



# ANALYSE HARMONIQUE DES SLCI TD

Professeur: Y.FARTOUH

v0.1

CPGE - MARRAKECH

## ASSERVISSEMENT DE POSITION D'UN HEXAPODE

### 1 Contexte

La caractérisation du système squelettique humain est une donnée importante pour la mise en place de traitements dédiés en cas de troubles musculo-squelettiques. Des études sur ce sujet existent en utilisant des modélisations mécaniques de la colonne vertébrale et des simulations numériques par la méthode des éléments finis par exemple. Cependant, la validation de ces modèles nécessite la mise en place d'essais expérimentaux. Un dispositif expérimental étudié par certaines équipes de recherche est organisé autour d'un Hexapode piloté en position. Ce dispositif est représenté sur la FIGURE 1. Le pilotage de la plateforme supérieure est souvent réalisé en asservissant directement les positions des différents axes. Ce choix technique permet une réalisation facile de la chaîne de commande mais possède un inconvénient : il entraîne un manque de précision en raison de la souplesse des vérins et des jeux dans les liaisons de l'Hexapode.



FIGURE 1 – Système d'asservissement en position d'un Hexapode par traitement d'images

L'architecture de commande de l'Hexapode est représentée par le schéma de la FIGURE 2. Une des solutions consiste à asservir les longueurs des vérins  $L_i$  à des longueurs de référence  $L_i^*$  obtenues en utilisant un modèle cinématique inverse à partir des positions souhaitées  $P_i^*$  de la plateforme dans un repère absolu. Une solution simple pour déterminer les longueurs des vérins est d'utiliser des mesures issues de capteurs montés directement sur les axes des moteurs (en tenant compte du rapport de transmission). Mais la simplicité de cette solution peut conduire à des erreurs en raison de la souplesse

des tiges du vérin, ou encore des jeux dans les liaisons, conduisant ainsi à une longueur de vérin  $L_i^d$  différente de celle mesurée  $L_i^m$ . Dans ce contexte, la FIGURE 2 propose une solution exploitant une estimation des positions réelles  $L_i^{de}$  des extrémités des tiges des vérins. Cette méthode consiste à obtenir cette estimation en utilisant une caméra et un algorithme de traitement d'images.

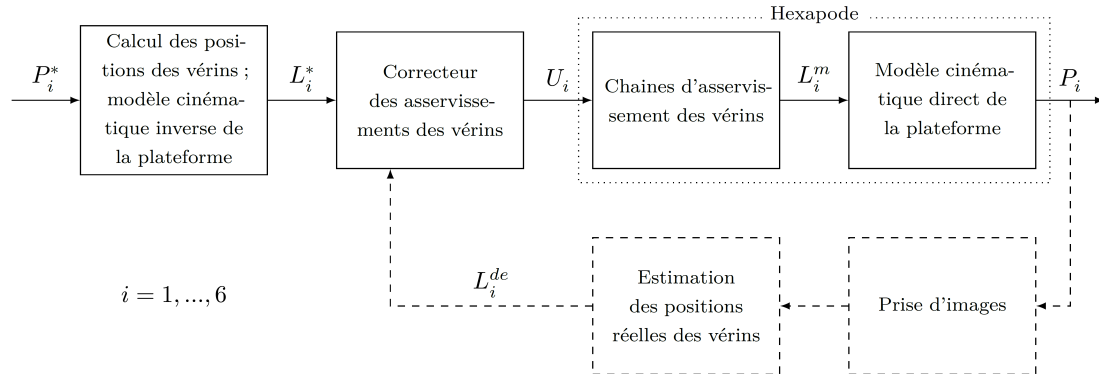


FIGURE 2 – Architecture de commande de l'Hexapode

## 2 Étude cinématique de la plateforme Hexapode

### Objectif

Le but de cette partie est d'étudier les mouvements de la plateforme Hexapode afin de définir le modèle cinématique inverse permettant de déterminer la longueur à imposer aux axes motorisés pour vérifier un positionnement donné de la plateforme mobile.

La plateforme Hexapode utilisée ici est constituée des composants suivants, représentés FIGURE 4 et FIGURE 5 :

- un support  $S_0$ , de forme triangulaire, parfaitement lié au sol, et que l'on assimilera au bâti ;
- une plateforme mobile  $S$ , de forme triangulaire, dont la mise en position permettra de solliciter expérimentalement la colonne vertébrale dont l'une des extrémités lui est fixée rigidement ;
- six axes rectilignes motorisés dont la longueur peut être pilotée, et reliés au niveau de leurs extrémités par des liaisons sphériques au support  $S_0$  d'un côté, à la plateforme  $S$  de l'autre.

### 2.1 Mouvement d'un axe motorisé (seul) par rapport au support

#### Objectif

L'objectif de cette sous-partie est de déterminer les degrés de liberté d'un axe motorisé (seul) par rapport au support.

Chaque axe motorisé présente l'architecture illustrée sur la FIGURE 4 :

- un ensemble {support moteur **13** + corps de vérin **10**}, relié au support fixe par l'intermédiaire d'une liaison que l'on peut modéliser par une liaison sphérique (rotule inférieure **14**) ;
- un ensemble {actionneur électrique **1** + réducteur **2**}, fixé au corps de vérin **10** et entraînant la vis **4** en rotation autour de son axe ;

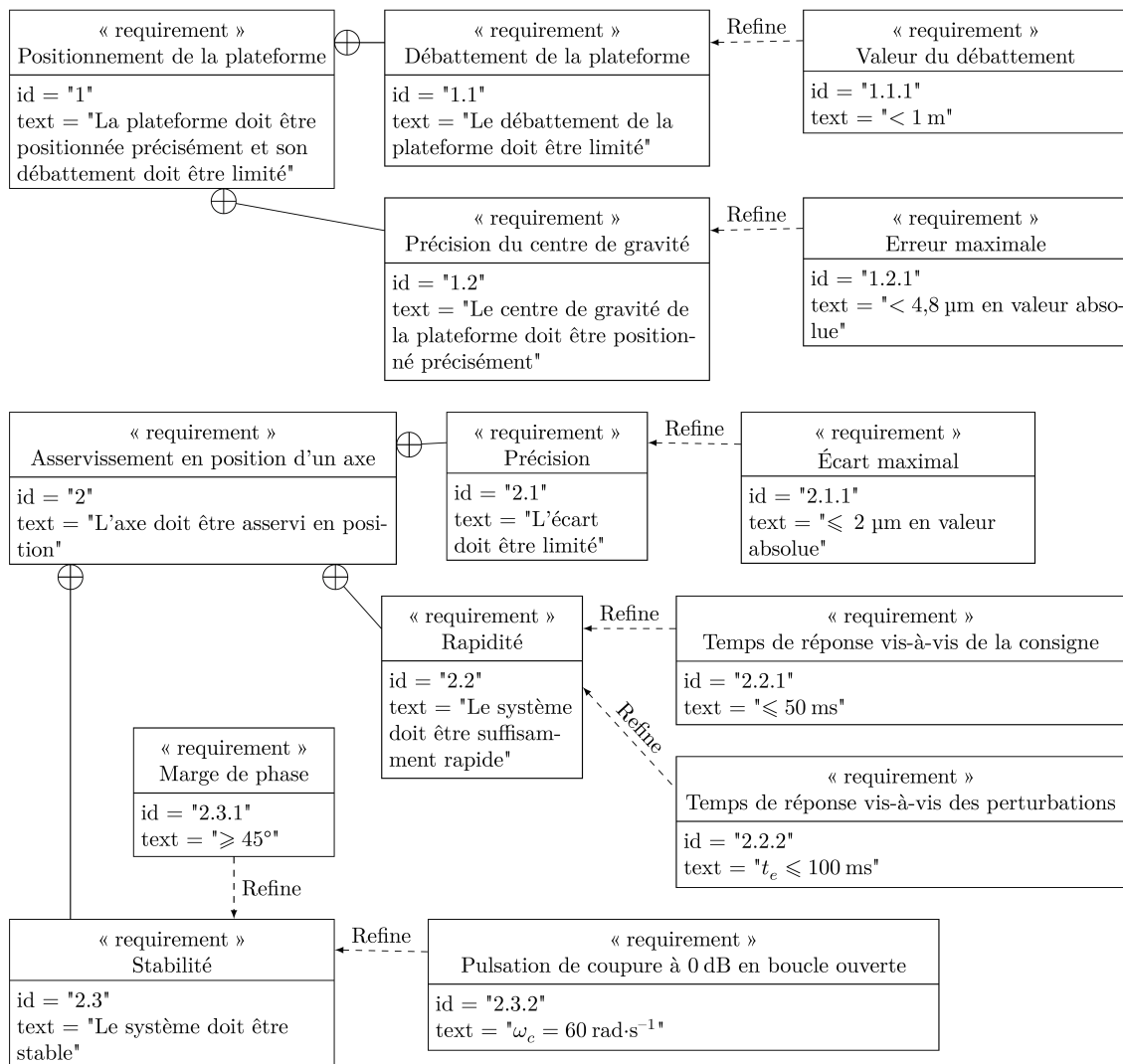


FIGURE 3 – Diagramme des exigences

- un écrou **5** en liaison par rapport au corps de vérin **10** modélisable par une liaison glissière et en liaison hélicoïdale par rapport à la vis **4** ;
- une tige de vérin **7**, solidaire de l'écrou **5**, et reliée à son extrémité avec la plateforme mobile par l'intermédiaire d'une liaison que l'on peut modéliser comme une liaison sphérique (rotule supérieure **8**).

**Question 1** À l'aide des informations précédentes, compléter sur le document réponse (FIGURE 9) le schéma cinématique (plan) d'un axe motorisé, en repérant, à l'aide de plusieurs couleurs, l'ensemble {corps de vérin **10** + support moteur **13**}, l'ensemble {tige de vérin **7** + écrou **5**} et la vis **4**. On ne tiendra pas compte du système {roue **12** + vis sans fin **3**} associé au capteur **11**. Vous prendrez soin initialement de tracer un graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer intuitivement la liaison équivalente à l'ensemble des trois liaisons présentes entre la tige de vérin **7** et le corps de vérin **10**.

## 2.2 Mouvement de la plateforme $S$ par rapport au support $S_0$

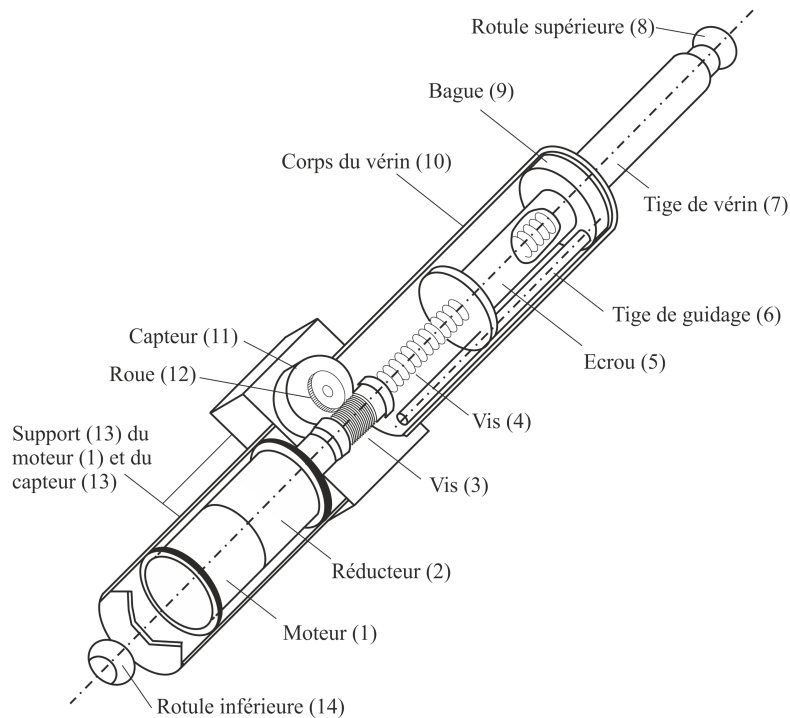


FIGURE 4 – Vue écorchée de l'architecture d'un axe motorisé

---

### Objectif

---

L'objectif de cette sous-partie est d'étudier le mouvement de la plateforme en vue de la réalisation d'un essai spécifique.

---

L'architecture de la plateforme Hexapode est représentée sur la FIGURE 5 :

- au support fixe  $S_0$  est attaché le référentiel  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  supposé galiléen, où  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  est le plan contenant les points  $D, E$  et  $F$  ;
- à la plateforme mobile  $S$  est attaché le référentiel  $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , où  $((G, \vec{x}, \vec{y}))$  est le plan contenant les points  $A, B$  et  $C$  ;
- chaque axe  $i$ , ( $1 \leq i \leq 6$ ), relie un point de la plateforme  $S$  à un point du support  $S_0$  :  $\overrightarrow{DA} = L_1 \cdot \vec{u}_1$ ,  $\overrightarrow{DB} = L_2 \cdot \vec{u}_2$ ,  $\overrightarrow{EB} = L_3 \cdot \vec{u}_3$ ,  $\overrightarrow{EC} = L_4 \cdot \vec{u}_4$ ,  $\overrightarrow{FC} = L_5 \cdot \vec{u}_5$  et  $\overrightarrow{FA} = L_6 \cdot \vec{u}_6$  où les vecteurs  $\vec{u}_i$  sont unitaires.

Dans la suite, on choisit comme degrés de liberté les trois coordonnées cartésiennes de la position du centre de gravité  $G(x_G, y_G, z_G)_{R_0}$  de la plateforme mobile  $S$  dans  $R_0$ , ainsi que les trois angles d'Euler  $(\psi, \theta, \phi)$  définis dans la FIGURE 6.

Afin de pouvoir solliciter la colonne vertébrale testée, la plateforme mobile  $S$  doit pouvoir être pilotée de façon à ce que le triangle  $ABC$  soit contenu dans un plan  $(\Pi)$  dont l'équation cartésienne dans  $R_0$  est  $(\Pi) : z = ax + by + c$  où  $(x, y, z)$  sont les coordonnées dans  $R_0$  d'un point  $M$  de  $(\Pi)$  et  $(a, b, c)$  sont trois constantes non nulles.

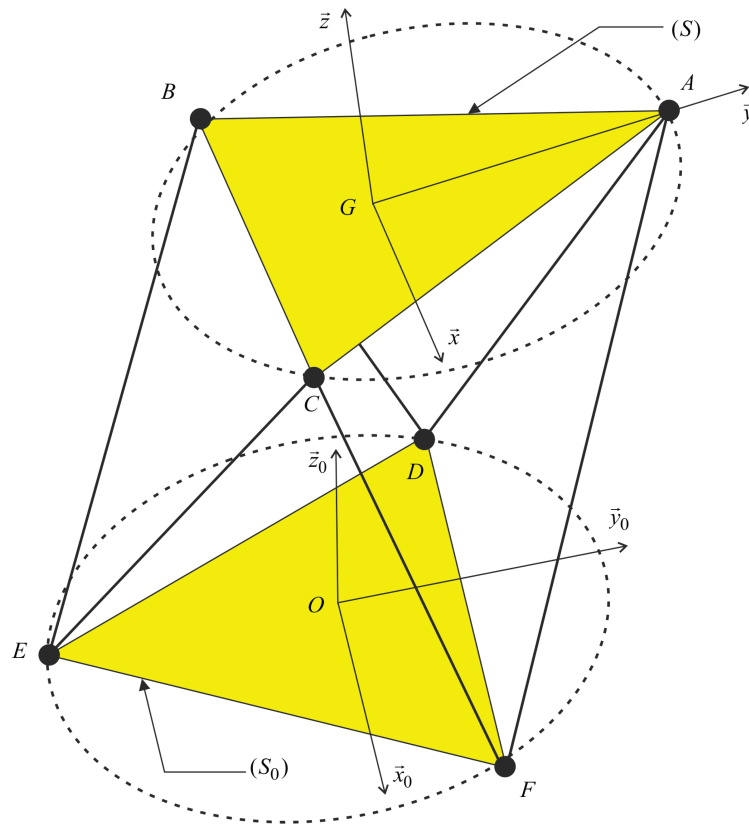


FIGURE 5 – Architecture de la plateforme Hexapode (les liaisons équivalentes entre tiges et corps de vérin ne sont pas représentées)

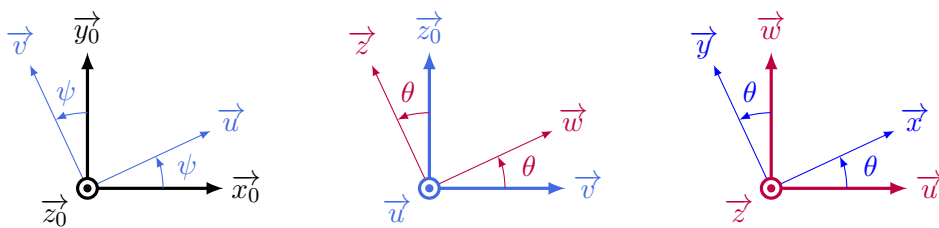


FIGURE 6 – Définition des trois angles d'Euler (précession  $\psi$ , nutation  $\theta$ , rotation propre  $\phi$ ).

**Question 3** Déterminer l'équation cartésienne dans  $R_0$  du plan de la plateforme mobile  $\mathbf{S}$  à l'aide des six degrés de liberté  $(x_G, y_G, z_G, \psi, \theta, \phi)$  de cette dernière. Pour cela, on calculera le produit scalaire  $\overrightarrow{GM} \cdot \vec{n}$ , où  $\vec{n}$  est le vecteur normal unitaire à la plateforme mobile que l'on exprimera à l'aide des vecteurs de la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . En déduire qu'il est possible de relier les degrés de liberté  $(x_G, y_G, z_G, \psi, \theta)$  de la plateforme mobile  $\mathbf{S}$  aux constantes  $(a, b, c)$  de l'équation cartésienne de  $(\Pi)$  ; on ne cherchera pas à expliciter les fonctions donnant l'expression de  $(x_G, y_G, z_G, \psi, \theta)$  en fonction de  $(a, b, c)$ . Pourquoi l'angle de rotation propre  $\phi$  n'intervient-il pas dans l'équation demandée ?

### 3 Asservissement par traitement d'images

Une étude préliminaire montre que l'on peut formuler le problème de la détermination du positionnement de la plateforme mobile comme la résolution d'un système d'équations linéaires. En raison de la prise d'images et de la résolution de ce calcul, l'estimation de la position réelle est obtenue avec un retard pur  $\tau = 0,04$ s.

#### 3.1 Conception de la loi d'asservissement en position de l'Hexapode

##### — Objectif —

En vue d'asservir la position de la colonne vertébrale à une position de référence, une structure de commande à partir de l'estimation de la position réelle est mise en place. Après la définition des modèles nécessaires à la synthèse des lois de commande, l'objet de cette partie est de concevoir le régulateur de cette architecture de commande.

Pour la synthèse des correcteurs de la boucle externe, on adopte le modèle du procédé représenté par le schéma-bloc de la FIGURE 7. On suppose :

- qu'une première structure de commande « rapprochée » assure l'asservissement en vitesse des axes et que les caractéristiques dynamiques des six axes asservis sont identiques ;
- pour un axe donné, que les efforts dus à sa rigidité, à la charge et les couplages avec les autres axes sont modélisés sous la forme d'un signal externe perturbateur unique, ramené en entrée du procédé et dont  $F_u(p)$  est la transformée de Laplace ;
- que les jeux dans les liaisons sont modélisés sous la forme d'un signal perturbateur externe, dont  $D(p)$  est la transformée de Laplace, traduisant l'écart de déplacement de la position de l'axe ;
- pour l'axe considéré que  $L^m(p)$ ,  $L^d(p)$  et  $L^{de}(p)$  sont respectivement les transformées de Laplace de la position non déformée, de la position de l'axe après déformation et de l'estimation de la position réelle issue de l'évaluation au moyen de l'algorithme de traitement d'images (la grandeur  $L^m$  est obtenue au moyen d'une mesure issue d'un capteur placé directement sur l'axe de l'actionneur) ;
- que  $U(p)$  représente la transformée de Laplace de la grandeur de commande (homogène à une tension) de la chaîne de motorisation de l'axe considéré.

La chaîne de motorisation est modélisée par la fonction de transfert  $H(p) = \frac{L^m(p)}{U(p)} = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$ , la chaîne d'acquisition et le système de traitement d'images sont modélisés en temps continu comme un retard pur  $\tau = 0,04$ s. Pour la chaîne d'asservissement, le cahier des charges partiel suivant, caractérisé par une pulsation de coupure en boucle ouverte et une marge de phase fixées a priori, est rappelé :

- pulsation de coupure  $\omega_c$  à 0 dB en boucle ouverte  $\omega_c = 60 \text{ rad.s}^{-1}$  ;
- marge de phase  $\Delta\phi \geq 45^\circ$ .

Il s'agit dans ce sujet :

- de montrer qu'une structure mono-boucle simple ne permet pas d'assurer le cahier des charges partiel ;
- d'analyser si une structure de commande adaptée aux systèmes à retard peut assurer les performances escomptées (permettant ainsi de s'affranchir du retard pur de la chaîne de mesure par traitement d'images) ;
- de montrer qu'une structure adaptée aux systèmes à retard complétée par une boucle interne sur la mesure de position d'un axe non déformé permet de vérifier l'ensemble du cahier des charges.

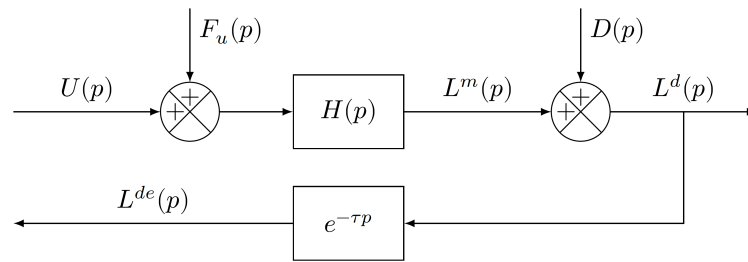


FIGURE 7 – Modèle du procédé pour la conception de la loi de commande de la chaîne d'asservissement

### 3.1.1 Analyse d'une structure mono-boucle

Une solution simple est d'envisager, dans un premier temps, une structure de commande réalisée directement à partir de l'estimation  $L^{de}(t)$  de la position réelle de l'axe considéré. Cette structure, dont le correcteur est noté  $C_1(p)$  et la consigne  $L^*(p)$ , est représentée par le schéma de la FIGURE 8.

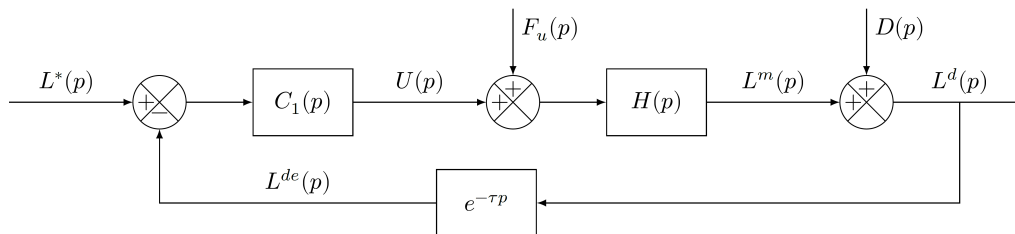


FIGURE 8 – Structure de commande à une boucle

En raison de la présence de bruits de mesure (signaux non représentés sur les schémas fournis), il n'est pas souhaitable d'introduire d'action dérivée dans le régulateur de cette boucle. Seuls des correcteurs de type proportionnel intégral seront envisagés.

La FIGURE 10 du document réponse montre le diagramme de Bode de la fonction  $H(p)$ .

**Question 4** Justifier le tracé du diagramme de Bode de  $H(p)$  en traçant le diagramme de Bode asymptotique.

**Question 5** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte, notée FTBO( $p$ ), dans le cas où  $C_1(p) = 1$ .

**Question 6** Déterminer les expressions des gain et de la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte FTBO( $p$ ) dans les cas suivants :

- on néglige le retard  $\tau$ , soit  $\tau = 0$  s ;
- on tient compte du retard  $\tau = 0,04$  s.

On considère toujours le cas où  $C_1(p) = 1$ .

**Question 7** Conclure sur l'influence d'un retard  $\tau$  sur le diagramme de Bode du gain et de la phase.

**Question 8** Tracer, sur la FIGURE 10 du document réponse, le diagramme de Bode (tracés réels des gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant  $C_1(p) = 1$ ), dans les cas suivants :

- en BLEU, lorsque le retard pur  $\tau = 0$  s ;
- en NOIR, lorsque le retard pur  $\tau = 0,04$  s.

Les ingénieurs concepteurs du système propose de mettre en place un correcteur proportionnel intégral de fonction de transfert  $C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_{i1}p}\right)$ .

**Question 9** Tracer le diagramme de Bode (tracés réels des gain et phase) de la fonction de transfert de ce correcteur en précisant l'ensemble des points caractéristiques. Que vaut la phase maximale apportée par ce correcteur ?

**Question 10** Rappeler la définition de la marge de phase d'un système, et en déduire une relation entre  $\arg(\underline{C}_1(j\omega_c))$ ,  $\arg(\underline{H}(j\omega_c))$  et la marge de phase souhaitée.

**Question 11** Au regard des tracés de la question 8, du tracé du diagramme de Bode du correcteur de la question 9 et des performances souhaitées par le cahier des charges, déterminer les deux contraintes (sur le gain et la phase) que le correcteur  $C_1(j\omega)$  doit vérifier pour les deux cas :

- procédé sans retard pur ( $\tau = 0$  s) ;
- procédé avec la présence du retard pur  $\tau = 0,04$  s.

**Question 12** Justifier les 2 affirmations suivantes sur la mise en place d'un correcteur proportionnel intégral :

- il ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure ;
- il peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.

### 3.1.2 Structure de commande adaptée à un système avec retard

Pour remédier au problème mis en évidence à la question 11, il est envisagé d'utiliser une structure de commande adaptée aux systèmes comportant des retards. La FIGURE 9 montre deux structures de commande correspondant d'une part au schéma réel (a) représentant la réalisation de la commande ( $X(p)$  est la transformée de Laplace d'une grandeur  $x(t)$  interne au régulateur), d'autre part un schéma fictif (b).

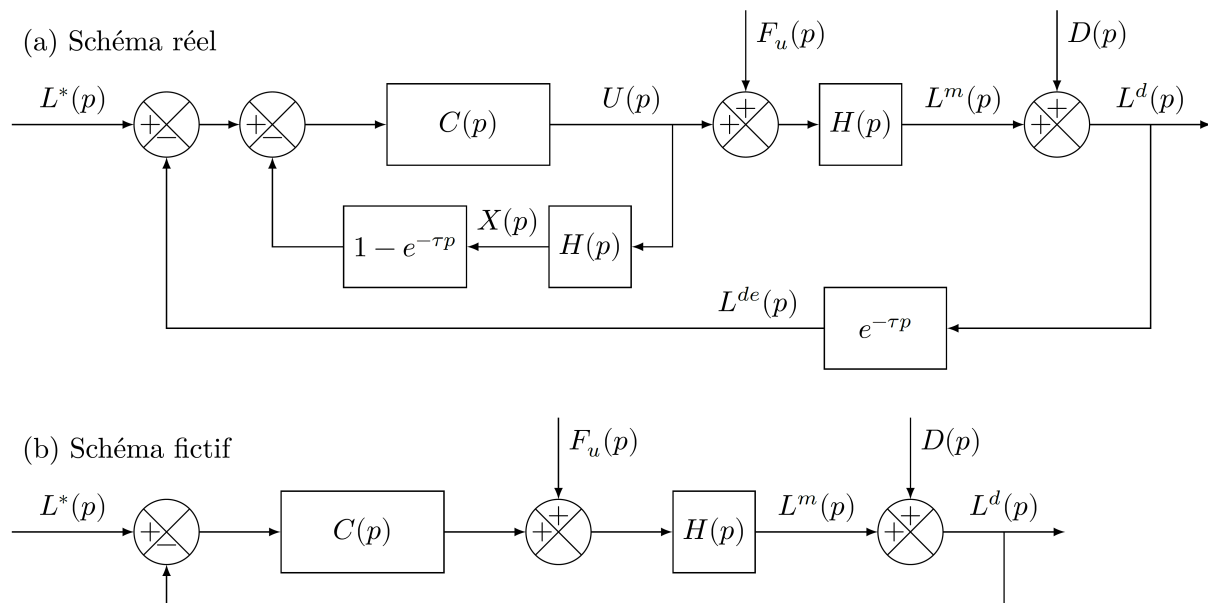


FIGURE 9 – Structure de commande adaptée aux systèmes à retard

**Question 13** Montrer qu'en l'absence de perturbations ( $F_u(p) = D(p) = 0$ ) les deux structures (a) et (b) sont équivalentes du point de vue entrée-sortie, c'est-à-dire qu'elles ont la même fonction de transfert en boucle fermée  $\frac{L^d(p)}{L^*(p)}$ .

Ainsi, la réalisation de la loi de commande selon la structure de la FIGURE 9.(a), équivalente du point de vue entrée-sortie à la structure virtuelle sans retard de la FIGURE 9.(b), permet d'envisager un correcteur  $C(p)$  de type proportionnel intégral (ce que ne permet pas de faire une structure série simple comme celle représentée à la FIGURE 8).

**Question 14** En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure 13 du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral  $C(p) = K\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$  permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier des charges partiel. Pour concevoir ce correcteur, la démarche suivante pourra être suivie :

- déterminer la condition en phase, soit  $\arg(\underline{C}(j\omega_c))$ , que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale  $T_i$  ;
- pour la valeur de  $T_i$  obtenue, déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

Pour la suite, on prend  $T_i = 7 \cdot 10^{-2}$  s et  $K = 140$ .

**Question 15** Pour une consigne nulle  $L^*(p) = 0$ , une perturbation en sortie nulle  $d(t) = 0$  et un échelon de perturbation en entrée  $f_u(t) = F_0 \Upsilon(t)$  où  $\Upsilon$  est l'échelon d'Heaviside :

- déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$  (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la FIGURE 9.(a)) ;
- compte tenu de la forme de  $H(p)$ , en déduire alors le comportement de la grandeur  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini ;
- au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

### 3.1.3 Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Pour remédier au problème mis en évidence à la question 14, il est envisagé une structure à deux boucles. La nouvelle structure de commande est représentée par le schéma de la FIGURE 10 où la représentation de la boucle interne est limitée à sa fonction de transfert en boucle fermée  $T(p)$ .

**Question 16** La FIGURE 11 montre les évolutions temporelles de la position  $L^d(t)$  en réponse à une consigne en échelon  $L^*(t) = L_0 \Upsilon(t - 0,02)$  avec  $L_0 = 10$  mm et à une perturbation en échelon  $D^*(t) = D_0 \Upsilon(t - 0,02)$  avec  $D_0 = 10$   $\mu$ m. Vérifier la satisfaction des exigences du cahier des charges (FIGURE 3) en analysant ces courbes, et conclure alors sur la pertinence de la structure de correction retenue.

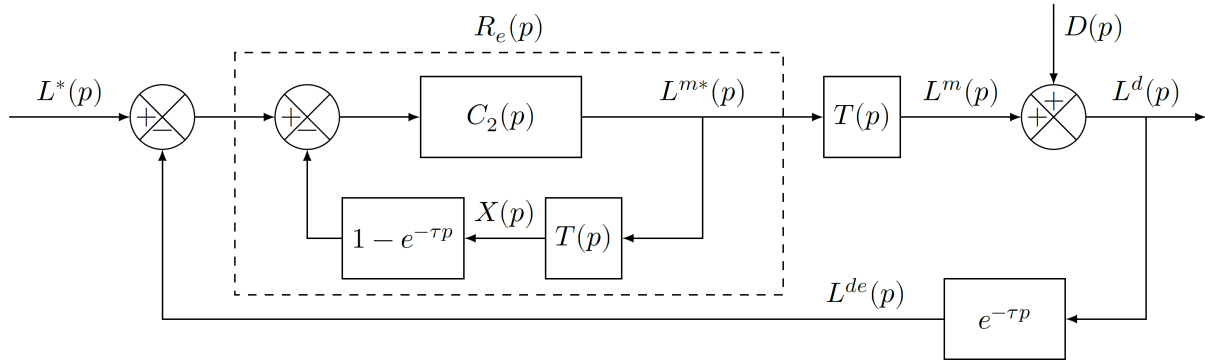


FIGURE 10 – Modèle de commande avec une boucle interne intégrée

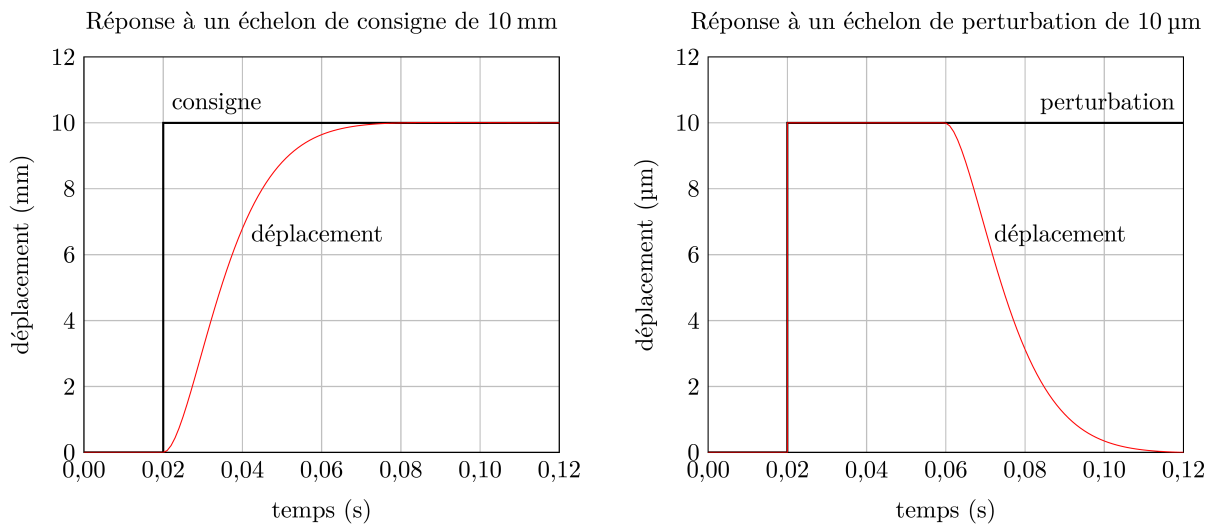


FIGURE 11 – Réponses temporelles vis-à-vis d'une consigne et d'une perturbation en échelon

## Document réponse

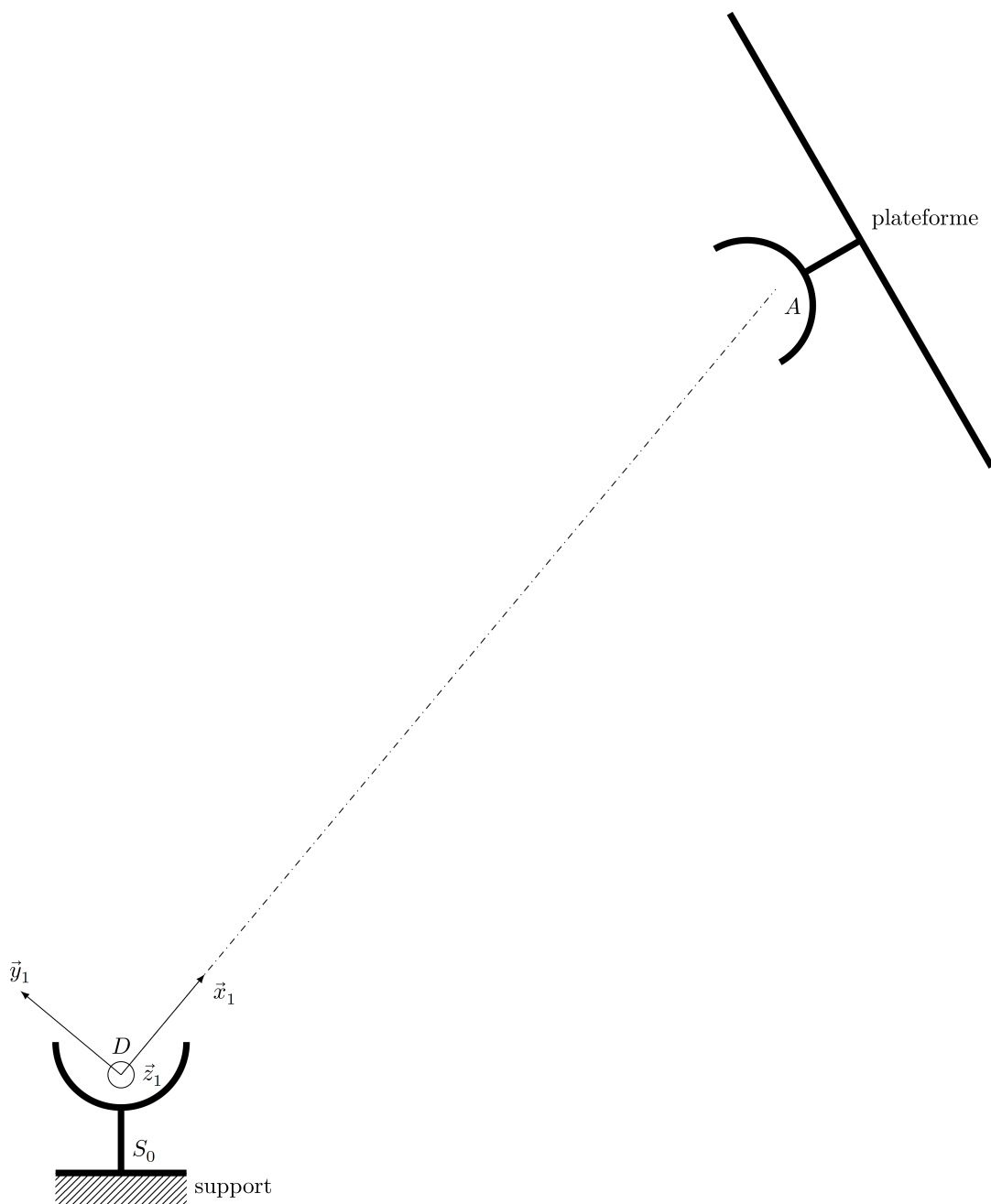


FIGURE 12 – Schéma cinématique plan d'un axe motorisé

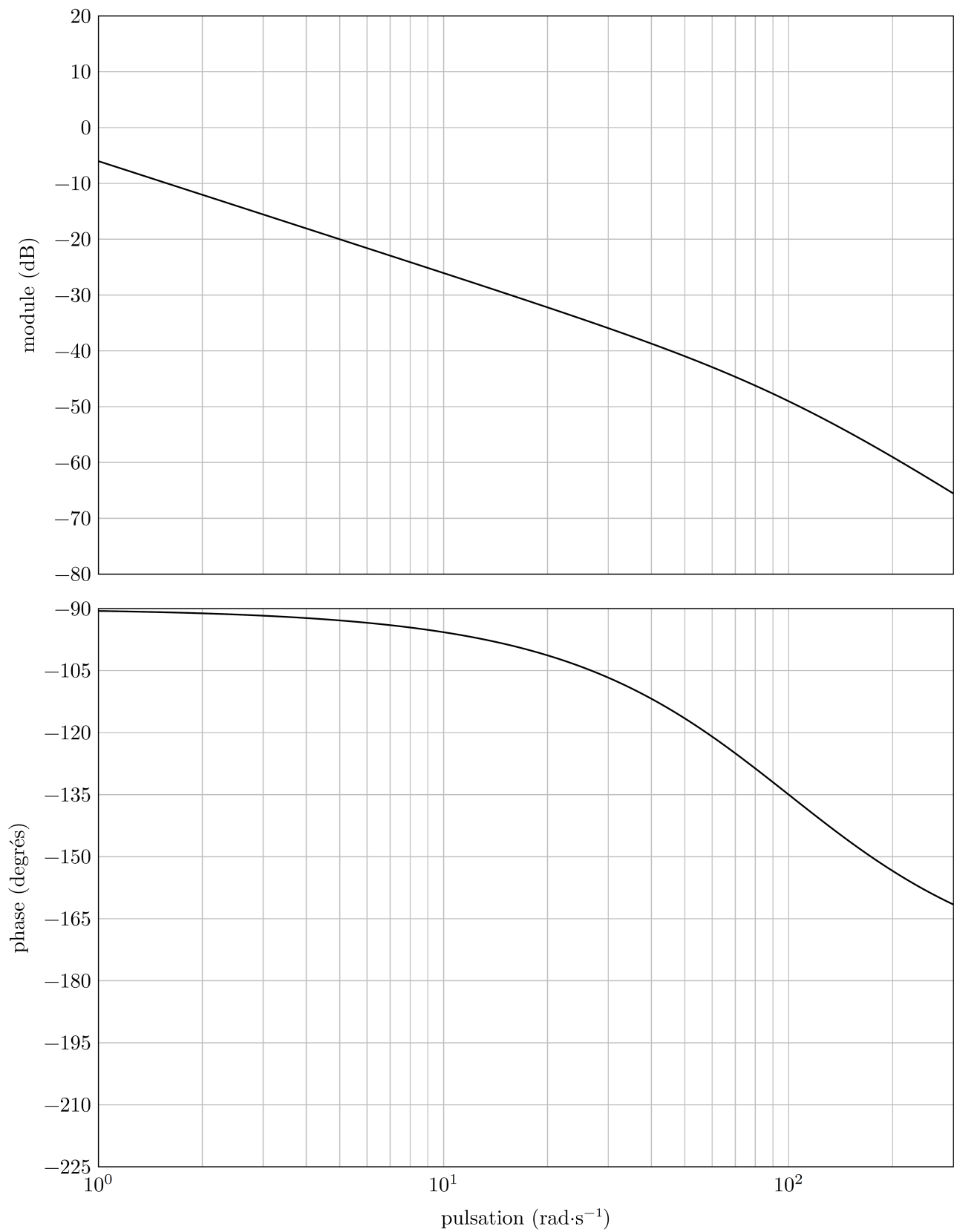


FIGURE 13 – Diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{0,5}{p \cdot (1 + 0,01p)}$