



EVALUATION ET AMÉLIORATION DES PERFORMANCES DES SLCI

Cours 5

Professeur: YASSINE FARTOUH

v1.3

CPGE - MARRAKECH

1 Performances des SLCI

Les performances des systèmes linéaires continus et invariants (SLCI) sont définies sur les critères de stabilité, de précision et de rapidité. La stabilité est primordiale, et il est nécessaire de s'assurer de celle-ci avant tout, car en cas d'instabilité, les 2 autres performances n'ont pas de sens.

Bien qu'il existe 3 domaines d'étude des SLCI (temporel, Laplace et fréquentiel), ceux-ci sont identiques, et si une performance est vérifiée dans un domaine, elle le sera aussi dans les 2 autres. Il est donc nécessaire de choisir le domaine le plus approprié afin de répondre à l'objectif visé. Les études des performances des SLCI dans le domaine temporel se résument souvent à une analyse de la réponse indicielle (entrée du type échelon) ou une rampe ; quant à celles dans le domaine fréquentiel, elles sont basées sur l'analyse du diagramme de Bode (réel ou asymptotique).

1.1 Stabilité

1.1.1 Dans le domaine temporel



Définition

Un système (SLCI) est stable, si pour une **entrée bornée**, la **sortie est bornée**.

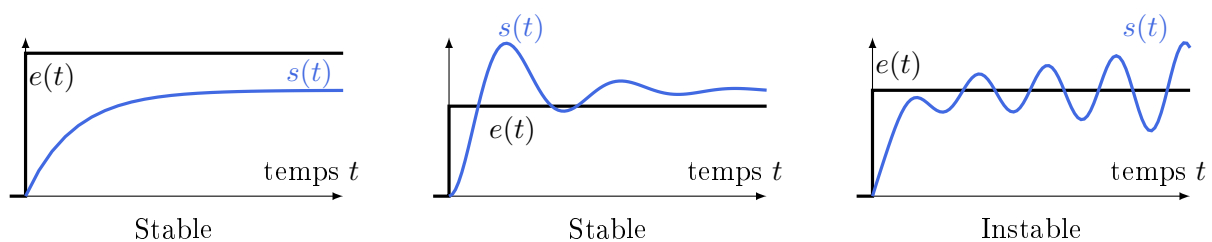


FIGURE 1 – Réponses indicielles de systèmes stables et instables dans le domaine temporel

Pour quantifier la stabilité dans le domaine temporel on utilise le taux de dépassement relatif : $k^{\text{ième}}$ oscillation et est défini par :

$$D_k\% = 100 \times \left| \frac{s(t_k) - s_\infty}{s_\infty} \right|$$

avec $s(t_k)$ l'amplitude du $k^{\text{ième}}$ dépassement et s_∞ la valeur à convergence (asymptotique) de la réponse.

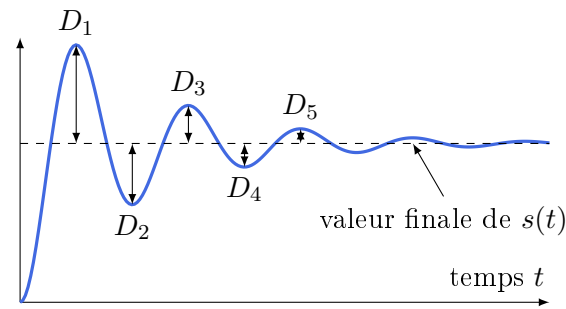


FIGURE 2 – Définition et numérotation des dépassements

1.1.2 Dans le domaine de Laplace

On considère un SLCI de fonction de transfert $H(p)$:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{K N(p)}{p^\alpha D(p)} \quad \text{avec} \quad N(0) = D(0) = 1$$



À retenir Condition fondamentale

Un système (SLCI) est stable, si tous les **pôles** de sa fonction de transfert $H(p)$ sont à **parties réelles strictement négatives**.

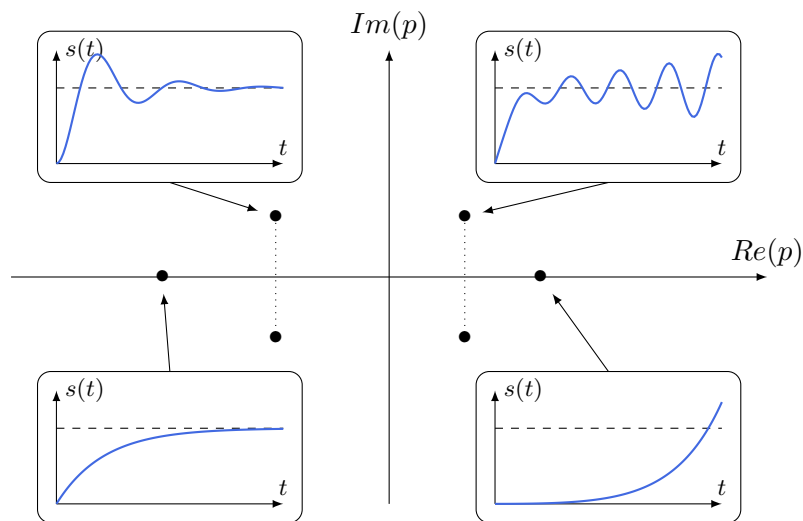


FIGURE 3 – Position des pôles d'une fonction de transfert pour des systèmes stable et instable

1.1.3 Dans le domaine fréquentiel

On considère un SLCI de fonction de transfert $H(j\omega)$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)} = \frac{a_m (j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}{b_n (j\omega)^n + b_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}$$

**À retenir** Critère du revers dans le plan de Bode

Un système (SLCI) est stable **en boucle fermée**, si la marge de gain MG et la marge de phase M_φ de la **FTBO** sont **strictement positives**.

**À retenir** Marges de gain et de phase

- La **marge de gain** MG est définie par $MG = -20 \log \left| \underline{H}(\omega = \omega_{-180^\circ}) \right|$ où ω_{-180° est la pulsation pour laquelle la phase de la FTBO vaut précisément -180° .
- La **marge de phase** M_φ est définie par $M_\varphi = 180 + \varphi(\omega = \omega_{0dB})$ où ω_{0dB} est la pulsation pour laquelle le gain (en dB) de la FTBO est nul.

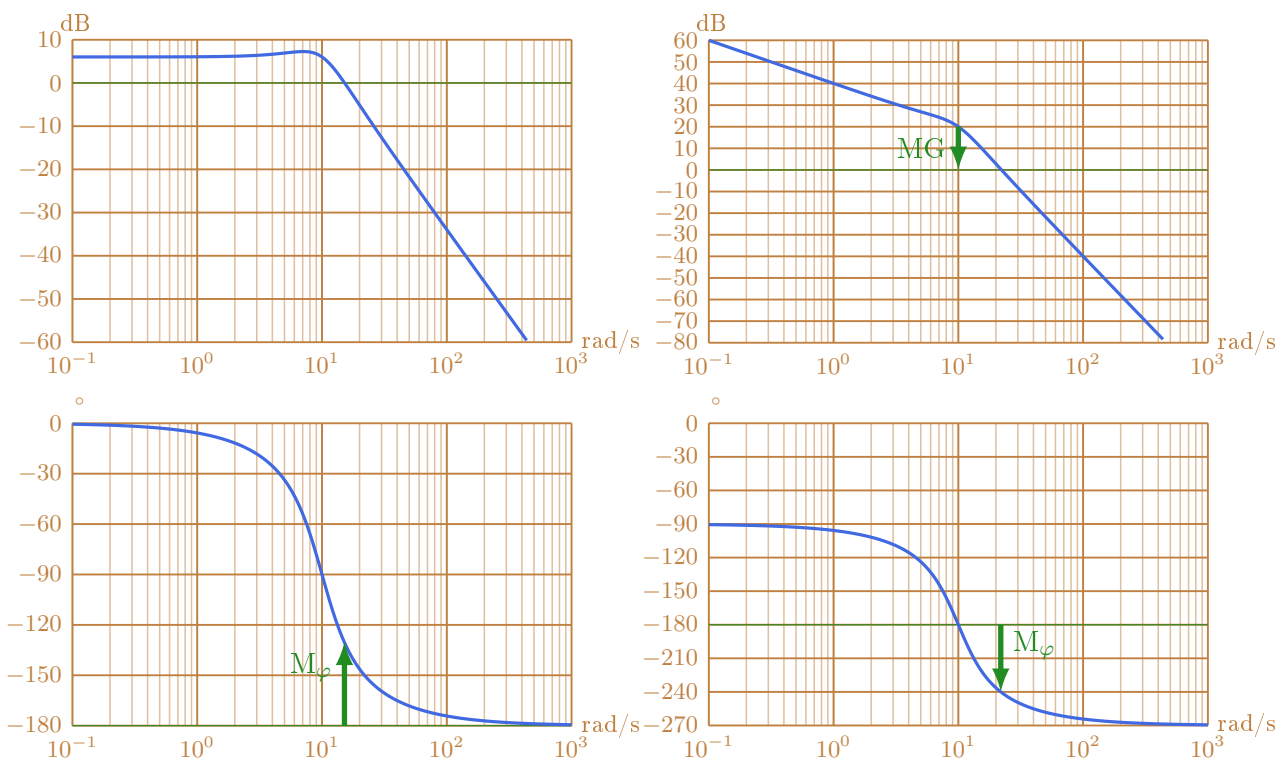


FIGURE 4 – Diagrammes de Bode de FTBO de systèmes stable et instable en BF

**Attention**

On étudie la **FTBO** pour conclure sur la stabilité de la **boucle fermée (FTBF)**.

**Remarque** Marge de gain infinie

Par convention, lorsque la pulsation pour laquelle la phase de la FTBO vaut -180° n'existe pas, on fixe la marge de gain à $MG = +\infty$.

1.2 Rapidité

1.2.1 Dans le domaine temporel

La rapidité d'un système dans le domaine temporel est définie par le critère du **temps de réponse à 5%**. D'autres critères existent, tels que le temps de montée t_m , le temps du 1^{er} pic ..., mais sont peu utilisés.

1.2.2 Dans le domaine de Laplace



À retenir Rapidité d'un système du 1^{er} ordre

Pour un système du 1^{er} ordre défini par $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ (de constante de temps τ), le temps de réponse à 5% est tel que $t_{5\%} = 3\tau$.



À retenir Rapidité d'un système du 2^e ordre

Pour un système du 2^e ordre, de coefficient d'amortissement ξ et de pulsation propre du système non amorti ω_0 défini par $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$, le temps de réponse à 5% se lit sur l'abaque du temps de réponse réduit ($t_{5\%} \cdot \omega_0$) FIGURE 5.

- Un système du 2^e ordre est le **plus rapide** si son coefficient d'amortissement $\xi \approx 0,69$. Dans ce cas, il y a **présence d'un seul dépassement**.
- Un système du 2^e ordre est le **plus rapide sans dépassement** si son coefficient d'amortissement $\xi = 1$.

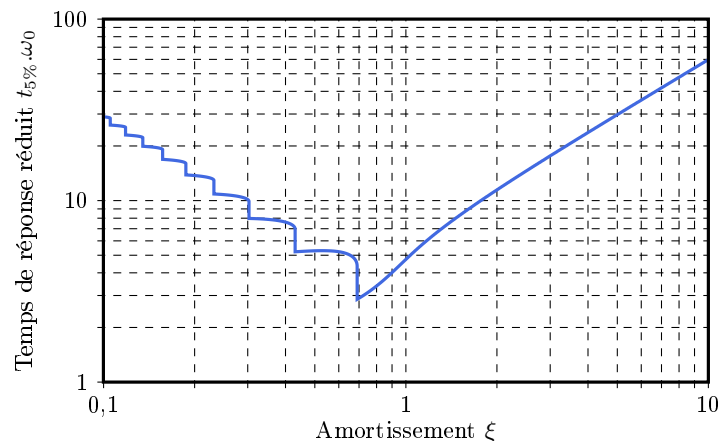


FIGURE 5 – Abaque du temps de réponse réduit

1.2.3 Dans le domaine fréquentiel

La rapidité d'un système dans le domaine fréquentiel est définie par la **bande passante** (à -3 dB, très souvent utilisée).

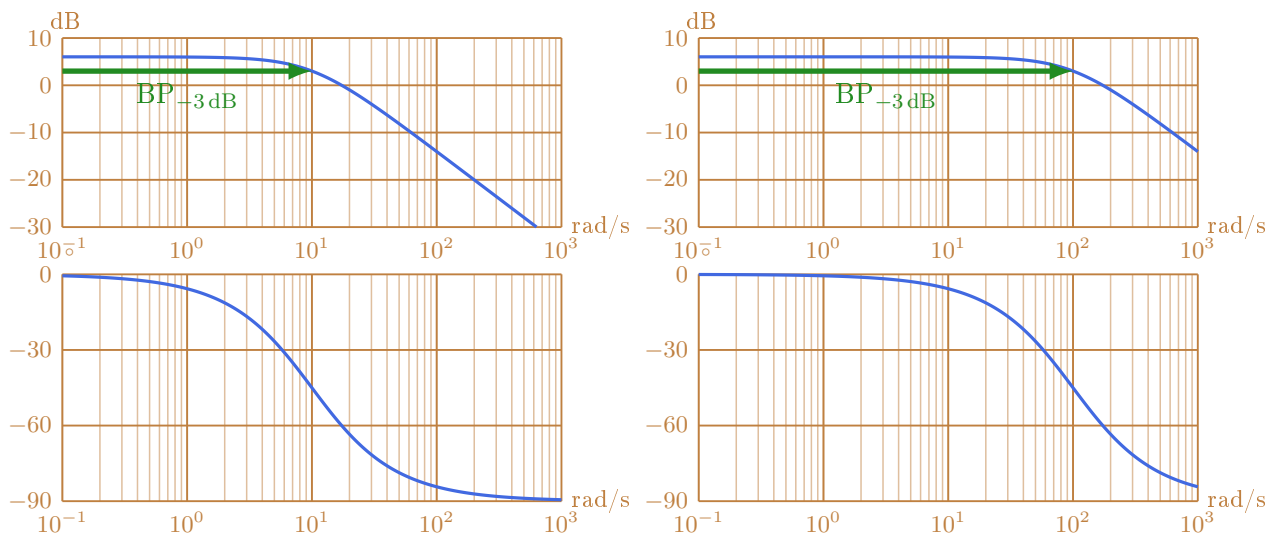


FIGURE 6 – Système lent (à gauche) et rapide (à droite) dans le domaine fréquentiel

1.3 Précision

La précision permet de caractériser si le système réalise bien l'effet souhaité. Pour cela on peut quantifier l'**erreur** $\varepsilon(t)$. Pour un système d'entrée de consigne $e_c(t)$ et de sortie $s(t)$, l'erreur est définie par $\varepsilon(t) = e_c(t) - s(t)$.

L'**écart** $\epsilon(t)$ permet de caractériser la différence entre la consigne adaptée (par un bloc adaptateur par exemple) $e(t)$ et la mesure réalisée par un capteur $m(t)$. Il est défini par $\epsilon(t) = e(t) - m(t)$. C'est cet écart qui « entre » dans le bloc correcteur.

1.3.1 Dans le domaine temporel

Dans le domaine temporel, généralement, seule l'erreur est déterminable.



À retenir Erreur statique

On appelle erreur statique, notée ε_S , la différence entre la sortie et l'entrée de consigne, lorsque le temps tend vers l'infini, pour une entrée de consigne du type échelon. On a alors :

$$\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_S(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e_c(t) - s(t)$$



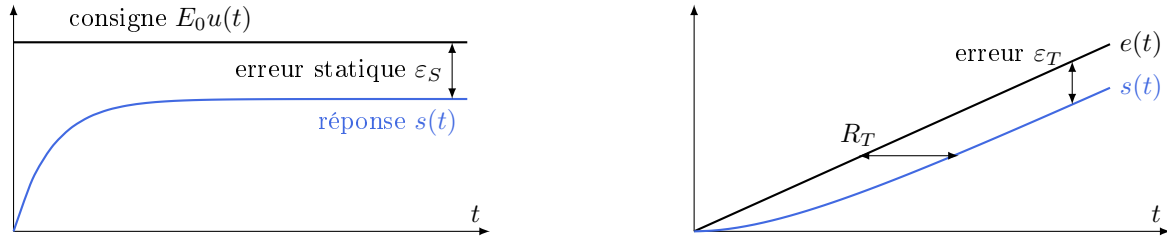
À retenir Erreur de traînage

On appelle erreur de traînage, notée ε_T , la différence entre la sortie et l'entrée de consigne, lorsque le temps tend vers l'infini, pour une entrée de consigne du type rampe. On a alors :

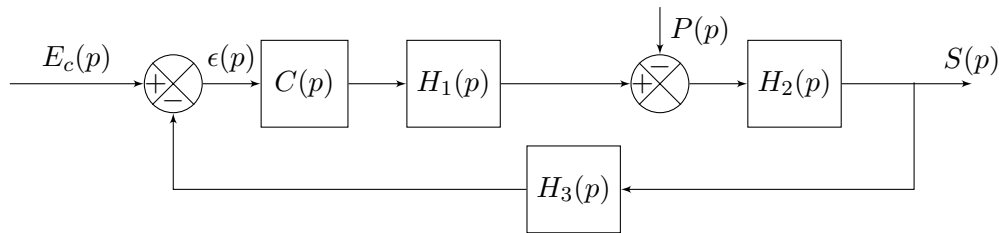
$$\varepsilon_T = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_T(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e_c(t) - s(t)$$

**Définition** *Retard de traînage*

On appelle retard de traînage R_T , la durée entre 2 instants définis par une même valeur de l'entrée et de la sortie, dans le cas d'une entrée de consigne du type rampe.

FIGURE 7 – Erreur statique ε_S , erreur de traînage (ou de poursuite) ε_T et retard de traînage R_T **1.3.2 Dans le domaine de Laplace**

Considérons un système asservi modélisé par le schéma fonctionnel suivant :

FIGURE 8 – Schéma-blocs d'un système avec perturbation et $C(p) = 1$

Expression de $\varepsilon(p)$:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(p) &= E_c(p) - R(p) = E_c(p) - H_3(p) \cdot H_2(p) [H_1(p) \cdot \varepsilon(p) - P(p)] \\
 &= E_c(p) - H_3(p) \cdot H_2(p) \cdot H_1(p) \cdot \varepsilon(p) + H_3(p) \cdot H_2(p) \cdot P(p) \\
 &= E_c(p) - H_{BO}(p) \cdot \varepsilon(p) + H_3(p) \cdot H_2(p) \cdot P(p) \\
 \Rightarrow \varepsilon(p) &= \frac{1}{1 + H_{BO}(p)} E_c(p) + \frac{H_3(p) \cdot H_2(p)}{1 + H_{BO}(p)} P(p) \\
 &= \frac{1}{1 + H_{BO}(p)} E_c(p) + \frac{1}{H_1(p)} \cdot \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} P(p) \\
 \Rightarrow \varepsilon(p) &= \varepsilon_{\text{ent.}}(p) + \varepsilon_{\text{pert.}}(p)
 \end{aligned}$$

L'écart éventuel $\varepsilon(t)$ est alors la somme de deux écarts élémentaires, l'un dû à l'entrée principale, l'autre à la perturbation : $\varepsilon(t) = \varepsilon_{\text{ent.}}(t) + \varepsilon_{\text{pert.}}(t)$.

Si le système est stable on peut donc appliquer le théorème de la valeur finale et en déduire l'écart en régime permanent :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot \varepsilon_{\text{ent.}}(p) + \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot \varepsilon_{\text{pert.}}(p)$$

Par la suite on pose :

$$H_{BO}(p) = \frac{K_{BO}}{p^\alpha} \frac{N(p)}{D(p)} \quad \text{avec} \quad N(0) = D(0) = 1$$

Caractérisation de la précision pour différentes entrées :

On a :

$$\varepsilon_{\text{ent}}(p) = \frac{E_c(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K_{BO} \cdot N(p)} \cdot E_c(p)$$

Écart statique ε_s (Entrée échelon) :

On rappelle que l'écart statique ou écart indiciel ou encore écart de position ε_s comme l'écart en régime permanent pour une entrée échelon $e(t) = E_0 \cdot u(t)$.

$$E(p) = \frac{E_0}{p} \text{ et } \varepsilon_{\text{ent}}(p) = \frac{E_0 \cdot p^{\alpha-1} \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K_{BO} \cdot N(p)}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_{\text{ent}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon_{\text{ent}}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0 \cdot p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K_{BO} \cdot N(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0 \cdot p^\alpha}{p^\alpha + K_{BO}}$$

La valeur de ε_s est donc fonction de la classe de la FTBO :

- Si $\alpha = 0$ (BO sans intégration), alors : $\varepsilon_s = \frac{E_0}{1 + K_{BO}}$;
- Si $\alpha \geq 1$ (au moins une intégration dans la BO), alors : $\varepsilon_s = 0$.

Ecart de poursuite ε_p (Entrée rampe) :

Encore appelé écart de trainage ε_T ou écart de vitesse ε_v .

L'entrée est ici une rampe $e(t) = E_0 \cdot t \cdot u(t)$, soit : $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$.

$$\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_{\text{ent}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon_{\text{ent}}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0 \cdot p^\alpha}{p(p^\alpha + K_{BO})}$$

- Si $\alpha = 0$ (BO sans intégration), alors : $\varepsilon_p = \infty$;
- Si $\alpha = 1$ (une seule intégration dans la BO), alors : $\varepsilon_p = \frac{E_0}{K_{BO}}$;
- Si $\alpha \geq 2$ (au moins deux intégrations dans la BO), alors : $\varepsilon_p = 0$.

L'écart de poursuite est proportionnel à la pente E_0 de l'entrée rampe et décroît quand le gain statique K_{BO} de la boucle ouverte croît.

Écart d'accélération ε_a (Entrée parabolique) :

L'entrée est ici parabolique $e(t) = \frac{1}{2} \cdot E_0 \cdot t^2 \cdot u(t)$, soit $E(p) = \frac{E_0}{p^3} \Rightarrow \varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0 \cdot p^\alpha}{p^2(p^\alpha + K_{BO})}$.

- Si $\alpha < 2$ (moins de deux intégrations dans la BO), alors : $\varepsilon_a = \infty$;
- Si $\alpha = 2$ (deux intégrations dans la BO), alors : $\varepsilon_a = \frac{E_0}{K_{BO}}$;
- Si $\alpha \geq 3$ (au moins trois intégrations dans la BO), alors : $\varepsilon_a = 0$.

**À retenir (Tableau 9)**

- Il faut, au moins, une intégration dans la B.O. pour annuler l'écart statique ;
- Il faut, au moins, deux intégrations dans la B.O. pour annuler l'écart de poursuite ;
- L'écart diminue quand le gain statique K_{BO} de la B.O. croît.

Le tableau ci-dessous (Tableau 9) regroupe l'ensemble des résultats qui peuvent être utilisés directement, sans nécessité de réutiliser le TVF :

	Impulsion	Échelon	Rampe	Parabole
$E(p)$	1	$\frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{p^2}$	$\frac{E_0}{p^3}$
$\alpha_{BO} = 0$	0 (précis)	$\frac{E_0}{1 + K_{BO}}$	∞ (divergent)	∞ (divergent)
$\alpha_{BO} = 1$	0 (précis)	0 (précis)	$\frac{E_0}{K_{BO}}$	∞ (divergent)
$\alpha_{BO} = 2$	0 (précis)	0 (précis)	0 (précis)	$\frac{E_0}{K_{BO}}$
E.statique (ϵ_S) E.de trainage(ϵ_T) E.d'accélération(ϵ_A)				

FIGURE 9 – Erreur en fonction de la classe de la FTBO et du type d'entrée

Caractérisation de la précision pour différentes perturbations :

On a :

$$\varepsilon_{pert}(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon_{pert}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{H_1(p)} \cdot \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} P(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{H_1(p)} \cdot \frac{P(p)}{\left(\frac{1}{H_{BO}(p)} + 1\right)}$$

Or :

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{H_{BO}(p)}} \right) = \begin{cases} \sigma = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}} & \text{si } \alpha = 0 \\ \sigma = 1 & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Le terme $\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{H_{BO}(p)}} \right)$ tend, donc, toujours vers une valeur finie σ qu'il y ait ou non intégration

dans la boucle ouverte, de sorte que la précision ne dépend finalement que de la transmittance $H_1(p)$ en amont de la perturbation.

Perturbation impulsionnelle :

$$P(t) = \delta(t) \text{ Soit } P(p) = 1 \Rightarrow \varepsilon_{pert}(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon_{pert}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{H_1(p)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{H_{BO}(p)} + 1\right)} = 0$$

Dans ce cas quelle que soit la classe de $H_1(p)$ on a $\varepsilon_{pert} = 0$.

L'effet d'une perturbation impulsionnelle est donc toujours annulé.

Perturbation en échelon - écart statique $\varepsilon_{s(pert)}$:

La perturbation est un échelon $p(t) = P_0 \cdot u(t)$, soit :

$$P(p) = \frac{P_0}{p} \Rightarrow \varepsilon_{s(pert)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{H_1(p)} \cdot \frac{P_0}{\left(\frac{1}{H_{BO}(p)} + 1\right)}.$$

On pose $H_1(p) = \frac{K_{H_1}}{p^{\alpha_{H_1}}} \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$ avec $N_1(0) = D_1(0) = 1$.

- Si $H_1(p)$ est de classe $\alpha_{H_1} = 0$, alors $\varepsilon_{s(pert)} = \frac{P_0 \cdot \sigma}{K_{H_1}}$;
- Si $H_1(p)$ est de classe $\alpha_{H_1} \geq 1$, alors $\varepsilon_{s(pert)} = 0$.

L'écart engendré par une perturbation de type échelon est nul si la transmittance de la partie amont $H_1(p)$ possède au moins une intégration ($\alpha_{H_1} \geq 1$).

Perturbation en rampe. Écart de trainage $\varepsilon_{T(pert.)}$:

La perturbation est ici une rampe $p(t) = P_0 \cdot t \cdot u(t)$, soit : $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$.

$$\Rightarrow \varepsilon_{T(pert.)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p \cdot H_1(p)} \cdot \frac{P_0}{\left(\frac{1}{H_{BO}(p)} + 1\right)}$$

Il en résulte que :

- Si $\alpha_{H_1} = 0$, alors $\varepsilon_{T(pert.)} = \infty$;
- Si $\alpha_{H_1} = 1$, alors $\varepsilon_{T(pert.)} = \frac{P_0 \cdot \sigma}{K_{H_1}}$;
- Si $\alpha_{H_1} \geq 2$, alors $\varepsilon_{T(pert.)} = 0$.



À retenir (Tableau 10)

On retrouve les mêmes conclusions que pour l'écart vis-vis de l'entrée principale sauf qu'au lieu de raisonner sur la classe de la boucle ouverte on raisonne uniquement sur la classe de l'amont de la perturbation.

Pour pouvoir effacer les effets d'une perturbation de type $P(p) = P_0/p^i$, un système doit comporter au moins " i " intégrateurs placés en amont du point d'injection de la perturbation.

Le tableau ci-dessous (Tableau 10) regroupe l'ensemble des résultats qui peuvent être utilisés directement :

	Échelon	Rampe	Parabole
$E(p)$	$\frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{p^2}$	$\frac{E_0}{p^3}$
$\alpha_{H_1} = 0$	$\frac{E_0 \cdot \sigma}{1 + K_{H_1}}$	∞ (divergent)	∞ (divergent)
$\alpha_{H_1} = 1$	0 (précis)	$\frac{E_0 \cdot \sigma}{K_{H_1}}$	∞ (divergent)
$\alpha_{H_1} = 2$	0 (précis)	0 (précis)	$\frac{E_0 \cdot \sigma}{K_{H_1}}$

FIGURE 10 – Erreur en fonction de la classe de $H_1(p)$ et du type de perturbation

2 Amélioration des performances des SLCI (Système idéal - compromis sur les performances)

Le **système idéal** est un système dont les performances sont, **une très grande stabilité**, un système **extrêmement rapide**, et **précis**, quelque soit l'entrée (de consigne et/ou de perturbation). Malheureusement, ce système **n'existe pas**, et des compromis entre les 3 performances sont nécessaires. Celles-ci sont répertoriées dans le diagramme des exigences ou dans un cahier des charges fonctionnel.

Afin d'**améliorer** certaines performances des systèmes, on place un bloc **Correcteur** (FIGURE 11) permettant de « corriger » les défauts de performances. Celui-ci doit être « **dimensionné** » afin de satisfaire le cahier des charges fonctionnel.

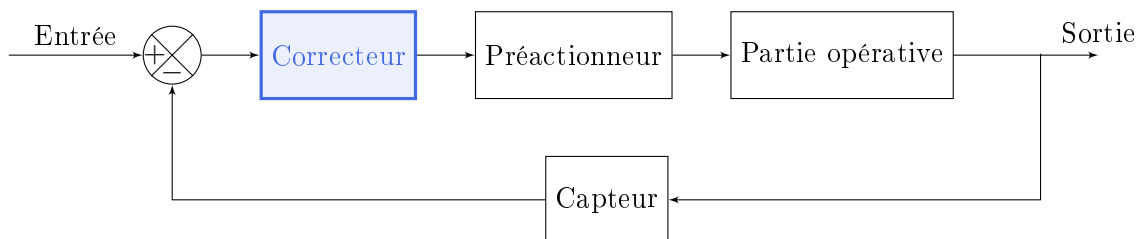


FIGURE 11 – Schéma-blocs d'un système avec bloc Correcteur

De nombreux correcteurs existent, permettant chacun d'améliorer une ou 2 performances, sans trop dégrader les autres performances. Nous tâcherons d'étudier et d'analyser l'influence des paramètres de chaque correcteur sur les performances globales du système. Les correcteurs à notre disposition sont les correcteurs du type (Programme CPGE - MPSI/MP) :

- Proportionnel (**P**) ;
- Proportionnel Intégral (**PI**) ;
- à Avance de Phase (**AP**)

3 Correction avec correcteur Proportionnel

3.1 Introduction sur la correction proportionnelle

Les correcteurs du type Proportionnel permettent d'amplifier d'un coefficient K ($K > 0$) l'écart $\varepsilon(t)$ entre la consigne et la mesure de la grandeur à asservir, tels que $u(t) = K\varepsilon(t)$ où $u(t)$ est la sortie du correcteur. Ils possèdent une fonction de transfert $C(p)$ telle que :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K$$

3.2 Influence d'une correction proportionnelle ...

3.2.1 ...sur la stabilité

Le domaine le plus approprié pour analyser l'influence d'un correcteur Proportionnel sur la stabilité est le **domaine fréquentiel**.

Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ tel que $H_{BO}(p) = KG(p)$. On donne sur la FIGURE 12 les diagrammes de Bode de $H_{BO}(p)$ pour différentes valeurs de K .

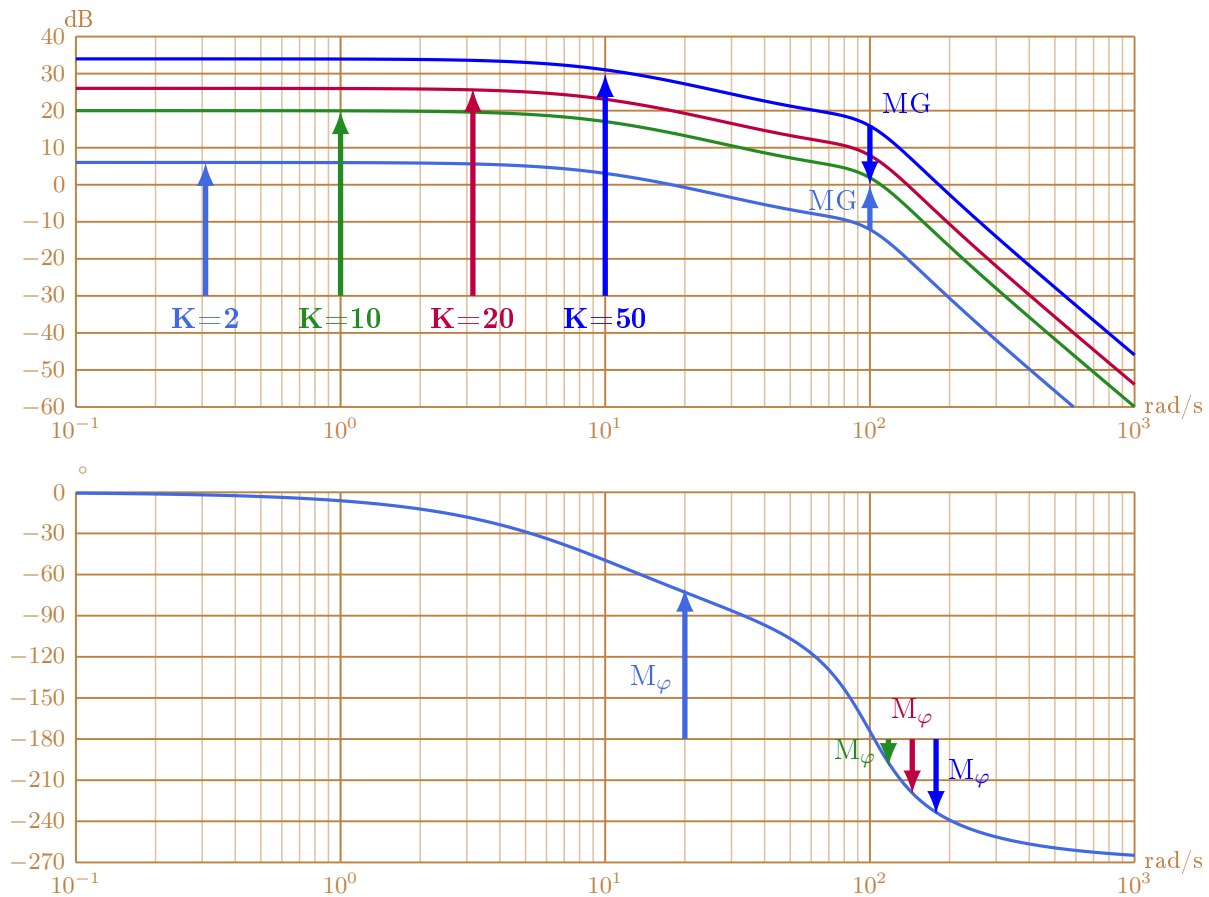


FIGURE 12 – Influence d'un correcteur Proportionnel sur la stabilité (lieu de Bode)

On remarque que la valeur de K permet une translation verticale du gain, sans modifier la courbe de la phase de la FTBO. Cette translation a pour conséquence de diminuer la marge de phase M_φ et la marge de gain MG ($K > 1$), donc à **déstabiliser** le système en boucle fermée.

Cette valeur du correcteur K est généralement déterminée afin de satisfaire un critère de marge de phase du cahier des charges.

3.2.2 ...sur la rapidité

Le domaine le plus approprié pour analyser l'influence d'un correcteur Proportionnel sur la rapidité est le **domaine de Laplace**.

Considérons deux systèmes définis par les fonctions de transfert en boucle ouverte :

$$H_1(p) = \frac{K_0}{1 + \tau p} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{K_0}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

Leurs fonctions de transfert en boucle fermée à retour unitaire, notées respectivement $H_{F1}(p)$ et

$H_{F2}(p)$ s'écrivent, dans le cadre d'un correcteur Proportionnel d'amplification K :

$$H_{F1}(p) = \frac{KH_1(p)}{1 + KH_1(p)} = \frac{KK_0}{1 + KK_0} \frac{1}{1 + \frac{\tau}{1 + KK_0}p} = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF}p} \quad \text{avec} \quad \tau_{BF} = \frac{\tau}{1 + KK_0}$$

$$H_{F2}(p) = \frac{KH_2(p)}{1 + KH_2(p)} = \frac{KK_0}{1 + KK_0} \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0(1 + KK_0)}p + \frac{p^2}{\omega_0^2(1 + KK_0)}} = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$$

On remarque immédiatement que pour le système du premier ordre (H_{F1}), la constante de temps τ_{BF} est inférieure à τ , ce qui permet d'affirmer que le système en boucle fermée est plus rapide. De plus, plus la valeur de K est grande, plus le système en boucle fermée sera rapide.

En ce qui concerne le système du second ordre (H_{F2}), l'analyse est plus complexe, car bien que ω_{0BF} augmente, le coefficient d'amortissement ξ_{BF} diminue, pouvant provoquer des oscillations importantes. Il est alors nécessaire d'utiliser l'abaque du temps de réponse réduit ($t_{5\%} \cdot \omega_0$) pour déterminer précisément la rapidité du système.

3.2.3 ...sur la précision

Le domaine le plus approprié pour analyser l'influence d'un correcteur Proportionnel sur la précision est le **domaine de Laplace**.

Reprenons les 2 systèmes en boucle ouverte précédents, placés en boucle fermée par un retour unitaire et un correcteur Proportionnel d'amplification K (>0). L'entrée de consigne est notée $E_c(p)$ et la sortie $S(p)$. Le critère permettant de caractériser la précision est l'erreur statique ε_S ou de traînage ε_T , déterminée à partir du TVF (on suppose que les systèmes en boucle fermée sont stables).

On obtient alors pour une entrée échelon d'amplitude E_0 et pour une entrée rampe :

$$\varepsilon_{1S} = \varepsilon_{2S} = \frac{E_0}{1 + KK_0} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{1T} = \varepsilon_{2T} = +\infty$$

On constate immédiatement que l'erreur statique pour une entrée échelon est non nulle, mais qu'il est possible de la limiter en agissant sur K . Cependant, l'erreur de traînage n'est pas réglable par action sur K .

3.3 Conclusion sur l'action proportionnelle



À retenir Réglage de la correction proportionnelle vis-à-vis d'une précision imposée

Pour régler le correcteur proportionnel vis-à-vis d'une précision imposée, il faut déterminer le gain de boucle K_{BO} de la FTBO permettant d'obtenir l'erreur désirée et en déduire la valeur du gain K du correcteur proportionnel à partir de K_{BO}



À retenir Réglage de la correction proportionnelle vis-à-vis d'une performance en rapidité imposée

Pour régler le correcteur proportionnel vis-à-vis d'une performance en rapidité imposée, il faut déterminer le gain de boucle K_{BO} de la FTBO permettant d'obtenir la performance en rapidité imposée et en déduire la valeur du gain K du correcteur proportionnel à partir de K_{BO} .



À retenir Réglage de la correction proportionnelle vis-à-vis de marges de stabilité imposées

On trace le lieu de la FTBO pour $K = 1$ puis on translate la courbe en gain verticalement de manière à obtenir la marge de phase et/ou la marge de gain adéquate.

La mesure de la translation donne la valeur de K en dB soit : $T_{dB} = 20\log K$ donc : $K = 10^{\frac{T_{dB}}{20}}$, Voir La FIGURE 13

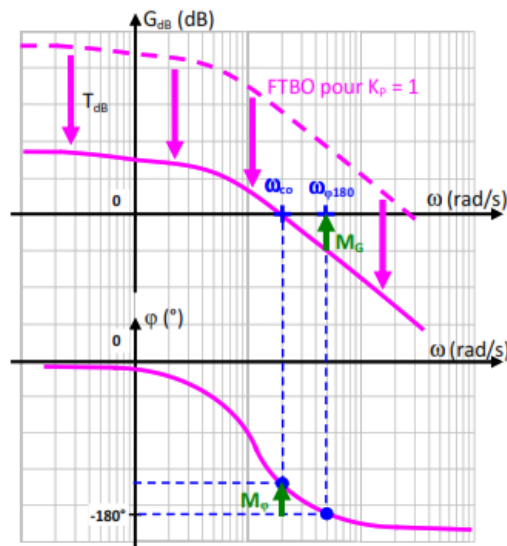


FIGURE 13 – Réglage de la correction proportionnelle vis-à-vis de marges de stabilité imposées



À retenir Correcteur Proportionnel

Un correcteur Proportionnel :

- peut permettre d'améliorer la rapidité d'un système ;
- permet de translater verticalement le diagramme de Bode du gain sans modifier la phase ;
- déstabilise le système en diminuant la marge de phase notamment ;
- permet d'améliorer la précision en terme d'erreur statique si celle-ci n'était pas déjà assurée.

4 Correction avec correcteur Proportionnel Intégral

4.1 Introduction sur la correction intégrale

Les correcteurs du type Proportionnel Intégral permettent d'amplifier d'un coefficient K_i ($K_i > 0$) l'écart $\varepsilon(t)$ entre la consigne et la mesure de la grandeur à asservir et de l'intégrer dans le domaine

temporel, tel que $u(t) = K_I \varepsilon(t) + \frac{K_I}{T_I} \int_0^t \varepsilon(y) dy$ où $u(t)$ est la sortie du correcteur. T_I est appelée constante de temps d'intégration. Ils possèdent une fonction de transfert $C(p)$ telle que :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_I \left(1 + \frac{1}{T_I p} \right)$$

Le diagramme de Bode d'un correcteur Proportionnel Intégral est fourni sur la FIGURE 14.

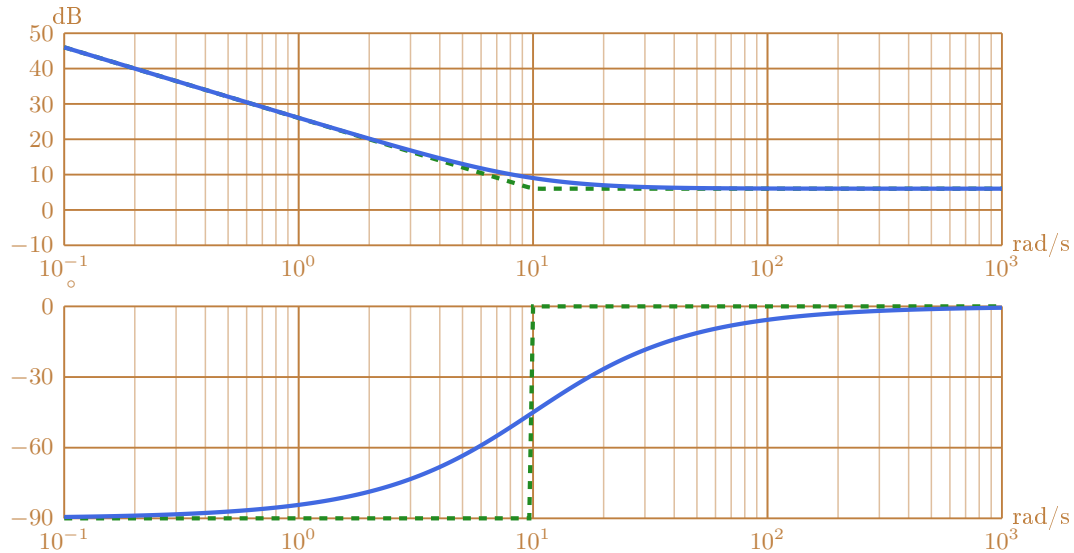


FIGURE 14 – Diagramme de Bode d'un correcteur Proportionnel Intégral

Un correcteur Proportionnel Intégral permet d'augmenter le gain pour les faibles pulsations, et introduit une phase de -90° aux basses pulsations.

4.2 Influence d'une correction intégrale ...

4.2.1 ...sur la stabilité

Le domaine le plus approprié pour analyser l'influence d'un correcteur Proportionnel Intégral sur la stabilité est le **domaine fréquentiel**.

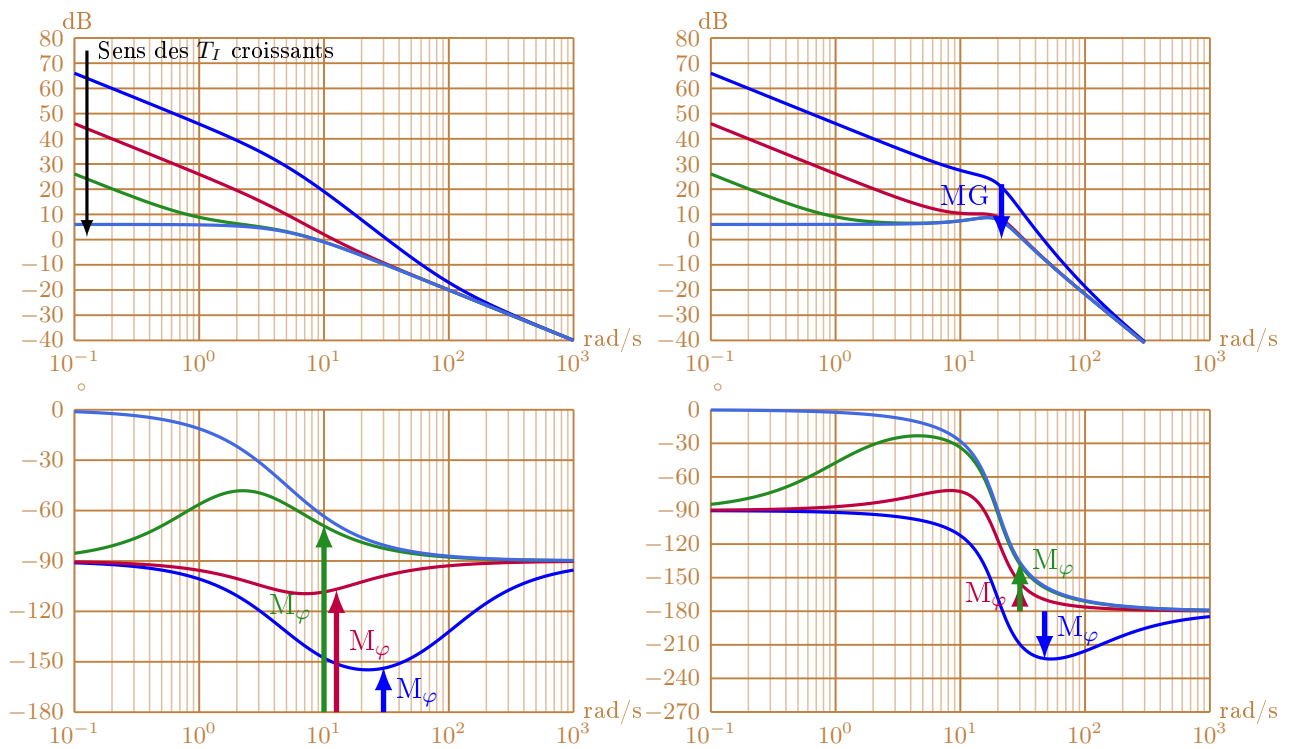
Considérons deux systèmes définis par les fonctions de transfert en boucle ouverte :

$$H_1(p) = \frac{K_0}{1 + \tau p} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{K_0}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

Soit le correcteur de fonction de transfert : $C(p) = K_I \left(1 + \frac{1}{T_I p} \right)$

En fixant une valeur de K_I , les diagrammes de Bode des boucles ouvertes avec un correcteur Proportionnel Intégral sont fournis sur la FIGURE 15 (1^{er} ordre à gauche, 2^e ordre à droite).

On remarque rapidement que la marge de phase est diminuée dans tous les cas, ce qui a tendance à déstabiliser le système en boucle fermée. Dans le cas des systèmes d'ordre supérieur ou égal à 2 en

FIGURE 15 – Influence d'un correcteur PI sur le diagramme de Bode de la boucle ouverte à K_I fixé

boucle ouverte, un risque d'instabilité existe en boucle fermée. Le réglage de la partie proportionnelle du correcteur (K_I) doit permettre de s'assurer de la stabilité, en réglant les marges de phase et de gain, lorsque la constante de temps d'intégration T_I est fixée.

4.2.2 ...sur la rapidité

Il est impossible de conclure simplement sur l'influence d'un correcteur Proportionnel Intégral sur la performance de rapidité.

Considérons un système en boucle ouverte du premier ordre et un correcteur tels que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K_0}{1 + \tau p} \quad \text{et} \quad C(p) = K_I \left(1 + \frac{1}{T_I p} \right)$$

Avec un retour unitaire, la FTBF s'écrit alors :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{C(p)H(p)}{1 + C(p)H(p)} = \frac{1 + T_I p}{1 + T_i \frac{1 + K_I K_0}{K_I K_0} p + \frac{T_I \tau}{K_I K_0} p^2}$$

Ce système est du second ordre dont le critère de rapidité est fixé par la bande passante à -3 dB, qui dépend elle-même de ω_0 . Retenons alors pour critère la valeur de ω_0 , pulsation propre du système non amortie. Celle-ci dépend des paramètres du correcteur, c'est-à-dire des valeurs prises par K_I et T_I , et s'exprime par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_I K_0}{T_I \tau}}$$

Pour une valeur de K_I fixée, on remarque que la pulsation propre du système non amortie varie inversement proportionnellement à T_I . Cela signifie que plus T_I est grand, plus le système est lent. L'analyse est cependant plus difficile, car il faut étudier le temps de réponse réduit pour caractériser précisément la rapidité du système en boucle fermée.

On retiendra cependant qu'un correcteur Proportionnel Intégral a **tendance à ralentir le système** en boucle fermée, mais que la partie proportionnelle (K_I bien choisie) peut permettre de le « ré-accélérer ».

4.2.3 ...sur la précision

La précision d'un système dépend à la fois de son entrée principale (entrée de consigne) $E_c(p)$, mais aussi de l'éventuelle perturbation ($P(p)$). Afin de caractériser la précision, il est donc nécessaire d'analyser celles-ci séparément. Ceci est bien évidemment rendu possible, du fait de la linéarité des systèmes étudiées.

On considère le schéma-blocs de la FIGURE 16 où $C(p)$ est la fonction de transfert du correcteur Proportionnel Intégral tel que : $C(p) = K_I \left(1 + \frac{1}{T_I p} \right)$.

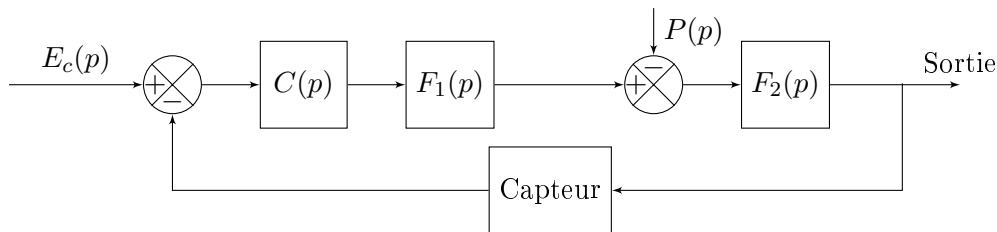


FIGURE 16 – Schéma-blocs d'un système avec bloc correcteur et perturbation

Dans le cadre de cette étude, on considère que la FTBO du système non corrigée ($C(p) = 1$) s'écrit sous la forme générale telle que :

$$\text{FTBO}_{nc}(p) = F_1(p)F_2(p) = \frac{K_0}{p^\alpha} \frac{N(p)}{D(p)} \text{ avec } N(0) = D(0) = 1$$

où α est la classe de la FTBO non corrigée.

Étude en présence de la consigne seule : On considère l'absence de perturbation.

La FTBF s'écrit alors dans ces conditions (avec retour unitaire) :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{S(p)}{E_c(p)} = \frac{C(p)\text{FTBO}_{nc}(p)}{1 + C(p)\text{FTBO}_{nc}(p)} = \frac{K_i K_0 N(p)(1 + T_i p)}{T_i p^{\alpha+1} D(p) + K_i K_0 N(p)(1 + T_i p)}$$

Déterminons l'erreur statique ε_S dans le cadre d'une entrée de consigne du type échelon d'amplitude E_0 .

$$\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_S(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p(E_c(p) - S(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p(1 - \text{FTBF}(p))E_c(p) = 0 \quad \forall \alpha$$

Cela signifie que quelque soit la classe de $\text{FTBO}_{nc}(p)$, l'erreur statique est nulle.

Déterminons l'erreur de traînage ε_T dans le cadre d'une entrée de consigne du type rampe de pente a_0 .

$$\varepsilon_T = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_T(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_T(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p(\text{FTBF}(p) - 1)E_c(p) = \begin{cases} \frac{K_i K_0 a_0}{1 + K_i K_0} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Cela signifie que si la classe de $\text{FTBO}_{nc}(p)$ est nulle alors l'erreur de traînage est bornée, sinon dans les autres cas ($\alpha \geq 1$), l'erreur de traînage est nulle.



À retenir

Si la FTBO est de classe 1, alors le système en boucle fermée possède un écart statique nul pour une entrée de consigne du type échelon et l'écart de traînage est borné.

Étude avec perturbation : On considère l'entrée de consigne nulle.

Supposons que le ou les intégrateurs purs soient dans $F_1(p)$ et aucun dans $F_2(p)$. Posons $G_1(p) = C(p)F_1(p)$ telle que :

$$G_1(p) = \frac{K_1 N_1(p)}{p^\alpha D_1(p)} \quad \text{et} \quad F_2(p) = K_2 \frac{N_2(p)}{D_2(p)} \quad \text{avec} \quad N_1(0) = D_1(0) = N_2(0) = D_2(0) = 1$$

La fonction de transfert en régulation $F_R(p)$ est telle que :

$$F_R(p) = \frac{S(p)}{P(p)} = -\frac{F_2(p)}{1 + G_1(p)F_2(p)}$$

La valeur finale de la sortie pour une entrée échelon de la perturbation $P(p)$ d'amplitude P_0 vaut :

$$S = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \text{FTBF}(p)P(p) = \begin{cases} -\frac{K_1 K_2 P_0}{K_1 K_2 + 1} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$



À retenir

Si la FTBO est de classe 1, et que cet intégrateur est placé en amont (avant) de la perturbation du type échelon, alors le système **rejette** cette perturbation.

4.3 Conclusion sur l'action intégrale



À retenir Réglage de la correction proportionnelle intégrale

On choisit le coefficient K_I de façon à obtenir la marge de phase désirée avec correction P correction proportionnelle seule.

La mesure de la translation donne la valeur de K_I en dB soit : $T_{dB} = 20 \log K_I$ alors : $K_I = 10^{\frac{T_{dB}}{20}}$. On met ensuite en place l'effet intégral mais cela ne doit pas (ou peu) modifier le réglage effectué à la pulsation ω_{rglage} . Il faut donc prendre une constante de temps T_I tel que $\frac{1}{T_I} \ll \omega_{rglage}$. On prend

en générale : $T_I = \frac{10}{\omega_{r\grave{e}glage}}$.(Voir La FIGURE 17)

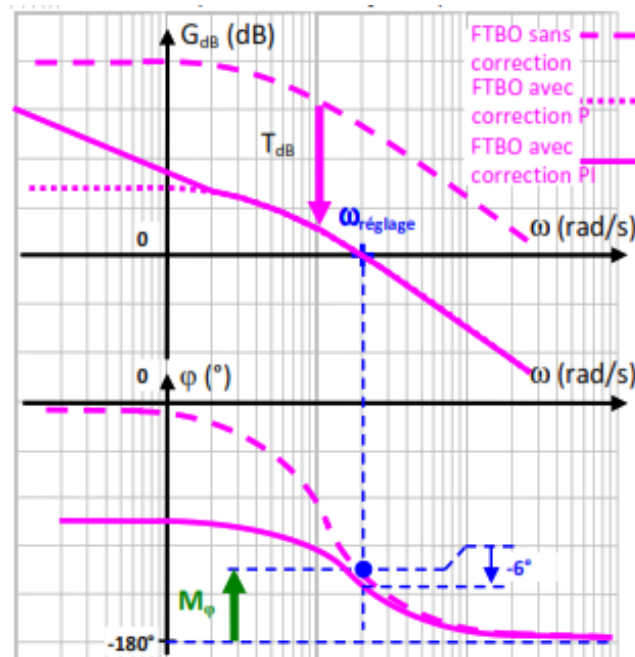


FIGURE 17 – Réglage de la correction proportionnelle intégrale



À retenir *Correcteur Proportionnel Intégral*

Un correcteur Proportionnel Intégral :

- détériore la rapidité d'un système, mais peut être réglée en agissant sur K_I ;
- déstabilise le système en diminuant la marge de phase notamment, ce qui peut rendre le système instable ;
- permet d'annuler l'écart statique dans le cas d'une entrée échelon de la consigne si celui-ci n'était pas déjà assuré (FTBO de classe ≥ 1) ;
- permet de rejeter une perturbation du type échelon lorsque l'intégrateur est placé en amont (avant) la perturbation, si celle-ci n'était pas déjà assurée.

5 Correction avec Avance de Phase

5.1 Introduction sur la correction avec avance de phase

Le correcteur à Avance de Phase est caractérisé par la fonction de transfert : $C_{AP}(p)$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{AP}(p) = K_P \frac{1 + aTp}{1 + Tp} \quad \text{avec } a > 1 \\ C_{AP}(p) = K_P \frac{1 + Tp}{1 + aTp} \quad \text{avec } a < 1 \end{array} \right.$$

Le diagramme de Bode de ce correcteur est représenté sur la FIGURE 19.

Avance de phase	
Gain max	$20 \log aK_P$
Pulsation à phase max	$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$
Gain à ω_m	$10 \log aK_P^2$
Phase max	$\sin \varphi_{max} = \frac{a-1}{a+1}$

FIGURE 18 – Propriétés remarquables de la réponse fréquentielle du correcteur AP

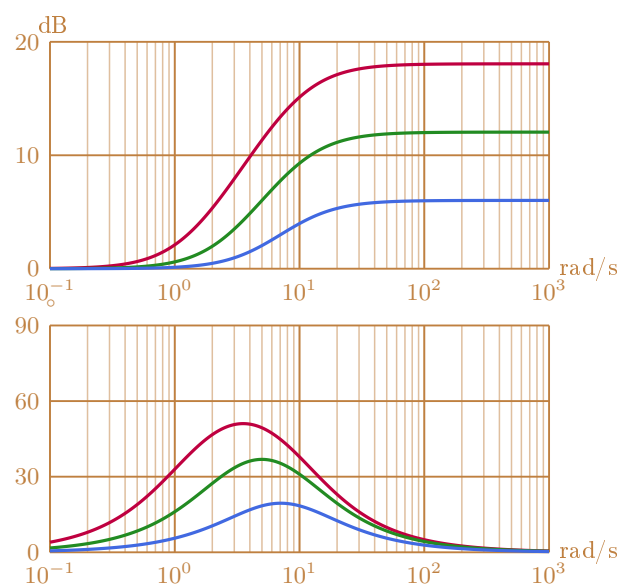


FIGURE 19 – Diagrammes de Bode du correcteur à Avance de Phase en fonction de a

5.2 Influence d'une correction avec avance de phase ...

5.2.1 ...sur la stabilité

Le correcteur à Avance de Phase permet de « remonter » localement, autour de ω_m , la phase de la FTBO. Par conséquent, il améliore la stabilité de la boucle fermée en augmentant la marge de phase (FIGURE 20).

5.2.2 ...sur la rapidité

Les correcteurs de type à avance de phase n'ont que peu d'influence sur la rapidité. Seul le paramètre K_P peut parfois permettre de régler la rapidité de la boucle fermée.

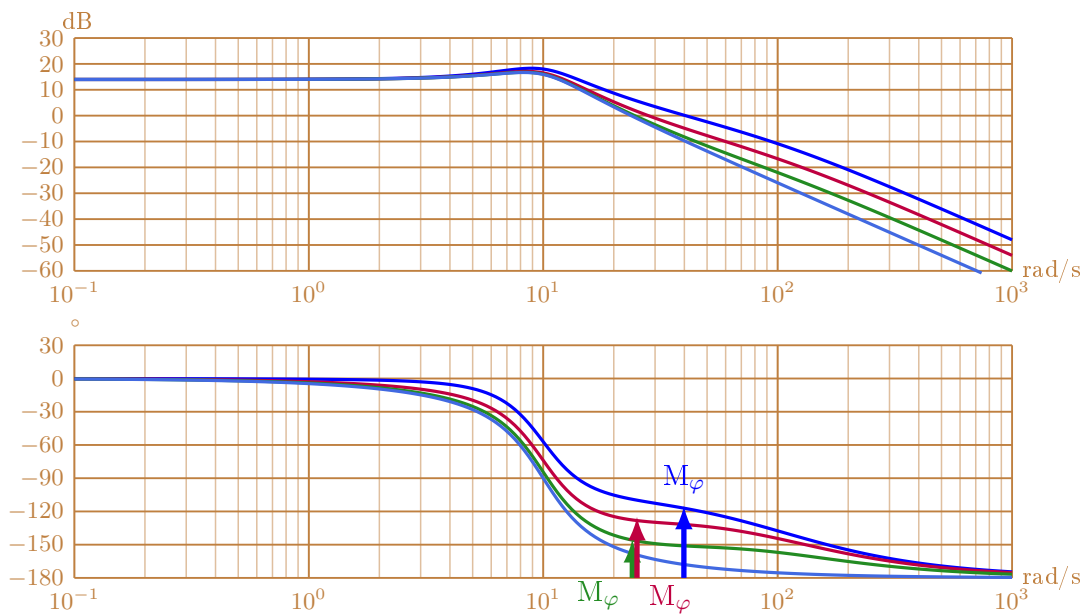


FIGURE 20 – Influence d'un correcteur à Avance de Phase sur la stabilité (plan de Bode)

5.2.3 ...sur la précision

De la même façon que pour la rapidité, les correcteurs à avance de phase n'ont que peu d'influence sur la précision. Seul le paramètre K_P peut parfois permettre de régler la précision de la boucle fermée.

5.3 Conclusion sur l'action avance de phase



À retenir Réglage du correcteur à avance de phase

- On ajuste ω_m de manière à ce qu'elle corresponde à la pulsation de coupure de la FTBO corrigée ω_{0dB} . Cette pulsation correspond au critère de rapidité du cahier des charges. Si cette pulsation n'est pas imposée, on choisit usuellement la pulsation pour laquelle on souhaite l'apport maximal de phase.
- La marge de phase imposée $M_{\varphi_c} = 45 = \varphi(\omega_{0dBc}) + 180 + \varphi_m$ On en déduit φ_m et donc
$$a = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \phi_m}.$$
- On conclue enfin $T = \frac{1}{\omega_{0dB} \sqrt{a}}$
- On détermine K pour assurer $\varphi_m = \varphi_{0dBc}$.



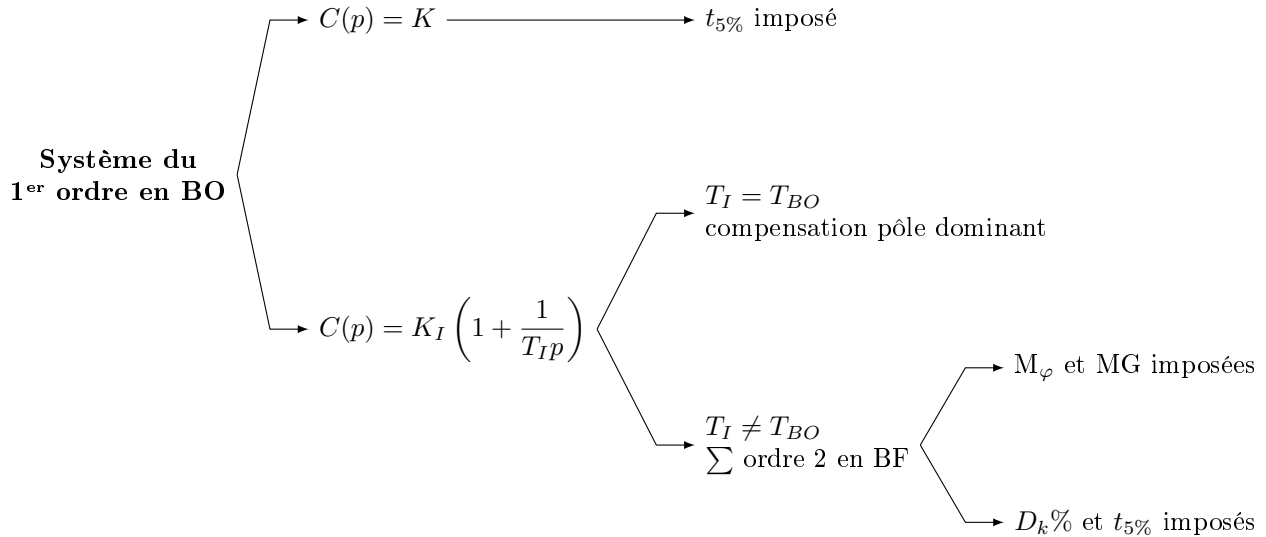
À retenir Correcteur à Avance de phase

Un correcteur à Avance de phase :

- modifie peu la rapidité du système en boucle fermée ;
- améliore la stabilité du système en boucle fermée en modifiant la marge de phase ;
- modifie peu la précision.

6 Critères de détermination des paramètres d'un correcteur

6.1 Systèmes du 1^{er} ordre



6.2 Systèmes du 2^e ordre

