



ANALYSE HARMONIQUE DES SLCI

Cours 4

Professeur: Y.FARTOUH

v1.4 (P)

CPGE - MARRAKECH

1 Analyse harmonique

1.1 Définition



Définition Analyse harmonique

C'est l'analyse de la réponse d'un système soumis à une entrée sinusoïdale $e(t) = E_0 \sin(\omega t)u(t)$ en **régime permanent** dit aussi **établi**.

La réponse d'un **SLCI stable** est schématisée sur la FIGURE 1 et représentée sur la FIGURE 2.



FIGURE 1 – Comportement d'un SLCI stable en **régime permanent**

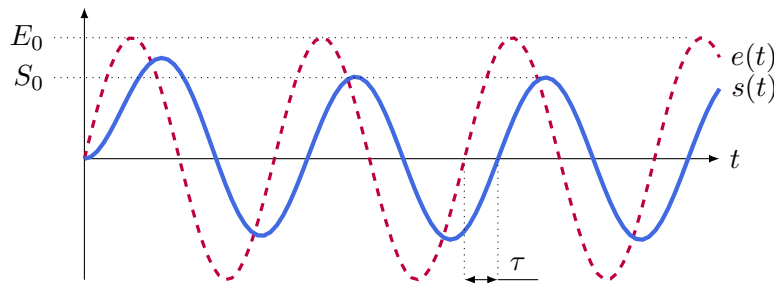


FIGURE 2 – Évolution temporelle de la réponse harmonique d'un SLCI stable

De façon générale On note :

- E_0 et S_0 : les **amplitudes du signal** d'entrée et de sortie ;
- ω la **pulsation** d'excitation [rad/s] ;
- φ le **déphasage** [rad] de la réponse par rapport à l'entrée avec $\varphi = -\omega\tau$ où τ est le retard entre les deux courbes.

On constate expérimentalement que l'amplitude S_0 et le déphasage φ varient en fonction de ω (voir exemple FIGURE 3).

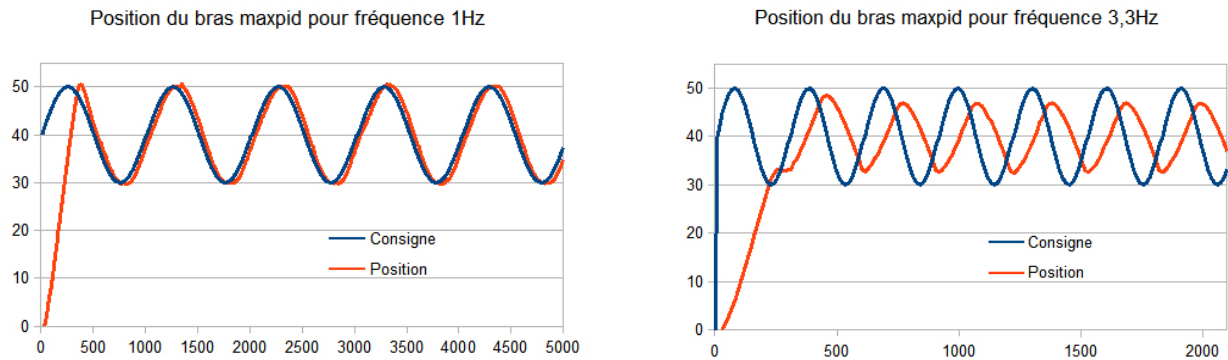


FIGURE 3 – Réponse expérimentale du robot Maxpid soumis à une consigne sinusoïdale

**Définition** *Analyse harmonique (ou fréquentielle)*

L'analyse harmonique ou fréquentielle consiste en l'étude de l'évolution du rapport des amplitudes $\frac{S_0}{E_0}$ et du déphasage φ en fonction de la pulsation ω du signal **en régime permanent** (ou établi). Les réponses pour différentes valeurs de la pulsation ω sont dites **réponses fréquentielles** ou **réponses harmoniques**.

1.2 Fonction de transfert harmonique

En se plaçant dans le domaine des complexes, on pose $\underline{e} = E_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{s} = S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ où j représente la variable complexe. Dans ce cas, $e(t)$ et $s(t)$ représentent les parties imaginaires des signaux complexes $\underline{e}$ et $\underline{s}$. En introduisant ces variables dans l'équation différentielle générale d'un système, on obtient :

$$\left[a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0 \right] \underline{s} = \left[b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0 \right] \underline{e}$$

**Définition** *Fonction de transfert harmonique*

La fonction de transfert harmonique appelée aussi **fonction de transfert complexe** ou **transmittance isochrone** est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{b_0 + b_1 j\omega + \dots + b_m (j\omega)^m}{a_0 + a_1 j\omega + \dots + a_n (j\omega)^n} = \frac{S_0}{E_0} e^{j\varphi}$$

**Remarque**

La fonction de transfert dans le domaine de Laplace est :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}$$

On remarque que la fonction de transfert harmonique est la valeur prise par la fonction de transfert dans le cas particulier où la variable symbolique de Laplace p est un imaginaire pur : $p = j\omega$.

**Définition** *Amplification du système*

Le rapport des amplitudes est le module de la fonction de transfert harmonique :

$$\frac{S_0}{E_0} = |\underline{H}(j\omega)|$$

**Définition** *Phase du système*

Le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée est l'argument de la fonction de transfert harmonique :

$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega))$$

**Définition** *Analyse harmonique*

L'analyse harmonique consiste à **étudier l'amplitude et la phase** de la fonction de transfert harmonique, **en fonction de la pulsation** ω du signal.

**Rappel**

$$\underline{z} = a + jb = |\underline{z}| e^{j\theta} = |\underline{z}| (\cos \theta + j \sin \theta) \quad \text{avec} \quad |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$|\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2| = |\underline{z}_1| |\underline{z}_2| \quad \text{et} \quad \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2)$$

1.3 Lieux de transfert

Les lieux de transfert sont des représentations graphiques de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$. Seul le lieu de transfert de Bode est au programme, mais il en existe d'autres (Nyquist, Black-Nichols).

1.3.1 Lieu de transfert de Bode

Les systèmes étudiés s'étendent généralement sur de larges plages de fréquences (exemple, les cordes d'un piano oscillent à des fréquences comprises entre 27,5 et 4186 Hz). Une échelle linéaire pour l'axe des abscisses (correspondant à l'axe des pulsations ω) serait donc mal adaptée. On lui préfère une échelle logarithmique pour représenter l'évolution de la pulsation du signal. Elle correspond au tracé de $\log \omega$ sur un axe.



FIGURE 4 – Échelle linéaire (à gauche) et logarithmique (à droite)

**Définition** *Diagramme de Bode*

Le diagramme de Bode est constitué de **deux diagrammes** semi-logarithmiques (axes des abscisses gradués en $\log \omega$, et axes des ordonnées en échelle linéaire) :

- le **diagramme de gain**, exprimé en décibel [dB] : $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|$;
- le **diagramme de phase**, exprimé en degrés ou radians : $\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega))$.

L'exploitation complète de ces diagrammes nécessite une vision simultanée des deux courbes, elles figurent donc sur un même graphique avec l'axe des abscisses en commun (FIGURE 5).

**Remarque**

- une décade correspond à une multiplication par 10 en pulsation ;
- par définition, le logarithme décimal du rapport des puissances de sortie P_s et d'entrée P_e de deux signaux s'exprime en décibel $10 \log_{10} \frac{P_s}{P_e}$. Toutefois, en **automatique** ou en **électronique**, il est plus facile d'obtenir l'amplitude d'un signal que sa puissance. Or, par analogie électrique, $P = \frac{U^2}{R}$ soit $10 \log_{10} \frac{P_s}{P_e} = 20 \log_{10} \frac{U_s}{U_e}$ d'où le facteur 20 utilisé pour déterminer le gain en dB.

1.3.2 Tracés asymptotiques du diagramme de Bode

Ces tracés approchés (asymptotiques) sont obtenus en remplaçant les courbes des diagrammes de Bode par leurs **approximations asymptotiques**. Ces diagrammes permettent d'apprécier globalement le comportement du système modélisé à 10 % ou 20 % près. Les calculs des asymptotes et des valeurs particulières se font en général pour les **valeurs particulières** et **extrêmes** de la pulsation ω par rapport à la pulsation de coupure ω_0 du système : $\omega \ll \omega_0$, $\omega = \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$.

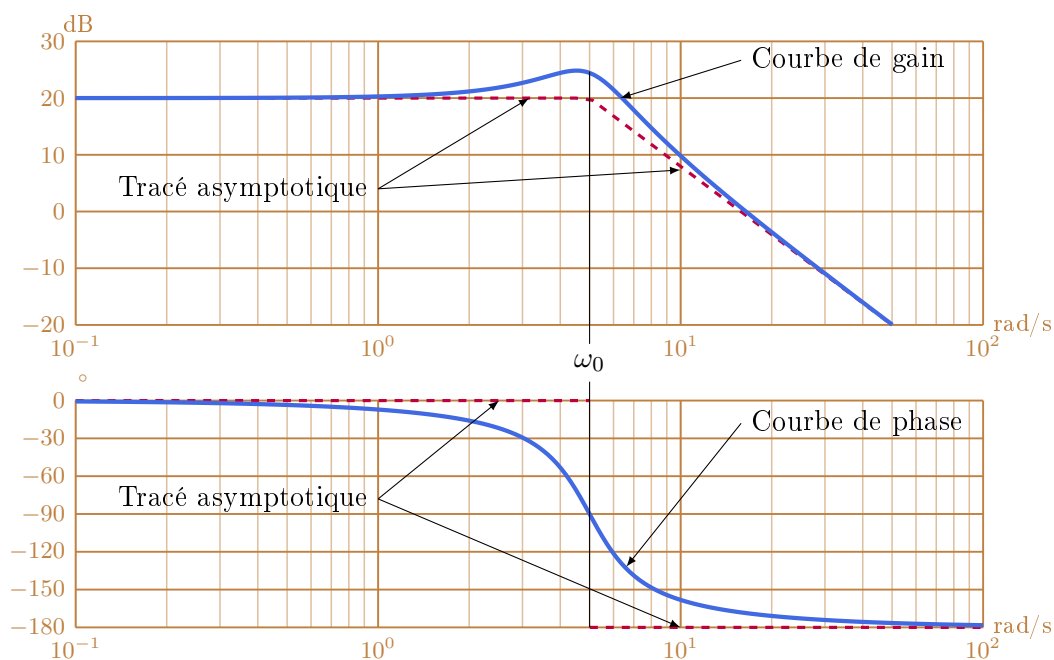


FIGURE 5 – Tracés réel et asymptotique d'un diagramme de Bode

1.3.3 Propriétés des diagrammes de Bode

- Si $\underline{H}(j\omega) = \underline{F}(j\omega) \times \underline{G}(j\omega)$ alors :
 - ◇ $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| = 20 \log |\underline{F}(j\omega)| + 20 \log |\underline{G}(j\omega)|$, les **courbes de gain s'additionnent** ;
 - ◇ $\varphi = \arg [\underline{H}(j\omega)] = \arg [\underline{F}(j\omega)] + \arg [\underline{G}(j\omega)]$, les **courbes de phases s'additionnent**.
- Si $\underline{H}(j\omega) = K \times \underline{F}(j\omega)$, avec K une constante ($K > 0$), alors :
 - ◇ $G_{dB} = 20 \log K + 20 \log |\underline{F}(j\omega)|$, la courbe de gain de $\underline{F}(j\omega)$ est translatée de $20 \log K$;
 - ◇ $\varphi = \arg(K) + \arg(\underline{F}(j\omega)) = \arg(\underline{F}(j\omega))$, la phase est la même que celle de $\underline{F}(j\omega)$.

On utilise constamment ces propriétés car, dans la majorité des cas, la fonction de transfert étudiée est un produit de fonctions de transfert usuelles (du premier et deuxième ordre ...). Ces deux systèmes seront donc étudiés en détails dans la suite de ce cours.

1.3.4 Utilisation des diagrammes de Bode

Bande Passante : On définit la bande passante comme la bande de fréquences à l'intérieur de laquelle l'atténuation du signal reste limitée à une valeur définie. Elle caractérise ainsi la « qualité » du système :

- en électronique : bande passante = intervalle de fréquence pour lequel le gain est supérieur au gain statique -3 dB ;
- en automatique : la bande passante à -3 dB caractérise la rapidité du système en boucle fermée. Pour obtenir une bonne approximation de la rapidité, on peut aussi utiliser la bande passante à 0 dB (sur la FTBO), c'est-à-dire l'intervalle de fréquence pour lequel $|\underline{H}(j\omega)| \geq 1$ ou $G_{dB} \geq 0$.

Marge de phase et marge de gain : L'étude de la FTBO d'un système dans le plan de Bode permet de renseigner sur la stabilité du système.

On définit alors, la marge de phase : $M_\varphi = 180^\circ + \varphi(\omega_{0dB})$ où ω_{0dB} est la pulsation pour laquelle $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0$, et la marge de gain $MG = -20 \log |\underline{H}(j\omega_{-180})|$ où ω_{-180} est la pulsation pour laquelle $\varphi(\omega_{-180}) = -180$.

Si $M_\varphi > 0$ et $MG > 0$, alors le système est stable. D'autres propriétés peuvent ainsi être définies pour étudier les performances du système.

2 Réponses fréquentielles des fonctions de transfert usuelles

2.1 Gain pur

Réponse harmonique : pour $K > 0$ de la fonction de transfert : $H(j\omega) = K$. Ainsi le gain est constant et vaut $20 \log(K)$ et la phase vaut 0° .

Le diagramme de Bode est donné sur la FIGURE 6a.

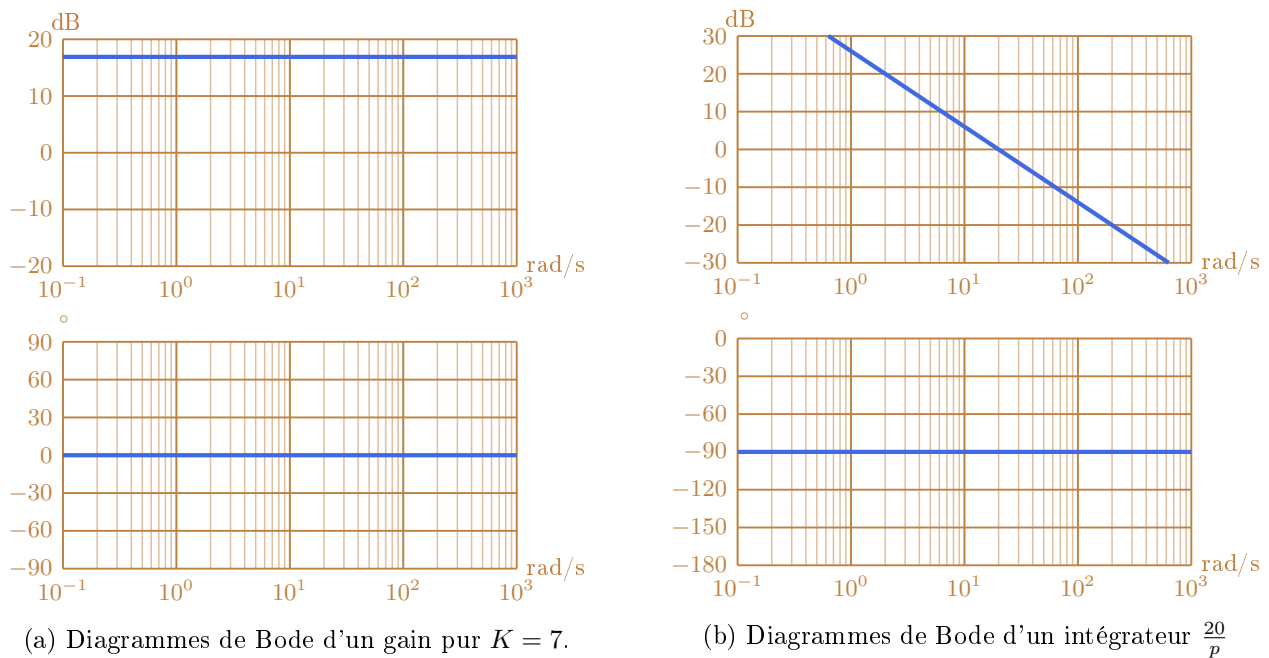


FIGURE 6 – Tracés des diagrammes de Bode d'un système proportionnel et intégrateur

2.2 Intégrateur

2.2.1 Fonction de transfert harmonique

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert d'un intégrateur est $H(p) = \frac{K}{p}$. Il suffit donc de remplacer la variable complexe p par $j\omega$, ce qui donne $\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$.

2.2.2 Diagramme de Bode d'un intégrateur

Le diagramme de gain correspond au tracé de la fonction : $G_{dB}(j\omega) = 20 \log \left(\frac{K}{\omega} \right)$ soit $G_{dB}(j\omega) = 20 \log K - 20 \log \omega$.



Propriété

L'évolution du gain dans le plan de Bode est une droite de pente -20 dB/décade qui passe par :

- $20 \log K$ en $\omega = 1$
- 0 dB en $\omega = K$

En effet, on obtient bien une droite car la variable étant $\log \omega$ dans le diagramme semi-logarithmique, l'équation est du type $y = ax + b$. Pour déterminer la valeur de a (pente), on cherche l'affaiblissement pour deux valeurs de pulsations.

- pour $\omega = K$, $G_{dB} = 0$ (on coupe l'axe des abscisses) ;
- pour $\omega = 10K$, $G_{dB} = -20 \text{ dB}$, on a bien un affaiblissement de -20 dB pour une décade.

**Remarque**

Une pente de -20 dB/décade est souvent notée (-1) sur le lieu de Bode.

Comme $\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = -\frac{K}{\omega}j$, le nombre est **imaginaire pur négatif**. Ainsi la phase vaut toujours : -90° **quelle que soit la fréquence**.

Les diagrammes de Bode sont donnés sur la FIGURE 6b.

2.3 Réponse fréquentielle d'un système du premier ordre**2.3.1 Fonction de transfert harmonique**

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert d'un système du premier ordre est $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$. Il suffit donc de remplacer la variable complexe p par $j\omega$.

**Définition**

La **fonction de transfert harmonique** d'un système du premier ordre est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega} = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec : K le **gain statique**, τ la **constante de temps**.

et $\omega_0 = 1/\tau$ la **pulsation de coupure** ou de brisure exprimée en $[\text{rad.s}^{-1}]$.

Il est alors possible de déterminer :

$$\text{le module : } |\underline{H}(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad \text{la phase : } \varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

2.3.2 Diagramme de Bode - Recherche des asymptotes

On recherche des valeurs particulières de ω qui permettent de *simplifier* la fonction de transfert (pour qu'elle devienne réelle ou imaginaire pure). De part la forme de $\underline{H}(j\omega)$, il suffit de comparer le rapport $\frac{\omega}{\omega_0}$ à la valeur 1 soit donc ω à ω_0 :

$$\text{si } \omega \ll \omega_0 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) \approx K \quad \left| \quad \text{si } \omega = \omega_0 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + j} \quad \left| \quad \text{si } \omega \gg \omega_0 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) \approx \frac{K}{j\frac{\omega}{\omega_0}} \right.$$

Diagramme asymptotique de gain en dB

En analysant les trois cas de simplification précédents, il vient :

$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) \approx K$ $G_{dB} = 20 \log K$ Droite horizontale	$\omega = \omega_0 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{2}}$ $G_{dB} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{2}$ $\Leftrightarrow G_{dB} = 20 \log K - 3$ Courbe réelle à -3 dB de l'asymptote	$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) \approx \frac{K\omega_0}{\omega}$ $G_{dB} = 20 \log K\omega_0 - 20 \log \omega$ Droite de pente -20 dB/décade
---	---	--

Diagramme asymptotique de la phase

De la même façon, en calculant l'argument de $\underline{H}(j\omega)$ pour les trois cas de simplification précédents, il vient :

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \varphi \approx 0 \quad \left| \quad \omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = \frac{-\pi}{4} \quad \left| \quad \omega \gg \omega_0 \Rightarrow \varphi \approx \frac{-\pi}{2}$$

2.3.3 Tracés des diagrammes de Bode réel et asymptotique

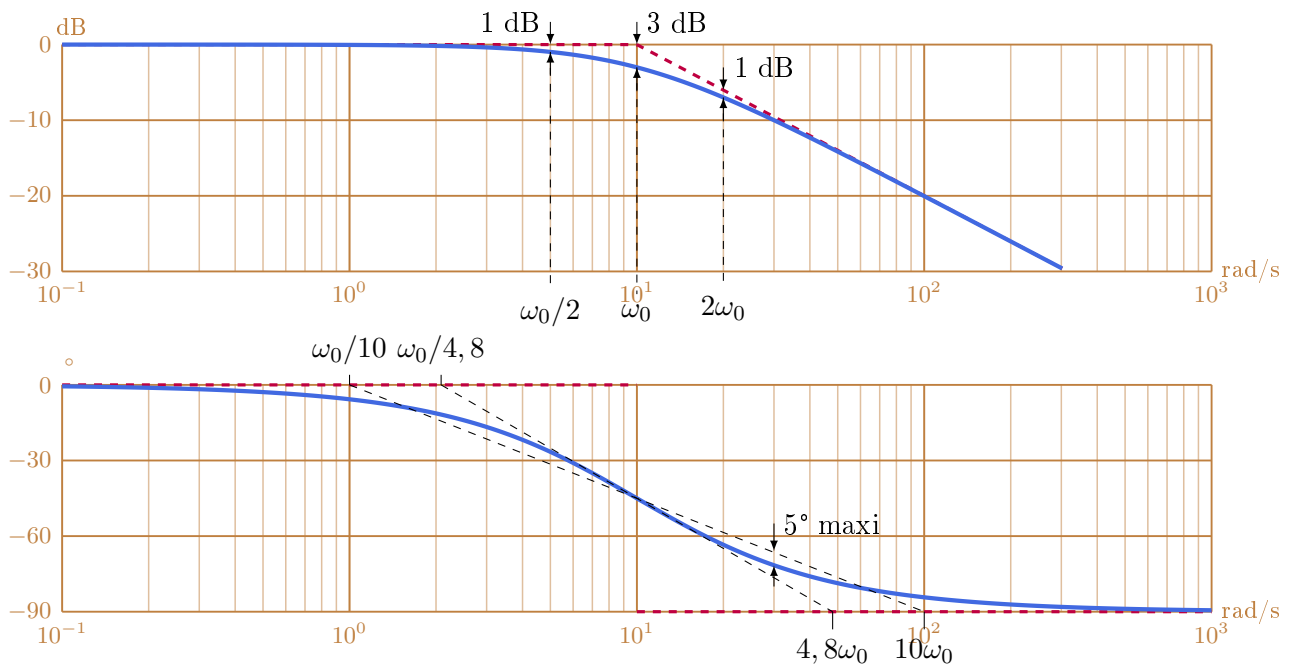


FIGURE 7 – Tracés réel et asymptotique des diagrammes de Bode d'un système du 1^{er} ordre

Valeurs remarquables Afin d'obtenir un tracé réel des diagrammes à partir du tracé asymptotique, la FIGURE 7 présente quelques valeurs remarquables

- diagramme de gain
 - en $\omega_0/2$ et en $2\omega_0$, la différence entre tracé réel et tracé asymptotique est de 1 dB ;
 - remarquons que le tracé réel est toujours en dessous du tracé asymptotique.
- diagramme de phase
 - la droite passant par $(\omega_0/4,8, 0)$ et $(4,8\omega_0, -90)$ correspond à la tangente au point d'inflexion du tracé réel en $\omega = \omega_0$;
 - le tracé réel présente un écart maximal de 5° avec la droite passant par les points $(\omega_0/10, 0)$ et $(10\omega_0, -90)$.



Remarque

Le tracé réel correspond au tracé des fonctions du gain $G_{dB}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|$ et de la phase $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$

2.3.4 Identification fréquentielle d'un système du 1^{er} ordre - Modèle de comportement



Définition Identification fréquentielle

L'identification fréquentielle permet de déterminer un **modèle de comportement**, à partir d'un diagramme de Bode **expérimental** (gain et phase), et donc les paramètres de la fonction de transfert harmonique, c'est-à-dire K et τ (ou ω_0).

- **gain** K : en utilisant l'asymptote horizontale pour $\omega \ll \omega_0$, $G_{dB} = 20 \log K$;
- **constante de temps** τ ou **pulsation** ω_0 : en $\omega = \omega_0$, la phase vaut -45° , ou $-\frac{\pi}{4}$, il suffit donc d'identifier la valeur de ω correspondant à cette valeur de phase.

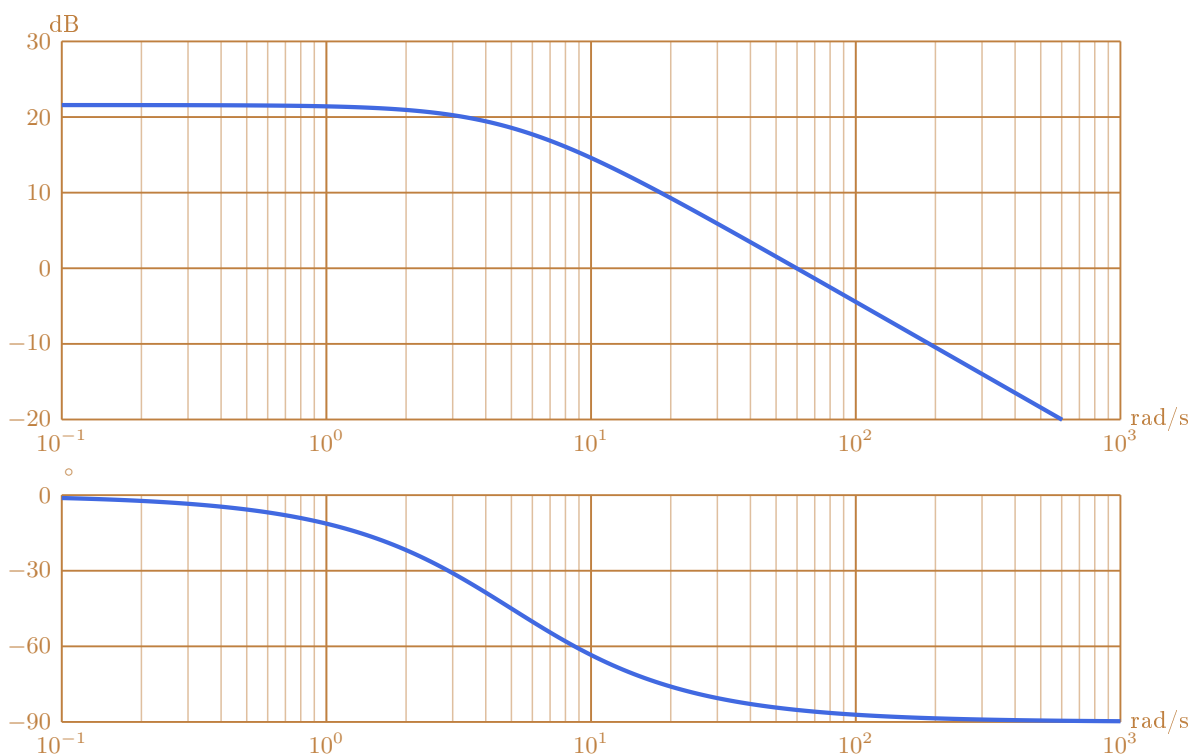


FIGURE 8 – Identification d'un modèle de comportement d'un système du 1^{er} ordre

2.4 Réponse fréquentielle d'un système du second ordre

2.4.1 Fonction de transfert harmonique

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert d'un système du second ordre est :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

**Définition**

La **fonction de transfert harmonique** d'un système du second ordre est

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + 2\xi j \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

avec K le **gain statique**, ξ le **coefficient d'amortissement** (noté aussi z) et ω_0 la **pulsation propre du système non amorti** [rad.s⁻¹].

Il est alors possible de déterminer :

- le **module** $|\underline{H}(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$
- la **phase** $\varphi = -\arctan \underbrace{\left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)}_{\omega < \omega_0} = -\left(\underbrace{\pi + \arctan \left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)}_{\omega > \omega_0} \right)$

2.4.2 Diagrammes asymptotiques**Remarque**

Les diagrammes asymptotiques peuvent plus ou moins être précis en fonction de la valeur du coefficient d'amortissement ξ .

Cas $\xi > 1$:

Dans ce cas, le dénominateur de la fonction de transfert possède deux racines (ou pôles) réelles. La fonction de transfert harmonique peut donc s'écrire :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)} = \frac{K}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)} = K \underline{G}_1(j\omega) \underline{G}_2(j\omega)$$

En utilisant les propriétés des diagrammes de Bode (paragraphe 1.3.3), le **tracé asymptotique**, mais aussi le **tracé réel**, s'obtient en ajoutant les tracés des deux systèmes du premier ordre :

$$\underline{G}_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} \quad \text{et} \quad \underline{G}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}.$$

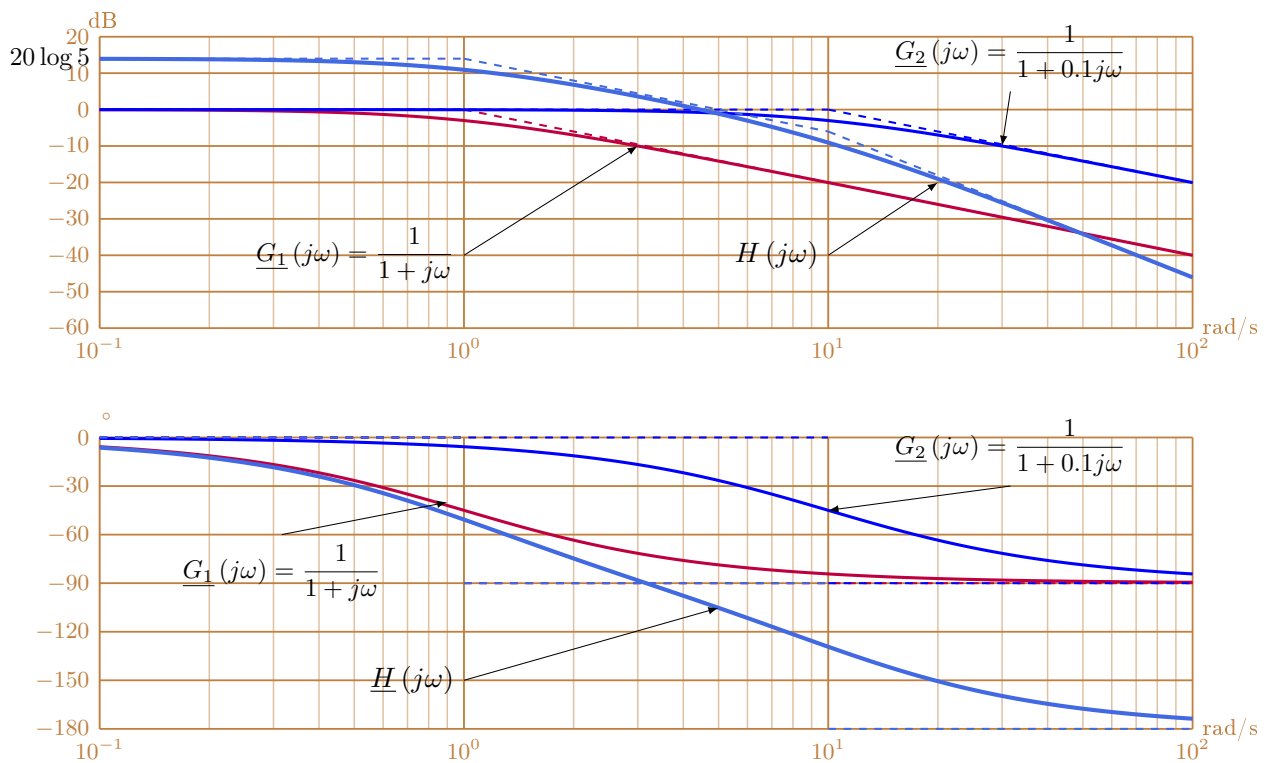


FIGURE 9 – Diagrammes de Bode pour la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{5}{(1+j\omega)(1+0.1j\omega)}$

Cas $\xi < 1$:

Les pôles (racines du dénominateur) étant complexes, on ne peut pas se ramener à deux systèmes du premier ordre. On utilise alors la méthode générale de recherche des asymptotes pour des valeurs extrêmes de ω .

2.4.3 Recherche des asymptotes

$$\text{si } \omega \ll \omega_0 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) \approx K$$

$$\text{si } \omega \gg \omega_0 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) \approx \frac{-K}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Diagramme asymptotique du gain en dB $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|$

$$\text{si } \omega \ll \omega_0 \Rightarrow G_{dB} = 20 \log K$$

Droite horizontale

$$\text{si } \omega \gg \omega_0 \Rightarrow G_{dB} = 20 \log K\omega_0^2 - 40 \log \omega$$

Droite de pente
-40 dB/décade

Les deux asymptotes se coupent en $\omega = \omega_0$.

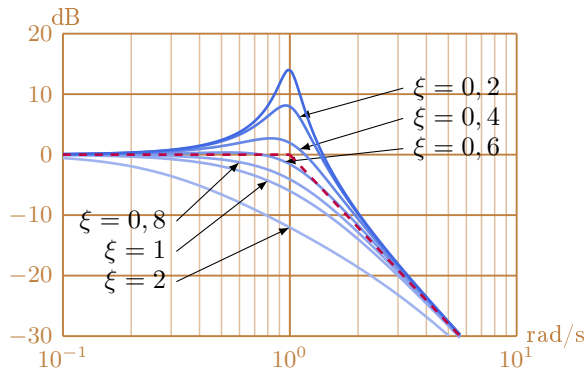
Diagramme asymptotique de la phase $\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega))$

$$\text{si } \omega \ll \omega_0 \Rightarrow \varphi \approx 0$$

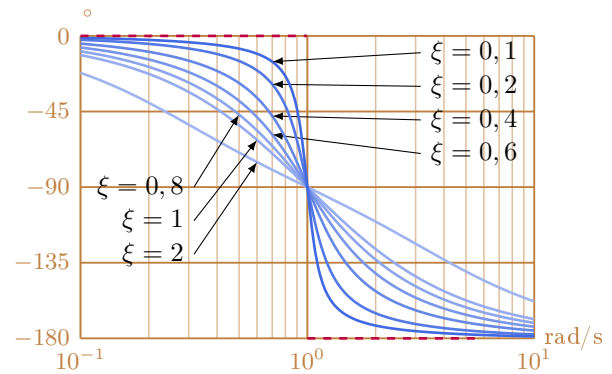
$$\text{si } \omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = \frac{-\pi}{2}$$

$$\text{si } \omega \gg \omega_0 \Rightarrow \varphi \approx -\pi$$

2.4.4 Tracés des diagrammes de Bode réel et asymptotique



Courbes de gain d'un système du 2^e ordre



Courbes de phase d'un système du 2^e ordre

FIGURE 10 – Influence de ξ sur le diagrammes de Bode d'un système du 2^e ordre



Définition *Phénomène de résonance*

On observe un phénomène de résonance sur la courbe de gain lorsque $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Cette résonance est maximale pour une pulsation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ (valeur correspondant à une dérivée nulle du gain).



Définition *Facteur de qualité*

L'amplitude du maximum est donnée par $G_{dB} = 20 \log \frac{K}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$. On définit alors (comme en Physique) le facteur de qualité défini par $Q = \frac{1}{2\xi}$.



Remarque

Pour $\xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, il n'y a pas de résonance, et en $\omega = \omega_0$, $G_{dB} = 20 \log \frac{K}{2\xi}$.

2.4.5 Identification fréquentielle d'un système du 2^e ordre - Modèle de comportement

Il s'agit de retrouver les grandeurs caractéristiques (K , ξ et ω_0) de la fonction de transfert du second ordre à partir des diagrammes de Bode.

- **gain** K : pour $\omega \ll \omega_0$ la courbe présente une asymptote horizontale de gain $G_{dB} = 20 \log K$;
- **pulsation propre** ω_0 : pour $\omega = \omega_0$, la phase vaut $\varphi(\omega_0) = -90^\circ$;
- **coefficient d'amortissement** ξ : Deux cas se présentent :

◊ il n'y a pas de résonance, $\xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$: alors, en $\omega = \omega_0$, $G_{dB}(\omega_0) = 20 \log \frac{K}{2\xi}$;

◊ il y a une résonance, $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$: alors, en $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$, $G_{dB}(\omega_r) = 20 \log \frac{K}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$.

On a toujours $G_{dB}(\omega_0) = 20 \log \frac{K}{2\xi}$.

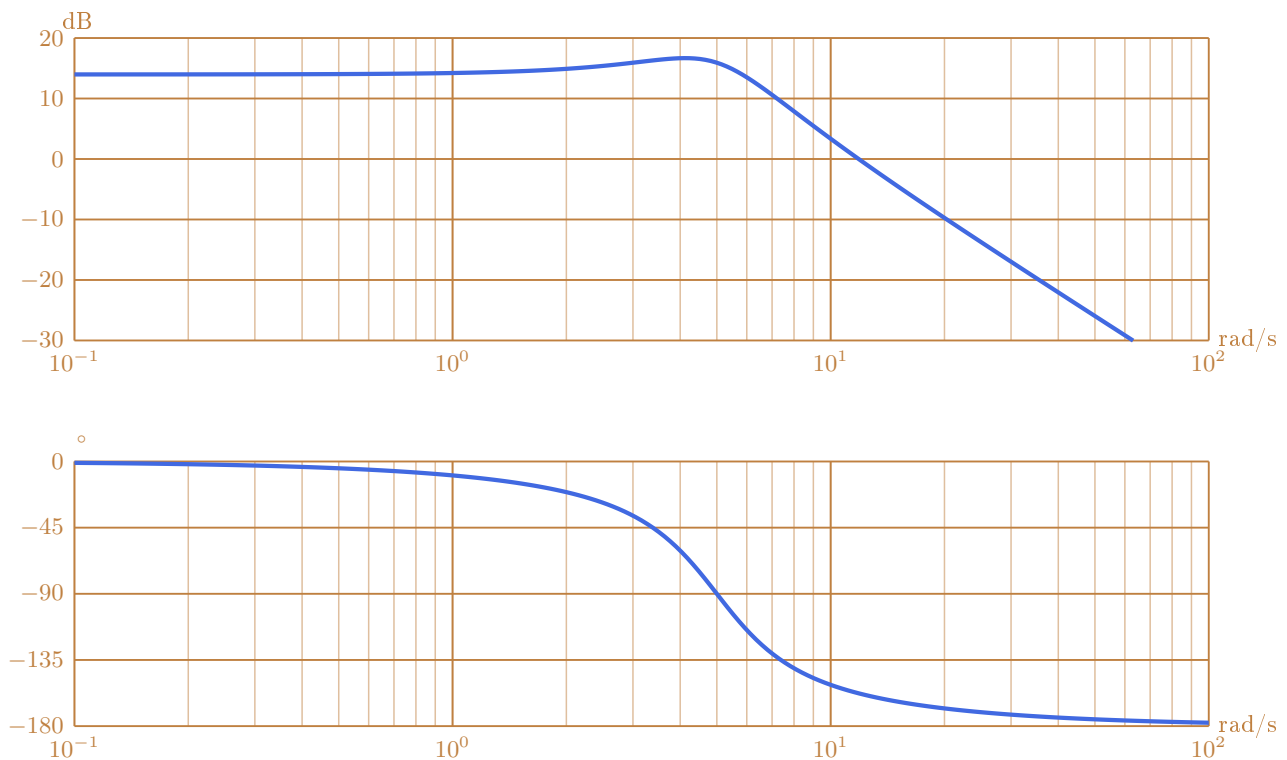


FIGURE 11 – Identification d'un modèle de comportement d'un système du second ordre

2.5 Diagramme de Bode d'un système d'ordre quelconque

Soit la fonction de transfert d'un système $H(p) = \frac{b_0 + b_1p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1p + \dots + a_n p^n}$.

Cette fonction de transfert peut toujours se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K \prod_i (1 + \tau_i p)^{n_i} \prod_j \left(1 + 2\frac{\xi_j}{\omega_j} p + \frac{p^2}{\omega_j^2}\right)^{n_j}}{p^\alpha \prod_k (1 + \tau_k p)^{n_k} \prod_\ell \left(1 + 2\frac{\xi_\ell}{\omega_\ell} p + \frac{p^2}{\omega_\ell^2}\right)^{n_\ell}} \quad \text{avec } \xi_j \text{ et } \xi_\ell \in [0; 1[$$

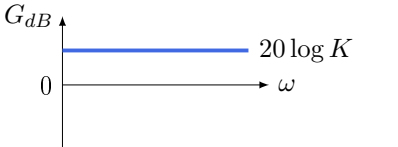
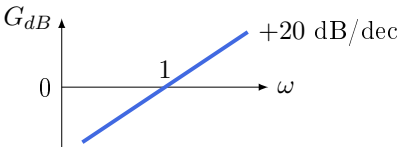
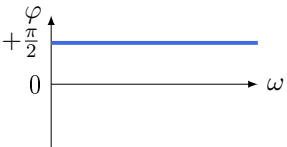
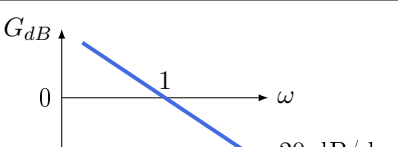
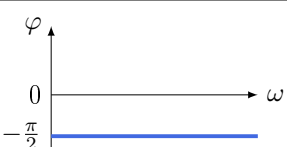
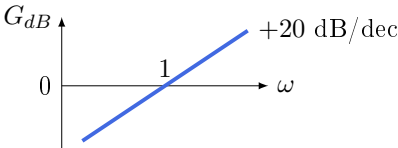
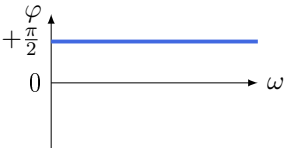
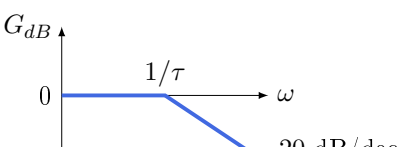
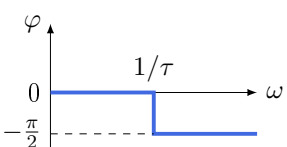
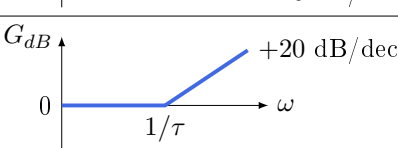
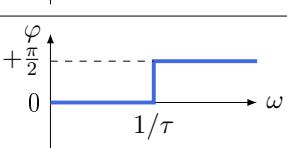
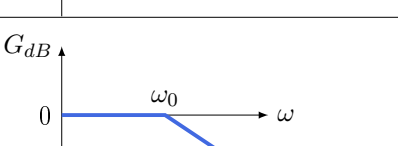
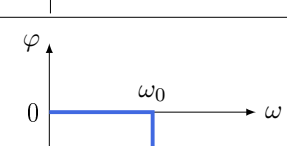
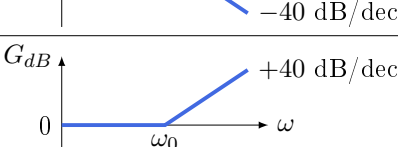
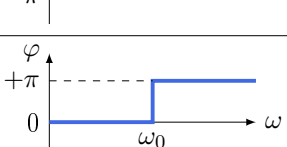
D'après les propriétés du diagramme de Bode, il suffit de tracer les diagrammes de chaque fonction de transfert élémentaire, puis d'additionner ces diagrammes pour obtenir le diagramme de Bode complet.

2.6 Méthodologie

1. on écrit la fonction de transfert en cherchant les pôles et les zéros sous forme canonique ;
2. on fait donc apparaître toutes les fonctions de transfert élémentaires (intégrateurs, premiers ordres, seconds ordres au numérateur ou au dénominateur avec $\xi < 1$) ;
3. pour chaque fonction de transfert élémentaire, on cherche sa pulsation de coupure et on trace son diagramme de Bode. On peut mettre tous les résultats dans un tableau de variation dans lequel on note les pentes de courbes et les points caractéristiques ;
4. si l'échelle n'est pas donnée alors il faut en chercher une adéquate :
 - pour les abscisses, on se placera une décade avant la plus petite pulsation de coupure et une décade après la plus grande,

- pour les ordonnées, on cherche approximativement ou analytiquement le minimum et le maximum à partir du tableau de variation,
5. on trace les diagrammes de Bode asymptotiques, puis on en déduit l'allure du diagramme réel (si demandé).

2.7 Résumé : diagrammes de Bode asymptotiques de fonctions de transfert élémentaires

FT	Diagramme de gain	Diagramme de phase
$H(p) = K$		
$H(p) = p$		
$H(p) = \frac{1}{p}$		
$H(p) = p$		
$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$		
$H(p) = 1 + \tau p$		
$H(p) = \frac{1}{1 + 2\xi\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec $\xi \leq 1$		
$H(p) = 1 + 2\xi\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}$ avec $\xi \leq 1$		

3 Bilan



À retenir *SAVOIR*

Je connais :

- les expressions du gain et de la phase d'une réponse fréquentielle ;
- la représentation dans le plan de Bode de ces 2 fonctions ;
- la signification de ces 2 fonctions vis-à-vis du tracé temporel de la réponse ;
- l'influence des grandeurs caractéristiques des SLCI sur leur réponse fréquentielle ;
- l'allure des réponses fréquentielles des SLCI fondamentaux ;
- la définition de la bande passante.



À retenir *SAVOIR FAIRE*

Je sais :

- calculer le gain et la phase d'une réponse fréquentielle à partir de la fonction de transfert du modèle ;
- tracer la réponse fréquentielle dans le plan de Bode d'un SLCI du premier ordre (asymptotes et courbes réelles) ;
- tracer la réponse dans le plan de Bode d'un SLCI du second ordre (asymptotes et courbes réelles) ;
- déterminer la bande passante d'une réponse fréquentielle ;
- identifier les grandeurs caractéristiques d'un SLCI du premier ordre à partir de sa réponse fréquentielle dans le plan de Bode ;
- identifier les grandeurs caractéristiques d'un SLCI du second ordre à partir de sa réponse fréquentielle dans le plan de Bode.