D'où } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$



Définition Forme canonique de la fonction de transfert d'un premier ordre

La fonction de transfert d'un système du premier ordre est sous forme canonique :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

avec τ la constante de temps et K le gain (amplification) statique.

1.2 Réponse indicielle (à un échelon $e_0 u(t)$)

on soumet le système à une entrée échelon de taille e_0 (amplitude) : $e(t) = e_0 u(t)$ donc $E(p) = \frac{e_0}{p}$.
or $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p} \Rightarrow S(p) = \frac{Ke_0}{p(1 + \tau p)}$

Démonstration :

*Le problème est que l'on ne sait pas prendre la transformée de Laplace inverse d'une **fonction quelconque**. Il va donc falloir décomposer la solution trouvée en somme de termes dont on connaît les transformées inverses. Cela revient à effectuer la **décomposition en éléments simples** de ce rapport polynomial.*

Décomposition en éléments simples

Tout rapport polynomial peut s'écrire comme somme de rapport du type : $\frac{a}{p - p_i}$
avec $\begin{cases} a : \text{Un coefficient à déterminer} \\ p_i : \text{Les zéros du polynôme au dénominateur} \end{cases}$

La décomposition en éléments simples revient à chercher dans notre cas particulier à mettre $S(p)$ sous la forme : $S(p) = \frac{Ke_0}{p(1 + \tau p)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{1 + \tau p}$ avec **a** et **b** deux coefficients à déterminer.

Identification polynomiale

$$S(p) = \frac{Ke_0}{p(1+\tau p)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{1+\tau p} = \frac{a(1+\tau p) + bp}{p(1+\tau p)} = \frac{a + p(b + a\tau)}{p(1+\tau p)}$$

On en déduit donc en identifiant les numérateurs que : $\begin{cases} a = Ke_0 \\ b + a\tau = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = Ke_0 \\ b = -Ke_0\tau \end{cases}$

On aboutit à la décomposition de $S(p)$ en éléments simples sous la forme :

$$S(p) = \frac{Ke_0}{p} - \frac{Ke_0\tau}{1+\tau p} = Ke_0 \left[\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau p} \right] = Ke_0 \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right]$$

En prenant les transformées inverses de Laplace, on obtient :

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = L^{-1} \left[Ke_0 \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right] \right] = Ke_0 \left[L^{-1} \left(\frac{1}{p} \right) - L^{-1} \left(\frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right) \right]$$

Soit la solution dans le domaine temporel :

$$s(t) = Ke_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u(t)$$

**Définition Réponse indicielle**

La réponse temporelle à une entrée en échelon (réponse indicielle) d'un système du 1^{er} ordre est donc :

$$s(t) = Ke_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u(t)$$

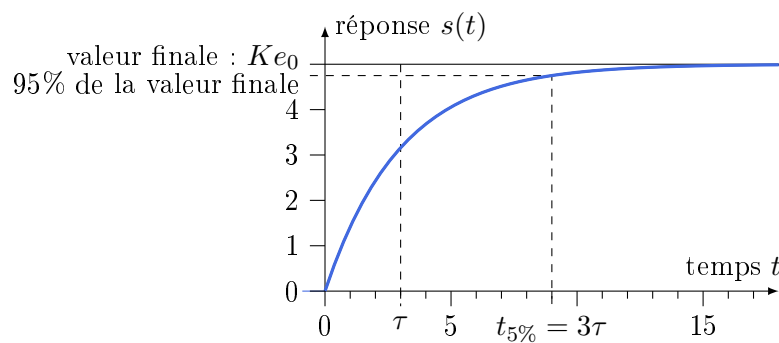
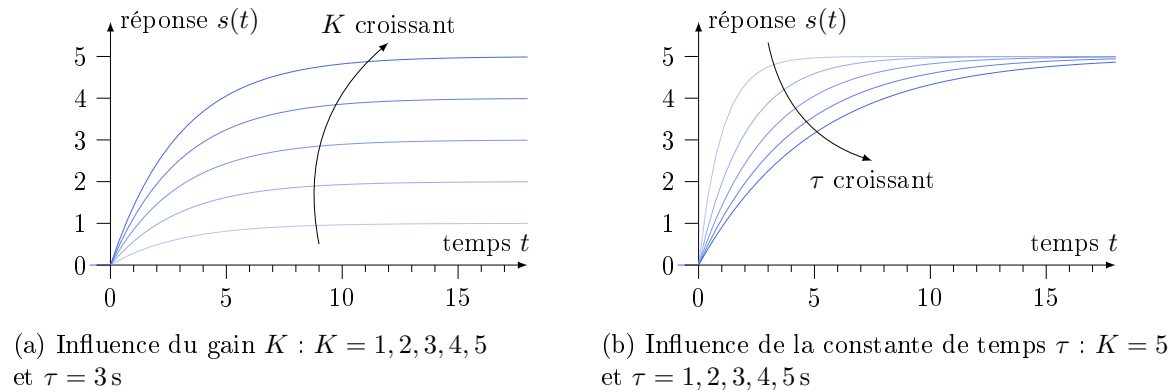


FIGURE 1 – Réponse temporelle d'un système du premier ordre.

**Propriété Tracé et propriétés remarquables (FIGURE 1 et FIGURE 2)**

- La valeur finale (valeur asymptotique) est $s_{\infty} = Ke_0$
- Pour $t = \tau$, la réponse atteint **63%** de sa valeur finale car $s(\tau) = Ke_0 (1 - e^{-1}) = 0,63s_{\infty}$

- Pour $t = 3\tau$, $s(3\tau) \approx 0,95s_\infty$, on a donc $t_{5\%} = 3\tau$.
- La réponse indicielle ne présente pas d'oscillations. En effet, $s'(t) = \frac{Ke_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t) > 0$, $\forall t$ donc $s(t)$ est strictement croissante.
- La **pente de la tangente à l'origine est non nulle** et vaut $s'(0) = \frac{Ke_0}{\tau}$
- Plus τ est élevée, plus le système est **lent** (voir FIGURE 2).

FIGURE 2 – Influence des paramètres du modèle du 1^{er} ordre sur la réponse indicielle

1.3 Identification de modèle

L'identification de modèle consiste à proposer un modèle théorique à partir de la réponse d'un système à une entrée type, mesurée expérimentalement. Le modèle obtenu est appelé **modèle de comportement** puisqu'il traduit le comportement observé en sortie, sans se préoccuper du fonctionnement interne.



Propriété Identification des paramètres caractéristiques

Les paramètres caractéristiques K et τ sont identifiés sur la courbe mesurée :

- K : par l'intermédiaire de la valeur finale qui vaut Ke_0 , sachant que e_0 est connu.
- τ : trois méthodes sont disponibles suivant la qualité de la courbe :
 - ◇ le temps où la courbe atteint 63 % de la valeur finale vaut τ ;
 - ◇ le temps où la courbe atteint 95 % de la valeur finale vaut 3τ ;
 - ◇ la tangente à l'origine coupe l'asymptote Ke_0 en $t = \tau$. Cette méthode n'est en général pas conseillée car peu précise.

2 Les systèmes du deuxième ordre

Le modèle du second ordre est couramment rencontré . Il est aussi utilisé pour améliorer les modèles du premier ordre (prise en compte de frottements visqueux par exemple...)

2.1 Forme de la fonction de transfert

Le système est régi par l'équation différentielle $\ddot{s}(t) + 2\xi\omega_0\dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$ avec les conditions initiales nulles.

Dans le domaine de Laplace, on obtient donc $(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)S(p) = K\omega_0^2 E(p)$

$$\text{D'où } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}.$$



Définition *Forme canonique de la fonction de transfert d'un second ordre*

La fonction de transfert d'un système du second ordre est sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

avec ω_0 la pulsation propre du système non amorti, ξ le coefficient (facteur) d'amortissement et K le gain (amplification) statique.

2.2 Réponse indicielle (à un échelon $e_0 u(t)$)

on soumet le système à une entrée échelon de taille e_0 (amplitude) : $e(t) = e_0 u(t)$, donc $E(p) = \frac{e_0}{p}$

Or

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Donc :

$$S(p) = \frac{K e_0}{(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2})p}$$

La recherche de la solution conduit à déterminer les racines d'une équations du second degré de déterminant : $\Delta = \frac{4}{\omega_0^2} (\xi^2 - 1)$ Avec : $(\xi \geq 0)$.

Conduisant à des réponses différentes (Trois cas) suivant la valeur du facteur d'amortissement ξ :

- amortissement faible $\xi < 1$: deux pôles complexes conjugués ;
- amortissement critique $\xi = 1$: un pôle réel double ;
- amortissement fort $\xi > 1$: deux pôles réels distincts.

Comme précédemment, on fait l'hypothèse que les conditions initiales sont nulles : $s(0^+) = 0$ et $\dot{s}(0^+) = 0$. Ainsi, dans tous les cas :

- La pente à l'origine (tangente à l'origine) est nulle (c'est une caractéristique de la réponse indicielle d'un système d'ordre supérieur à 1).
- La valeur asymptotique est égale à $s_\infty = K e_0$ (comme pour un premier ordre)

**Remarque**

Le calcul de $S(t)$ n'est pas demandé dans les concours, mais on s'intéresse juste à l'allure des courbes pour les tracer (cas de ξ).

Les équations temporelles $s(t)$ sont données pour information.

Cas $\xi > 1$: régime aperiodique

La réponse temporelle est : $s(t)$

$$s(t) = Ke_0 \left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2} \right) \right] u(t)$$

La fonction de transfert $H(p)$ peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)}$$

**Remarque**

Dans ce cas-là, trois paramètres à identifier sont : le gain statique **K** , les deux constantes de temps **τ_1** et **τ_2** au lieu de **ξ** et **ω_0**

**Propriété** *Tracé et propriétés remarquables (FIGURE 3a)*

- la sortie tend vers la valeur finale Ke_0 ;
- la pente de la tangente à l'origine est **nulle** (par hypothèse $\dot{s}(0) = 0$) ;
- il n'y a **pas de dépassement**, le système est amorti. On parle de régime aperiodique (en effet $\dot{s}(t) > 0$) ;
- si $|\tau_2| \gg |\tau_1|$, on peut alors assimiler la courbe du système à celle d'un premier ordre de constante de temps $\tau = \tau_2$ (avec un retard égal à τ_1) (**pôle dominant**)
- plus ξ est **proche de 1**, plus le système est **rapide**.

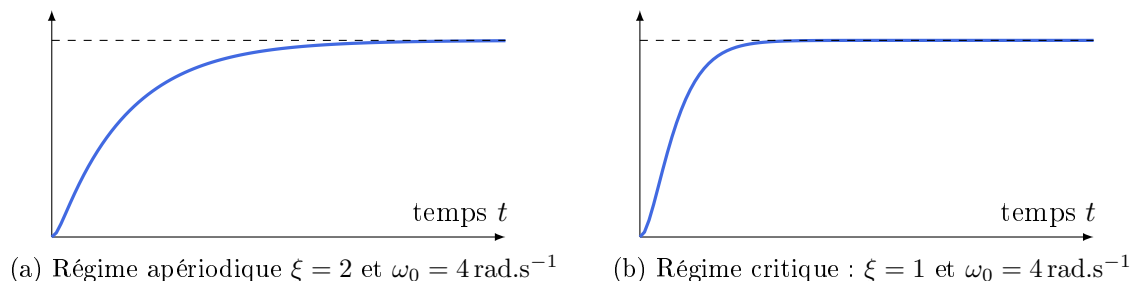


FIGURE 3 – Réponse indicielle d'un système du deuxième ordre de fort amortissement et d'amortissement au régime critique ($\xi = 1$)

Cas $\xi = 1$: régime critique

Le polynôme caractéristique possède une racine réelle double : $r_1 = -\omega_0$.

La réponse temporelle est $s(t) : s(t) = Ke_0 [1 - (\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}] u(t)$. La fonction de transfert $H(p)$ peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p)^2}$$

**Propriété** *Tracé et propriétés remarquables (FIGURE 3b)*

Les propriétés sont identiques à celles du régime apériodique, le régime critique étant le cas limite quand $\xi \rightarrow 1$.

Cas $\xi < 1$: régime pseudo-périodique

La solution complète peut s'écrire sous la forme :

$$s(t) = Ke_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi \right) \right] u(t)$$

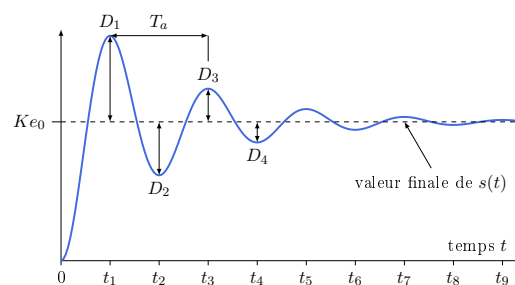
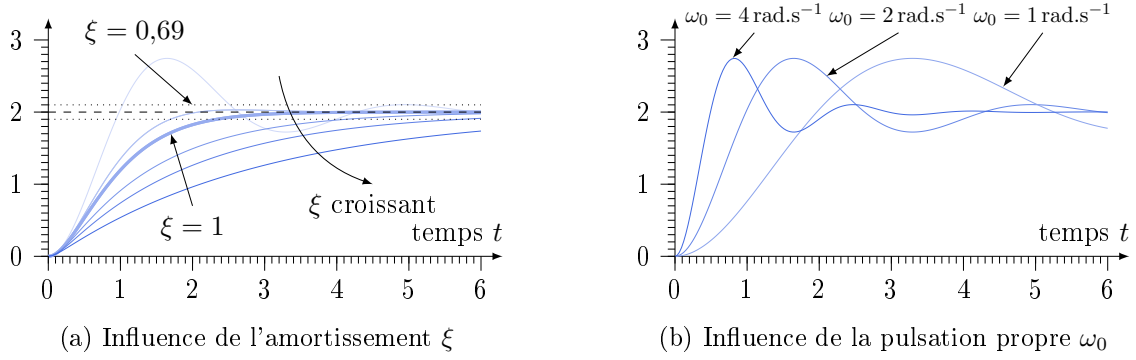
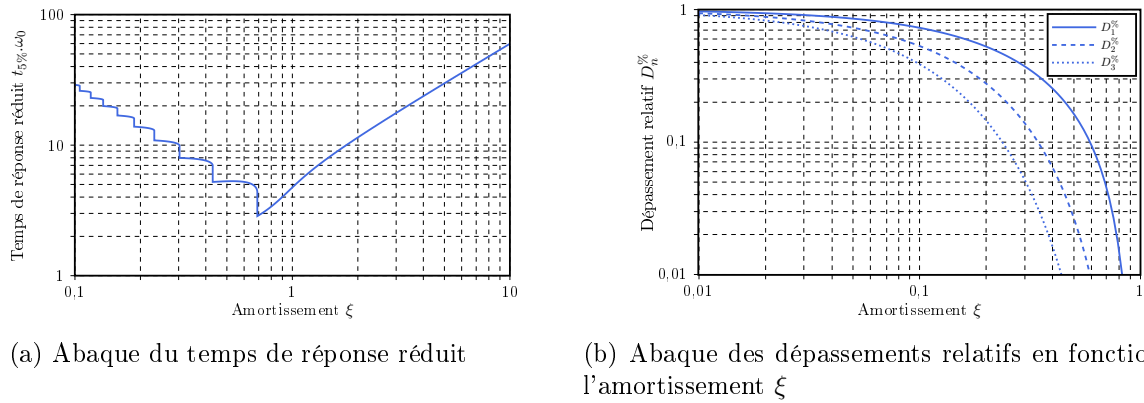


FIGURE 4 – Réponse indicielle pour un système du deuxième ordre de faible amortissement.

**Propriété** *Tracé et propriétés remarquables (FIGURE 4)*

- la réponse est **oscillante** (présence des termes en cos et sin, le système est sous amorti. On parle de régime pseudo-périodique. On note :
 - $\omega_a = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$ la pseudo-pulsation,
 - $T_a = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - \xi^2}}$ la pseudo-période
- les dépassements (voir FIGURE 4) sont caractérisés par :
 - le temps du k^e dépassement : $t_k = \frac{k\pi}{\omega \sqrt{1 - \xi^2}}$
 - le k^e dépassement relatif $D_k\% = \left| \frac{s(t_k) - s(\infty)}{s(\infty)} \right| = e^{\frac{-k\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$. À l'aide de cette formule, on peut construire l'abaque de la FIGURE 8. On constate que les dépassements ne dépendent que de ξ .
- il n'y a pas de formule générale pour le temps de réponse à 5 %, il faut le déterminer numériquement. Un abaque adimensionné est donné sur la FIGURE 6a.
- le système le plus rapide est obtenu pour un amortissement $\xi = 0,69$.** Pour cette valeur, le premier dépassement en pourcentage vaut $D_1\% \approx 0,05$.

La FIGURE 5 montre l'influence de l'amortissement et de la pulsation propre en fixant les autres paramètres.

FIGURE 5 – Influence des paramètres caractéristiques (ω_0 et ξ) sur la réponse indicielle ($e_0 = 1$)FIGURE 6 – Abaques du temps de réponse réduit (en ordonnée $T_{reduit} = t_{5\%}\omega_0$) et des dépassements relatifs.

2.3 Identification de modèle

Si la réponse mesurée expérimentalement présente une **tangente à l'origine nulle** et des **dépassements**, le comportement du système doit modéliser par une fonction de transfert du 2^e ordre.



Propriété Identification des paramètres caractéristiques

Les paramètres caractéristiques K , ξ et ω_0 sont identifiés sur la courbe mesurée :

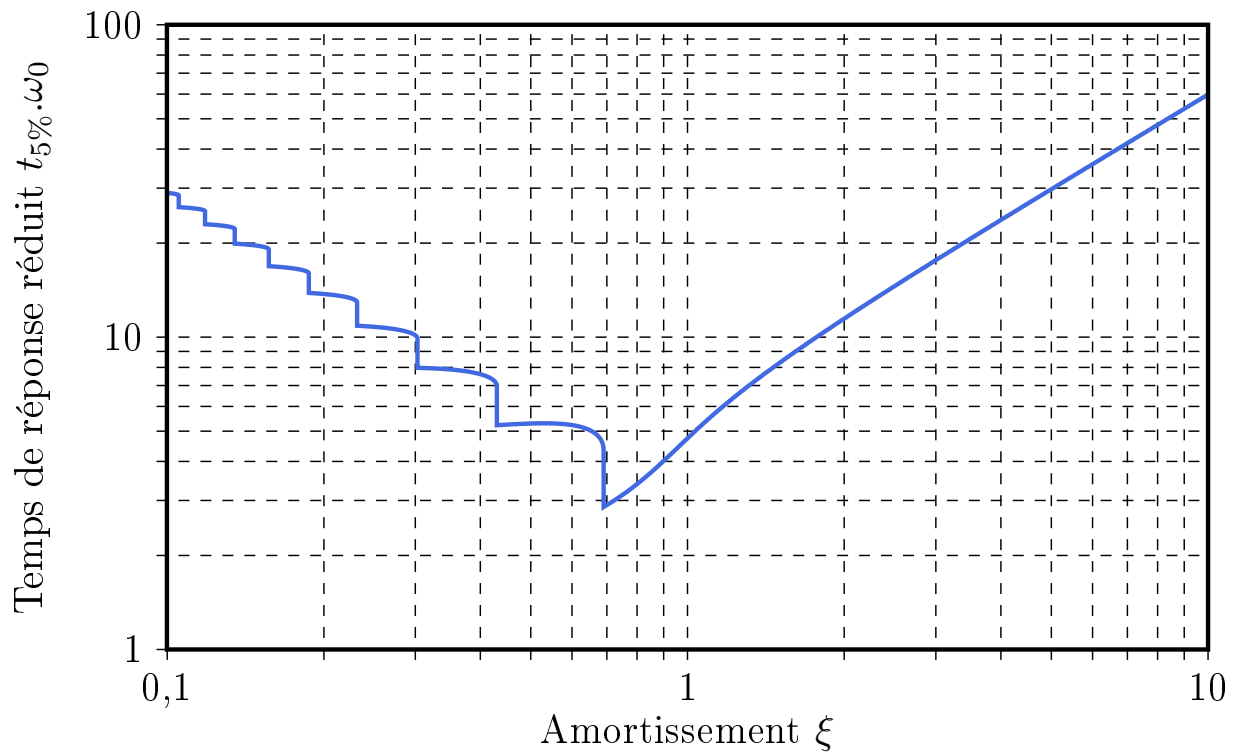
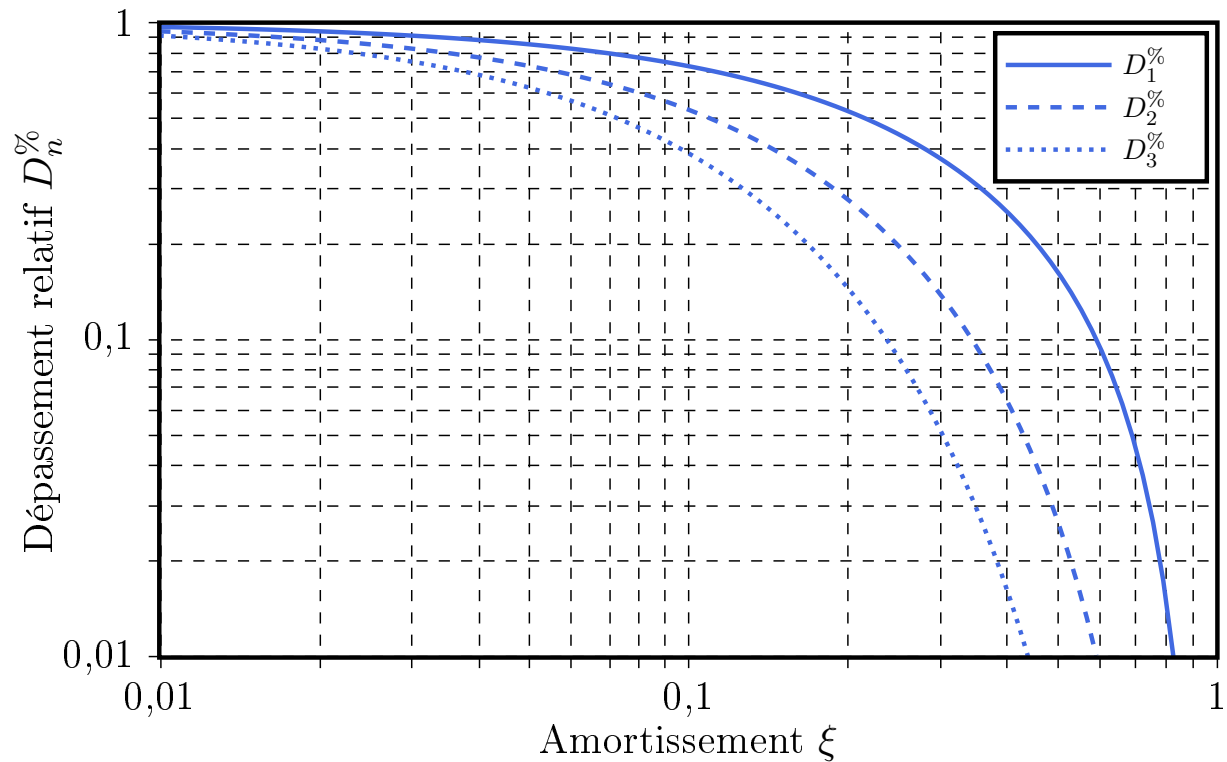
- K : par l'intermédiaire de la valeur finale qui vaut Ke_0 , sachant que e_0 est connu.
- ξ par les **dépassements en pourcentage**, grâce à l'abaque des dépassements FIGURE 8 ou

$$\text{la relation } \xi = \left(1 + \frac{k^2 \pi^2}{\ln^2 D_k^{\%}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

- ω_0 de plusieurs manières possibles :

- ◇ par le temps de réponse à 5 % en utilisant l'abaque FIGURE 6a ;
- ◇ par l'instant du premier dépassement, en utilisant l'expression $\omega_0 = \frac{\pi}{t_1 \sqrt{1 - \xi^2}}$ (avec $k = 1$)
- ◇ par mesure de la pseudo-période et utilisation de l'expression $T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$

Annexe

FIGURE 7 – Abaque du temps de réponse réduit (en ordonnée $T_{reduit} = t_{5\%}\omega_0$)FIGURE 8 – Abaque des dépassements relatifs en fonction de l'amortissement ξ

3 Bilan



À retenir *SAVOIR*

Je connais :

- les principaux signaux de test dans le domaine temporel des SLCI ;
- les grandeurs caractéristiques des SLCI du premier et second ordre ;
- l'influence de ces grandeurs sur les différentes réponses temporelles ;
- l'allure des réponses des SLCI fondamentaux aux différents signaux de test.



À retenir *SAVOIR FAIRE*

Je sais :

- identifier les grandeurs caractéristiques des SLCI à partir de leur fonction de transfert ;
- tracer la réponse d'un SLCI du premier ordre aux différents signaux de test en précisant les valeurs caractéristiques (valeur finale, asymptote ...) ;
- tracer la réponse d'un SLCI du second ordre en précisant les valeurs caractéristiques (valeur finale, asymptote, amplitude des dépassements, pseudo-pulsation ...) ;
- identifier les grandeurs caractéristiques d'un SLCI du premier ordre à partir de sa réponse indicielle ;
- identifier les grandeurs caractéristiques d'un SLCI du second ordre à partir de sa réponse indicielle.