



# OUTILS MATHÉMATIQUES ET TORSEURS

Mémo

Professeur : Y.FARTOUH

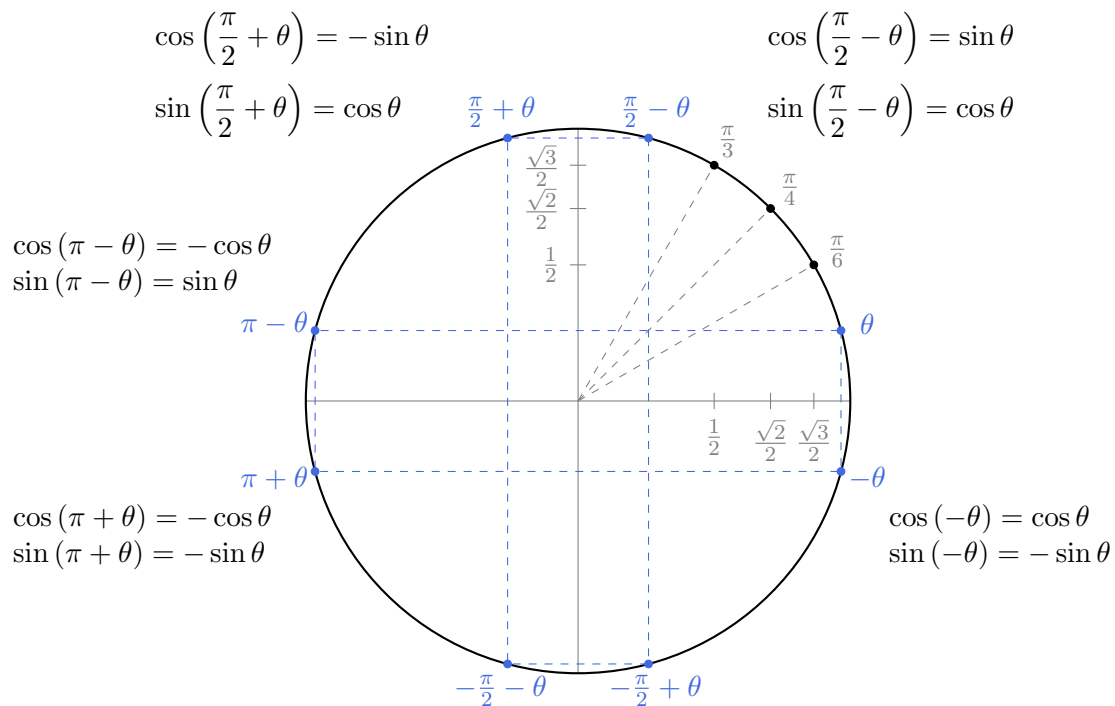
v1.4

CPGE - Lycée IBN TIMIYA - MARRAKECH

## 1 Trigonométrie

### 1.1 Cercle trigonométrique

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de déterminer rapidement les relations suivantes :



### 1.2 Relations entre cos, sin et tan

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

### 1.3 Formules d'addition

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

### 1.4 Formules de linéarisation

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{1 + \cos(2\theta)}$$

## 2 Calcul vectoriel

Les théories de la mécanique utilisent des grandeurs qui peuvent mathématiquement être représentées par des vecteurs (vitesse, position, accélération, force...). Ces vecteurs sont des éléments d'espaces vectoriels euclidiens sur  $\mathbb{R}$  de dimension 3 noté  $(E)$ . Les grandeurs vecteurs sont intrinsèques, elles sont indépendantes de la base dans laquelle elles sont représentées.

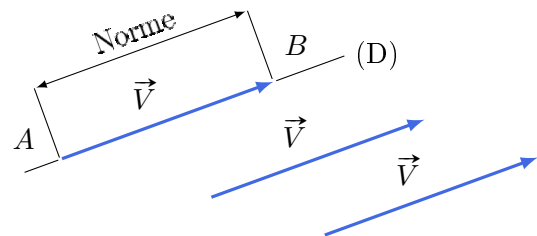
### 2.1 Définitions

Soient deux points  $A$  et  $B$ .  $(A, B)$  est appelé un bipoint. Un bipoint est défini par son origine  $A$ , son sens (de  $A$  vers  $B$ ), sa direction (droite  $(AB)$ ) et sa norme (distance de  $A$  à  $B$ ).

Un vecteur est l'ensemble des bipoints équipollents (parallèles, même sens, même norme) au bipoint  $(A, B)$ .

Pour le vecteur, on définit :

- son support : la droite  $(D) = (AB)$
- le sens : de  $A$  vers  $B$
- sa norme : la distance de  $A$  vers  $B$ , notée  $\|\vec{V}\|$ .



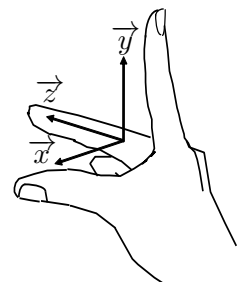
### 2.2 Repérage des vecteurs

#### 2.2.1 Base

L'association de trois vecteurs indépendants forme une base  $b$  de  $(E)$ , noté  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . Tout vecteur  $\vec{V}$  se décompose de manière unique sur cette base :

$$\vec{V} = v_x \cdot \vec{x} + v_y \cdot \vec{y} + v_z \cdot \vec{z}$$

On utilisera en Sciences de l'Ingénieur des bases orthonormées directes  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , c'est-à-dire des vecteurs orthogonaux, de même norme égale à 1. La base est directe si elle vérifie la « règle de la main droite ».



### 2.2.2 Repère

Un repère est une base vectorielle associée à un point appelé origine. En mécanique du solide, on a l'habitude d'associer un repère  $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  à chaque solide  $S_i$ .

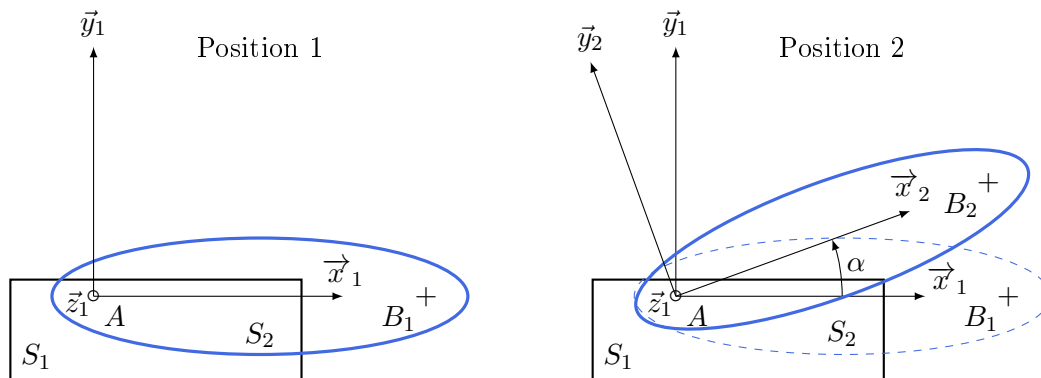


#### Remarque

En Sciences de l'Ingénieur, les notions de base et de repère sont appréciées de manière identique.

### 2.2.3 Expression d'un vecteur dans différents repères

Considérons un système de solides  $S_1$  et  $S_2$  liés par une articulation (pivot) de centre  $A$  et d'axe perpendiculaire au plan de la feuille. Considérons le point  $B$  appartenant au solide  $S_2$  à une distance  $L$  de  $A$ . Le solide  $S_1$  est fixe par rapport à la feuille. À l'instant  $t_1$  le système est en position 1, considérons le vecteur  $\overrightarrow{AB_1}$ , puis à l'instant  $t_2$  le système est en position 2, considérons le vecteur  $\overrightarrow{AB_2}$ . Pour caractériser ces deux vecteurs nous pouvons les exprimer dans une base (un repère). Le choix de la base est arbitraire, soit  $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  base orthonormé définie sur la figure en position 1 ou  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  base orthonormé définie sur la figure en position 2.



Notons  $L$  la longueur du segment  $[AB]$ . Dans la position 1, on a  $\overrightarrow{AB_1} = L\vec{x}_1$  dans le repère  $R_1$ .

Dans la position 2, on a  $\overrightarrow{AB_2} = L\vec{x}_2$  dans le repère  $R_2$ . Mais aussi  $\overrightarrow{AB_2} = L \cos \alpha \vec{x}_1 + L \sin \alpha \vec{y}_1$  dans le repère  $R_1$ .

## 2.3 Produit scalaire

### 2.3.1 Définition



#### Définition *Produit scalaire*

Le produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre**, noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  tel que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

En SII, on manipule essentiellement des vecteurs unitaires. Dans ce cas, en admettant que  $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$  :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos \theta$$

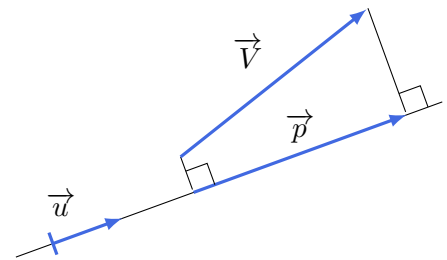
### 2.3.2 Propriétés

- Commutativité :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  ;
- Distributivité :  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  ;
- Linéarité :  $\lambda \vec{u} \cdot \mu \vec{v} = \lambda \mu (\vec{u} \cdot \vec{v})$  ;
- Si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  alors  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  ou  $\vec{u} \perp \vec{v}$  ;
- Si  $\vec{u} \parallel \vec{v}$  alors on a  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \varepsilon \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$  avec  $\varepsilon = \pm 1$  suivant l'orientation de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

### 2.3.3 Expression analytique

Dans une base orthonormée  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , on peut montrer que le produit scalaire entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est défini par la relation entre les coordonnées :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$



### 2.3.4 Interprétation géométrique

Soit  $\vec{p}$  la projection vectorielle d'un vecteur  $\vec{V}$  sur une droite de vecteur directeur  $\vec{u}$  ( unitaire ) alors :

$$\vec{p} = (\vec{V} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u}$$

## 2.4 Changement de bases

### 2.4.1 Principe

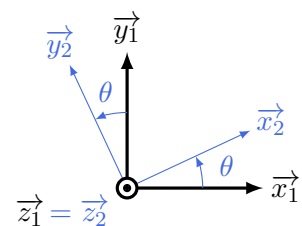
Dans la pratique, la lecture de figure spatiale étant délicate, on se ramène toujours à des figures planes. Dans la plupart des cas, le passage d'une base à une autre est réalisé par **une rotation plane**.

Pour faciliter le calcul des projections, on utilise des figures géométrales appelées aussi figures de projection ou figures de calcul ou figures de changement de bases.



#### Attention

Ces figures seront toujours réalisées avec des angles positifs proche de  $20^\circ$ , le vecteur commun aux deux bases étant perpendiculaire à la feuille toujours dirigé vers le lecteur de la figure.



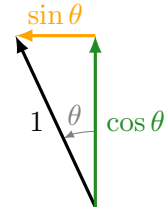
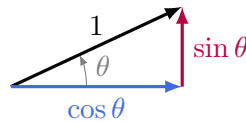
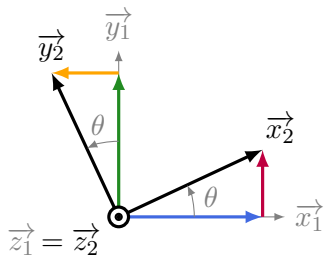
Vous devez être capables de retrouver les projections des différents vecteurs **sans hésitation** :

$$\begin{aligned} \vec{x}_2 &= \cos \theta \cdot \vec{x}_1 + \sin \theta \cdot \vec{y}_1 & \vec{y}_2 &= \cos \theta \cdot \vec{y}_1 - \sin \theta \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{x}_1 &= \cos \theta \cdot \vec{x}_2 - \sin \theta \cdot \vec{y}_2 & \vec{y}_1 &= \cos \theta \cdot \vec{y}_2 + \sin \theta \cdot \vec{x}_2 \end{aligned}$$

Pour éviter toute erreur, il est utile de vérifier ses formules de projection en  $\theta = 0$  et  $\theta = 90^\circ$ .

### 2.4.2 Astuce de calcul avec les figures planes

Quand on cherche à projeter un vecteur dans une autre base avec une figure plane, si on a bien dessiné la figure **avec un angle de 20° environ**, on voit apparaître un triangle rectangle de la forme ci-dessous, avec un « petit côté » et un « grand côté ». Comme on raisonne sur des vecteurs unitaires, l'hypoténuse est de longueur égale à 1.



$$\vec{x}_2 = \cos \theta \cdot \vec{x}_1 + \sin \theta \cdot \vec{y}_1$$

$$\vec{y}_2 = -\sin \theta \cdot \vec{x}_1 + \cos \theta \cdot \vec{y}_1$$

Il suffit alors de retenir que « **petit côté** » = **sinus** et « **grand côté** » = **cosinus**, et de raisonner sur la direction des vecteurs pour déduire le signe...

## 2.5 Produit vectoriel

### 2.5.1 Définition



#### Définition *Produit vectoriel*

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un **vecteur**, noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  tel que :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

avec  $\vec{w}$  tel que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  forme un trièdre direct.

En SII, on manipule essentiellement des vecteurs unitaires. Dans ce cas, en admettant que  $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$  :

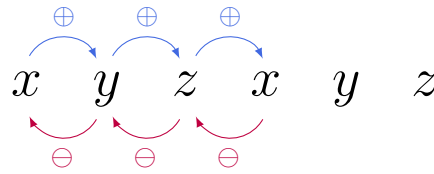
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \sin \theta \cdot \vec{w}$$

### 2.5.2 Propriétés

- Distributivité :  $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$  ;
- Linéarité :  $\lambda \cdot \vec{u} \wedge \mu \cdot \vec{v} = \lambda \mu (\vec{u} \wedge \vec{v})$  ;
- Anti-symétrie :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ .

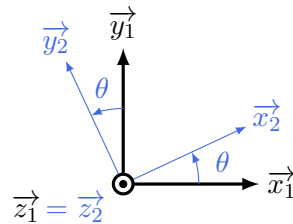
### 2.5.3 Astuce de calcul

Lorsque les 2 termes du produit vectoriel sont 2 vecteurs d'une base orthonormée directe (exemple :  $\vec{x} \wedge \vec{y}$ ), on peut facilement calculer le produit vectoriel en utilisant le moyen mnémotechnique suivant :



### 2.5.4 Encore une astuce, en utilisant les figures planes

Lorsque les 2 termes ne font pas partie de la même base (exemple :  $\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_0$ ), on peut éviter de projeter  $\vec{x}_1$  dans la base  $b_0$  en utilisant la méthode suivante, dite « méthode à 3 temps », expliquée sur les 2 exemples suivants :



$$\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_2 = ?$$

1. Pour aller de  $\vec{y}_1$  vers  $\vec{y}_2$ , on « tourne » autour de  $\vec{z}_1$  ;
2. On « tourne » dans le sens **positif** ;
3. L'angle entre les 2 est  $\theta$ .

$$\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_2 = +\sin \theta \cdot \vec{z}_1$$

$$\vec{y}_2 \wedge \vec{x}_1 = ?$$

1. Pour aller de  $\vec{y}_2$  vers  $\vec{x}_1$ , on « tourne » autour de  $\vec{z}_1$  ;
2. On « tourne » dans le sens **négatif** ;
3. L'angle entre les 2 est  $\frac{\pi}{2} + \theta$ .

$$\vec{y}_2 \wedge \vec{x}_1 = -\sin \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) \cdot \vec{z}_1 = -\cos \theta \cdot \vec{z}_1$$



#### Attention

On ne peut utiliser cette méthode que s'il existe une figure plane sur laquelle apparaissent les 2 termes du produit vectoriel. Dans le cas contraire, on n'échappera pas à des calculs de projection.

## 2.6 Produit mixte



### Définition *Produit mixte*

Le produit mixte est la quantité notée  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  et définie par :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Le produit mixte se conserve par permutation circulaire :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) \iff (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

Utiliser les propriétés du produit mixte permet parfois de simplifier spectaculairement les calculs (de dynamique, notamment...).

## 2.7 Dérivation vectorielle

### 2.7.1 Dérivation directe

Soit un vecteur  $\vec{V}$  repéré dans  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  par  $\vec{V} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$ . La dérivée temporelle de ce vecteur par rapport au repère  $R$  s'écrit :

$$\left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R = \frac{dx}{dt}.\vec{x} + x.\left[ \frac{d\vec{x}}{dt} \right]_R + \frac{dy}{dt}.\vec{y} + y.\left[ \frac{d\vec{y}}{dt} \right]_R + \frac{dz}{dt}.\vec{z} + z.\left[ \frac{d\vec{z}}{dt} \right]_R$$

Les vecteurs  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  étant fixes (ie constants au cours du temps) dans le repère  $R$ , leurs dérivées sont nulles, donc :

$$\left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R = \frac{dx}{dt}.\vec{x} + \frac{dy}{dt}.\vec{y} + \frac{dz}{dt}.\vec{z}$$

Pour simplifier les écritures, en SII on note souvent  $\frac{du}{dt} = \dot{u}$ , d'où :

$$\left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R = \dot{x}.\vec{x} + \dot{y}.\vec{y} + \dot{z}.\vec{z}$$

### 2.7.2 Dérivation composée

Très souvent en SII, les expressions vectorielles ne sont pas exprimées dans un unique repère (exemple :  $\vec{V} = a.\vec{y}_2 + b.\vec{z}_1 + c.\vec{x}_0$ ). La dérivation vectorielle n'est plus aussi aisée.

Les étudiants sont souvent tentés de tout projeter dans  $R_0$  avant de dériver, ce qui est une bien mauvaise idée (souvent héritée de la mécanique du point vue en Physique).

En SII, on privilégiera donc l'utilisation de la formule de dérivation vectorielle (dite « formule de Bour ») :



#### Définition Formule de Bour

$$\left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \vec{u}$$

### 2.7.3 Astuce de calcul avec les figures planes

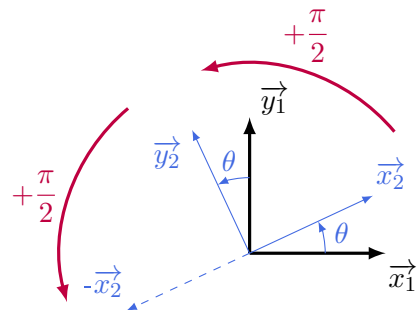
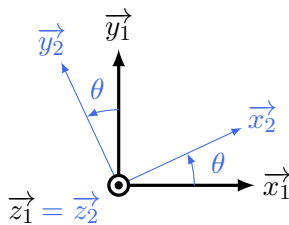
Si on cherche à dériver un vecteur  $\vec{u}_i$  dans un repère  $R_j$ , et qu'il existe **une même figure plane** sur laquelle  $\vec{u}_i$  et  $R_j$  apparaissent, alors on peut utiliser la méthode suivante : si on considère la figure plane ci-dessous à gauche, et qu'on souhaite calculer  $\left[ \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_1}$ , il faut :

- faire faire une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  au vecteur  $\vec{x}_2$ , ce qui nous donne  $\vec{y}_2$  ;
- multiplier ce vecteur par la dérivée temporelle de l'angle défini sur la figure plane :  $\dot{\theta}$ .

On trouve alors :

$$\left[ \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_1} = \dot{\theta} \cdot \vec{y}_2$$

Par la même méthode, la figure ci-dessous à droite donne immédiatement :

$$\left[ \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{R_1} = -\dot{\theta} \cdot \vec{x}_2$$


#### Attention

On ne peut utiliser cette méthode que s'il existe une figure plane sur laquelle apparaissent le vecteur à dériver et le repère (ou base) dans lequel on souhaite dériver. Dans le cas contraire, on n'échappera pas là encore à des calculs de projection.

## 3 Torseurs : Définitions, propriétés

### 3.1 Notation

$$\{T\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R\{T\}} \\ \overrightarrow{M_A\{T\}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} R_x & M_{A_x} \\ R_y & M_{A_y} \\ R_z & M_{A_z} \end{array} \right\}_b = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R\{T\}} = R_x \cdot \vec{x} + R_y \cdot \vec{y} + R_z \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M_A\{T\}} = M_{A_x} \cdot \vec{x} + M_{A_y} \cdot \vec{y} + M_{A_z} \cdot \vec{z} \end{array} \right.$$

- $\overrightarrow{R\{T\}}$  : résultante du torseur  $\{T\}$ ,
- $R_x, R_y, R_z$  : composantes dans la base  $b$  de la résultante du torseur  $\{T\}$ ,
- $\overrightarrow{M_A\{T\}}$  : moment en  $A$  du torseur  $\{T\}$ ,
- $M_{A_x}, M_{A_y}, M_{A_z}$  : composantes dans la base  $b$  du moment en  $A$  du torseur  $\{T\}$ .

### 3.2 Champ des moments - règle de transport des moments

$$\overrightarrow{M_B\{T\}} = \overrightarrow{M_A\{T\}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R\{T\}}$$

### 3.3 Opérations sur les torseurs

Les opérations effectuées sur les torseurs (égalité, addition et comoment) doivent s'effectuer **au même point** !

#### 3.3.1 Addition - Soustraction

$$\{T_1\} \pm \{T_2\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\{T_1\}}} \pm \overrightarrow{R_{\{T_2\}}} \\ \overrightarrow{M_{A\{T_1\}}} \pm \overrightarrow{M_{A\{T_2\}}} \end{array} \right\}$$

#### 3.3.2 Multiplication par un scalaire k

$$k \cdot \{T_1\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} k \cdot \overrightarrow{R_{\{T_1\}}} \\ k \cdot \overrightarrow{M_{A\{T_1\}}} \end{array} \right\}$$

#### 3.3.3 Comoment

$$\{T_1\} \otimes \{T_2\} = {}_P \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\{T_1\}}} \\ \overrightarrow{M_{A\{T_1\}}} \end{array} \right\} \otimes {}_P \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\{T_2\}}} \\ \overrightarrow{M_{P\{T_2\}}} \end{array} \right\} = \overrightarrow{R_{\{T_1\}}} \cdot \overrightarrow{M_{P\{T_2\}}} + \overrightarrow{R_{\{T_2\}}} \cdot \overrightarrow{M_{P\{T_1\}}} \quad (\forall P)$$

Le comoment est un scalaire, le résultat ne dépend pas du point de calcul, c'est un invariant.

#### 3.3.4 Automoment d'un torseur

$$\{T_1\} \otimes \{T_1\} = {}_P \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\{T_1\}}} \\ \overrightarrow{M_{A\{T_1\}}} \end{array} \right\} \otimes {}_P \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\{T_1\}}} \\ \overrightarrow{M_{P\{T_1\}}} \end{array} \right\} = 2 \cdot \overrightarrow{R_{\{T_1\}}} \cdot \overrightarrow{M_{P\{T_1\}}}$$

### 3.4 Torseurs particulières

#### 3.4.1 Torseur couple

Un torseur est dit torseur couple si la résultante du torseur est nulle. Le moment d'un torseur couple est identique en tout point.

$$\{T_1\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \overrightarrow{M_{A\{T_1\}}} \end{array} \right\} \quad (\forall A)$$

L'automoment d'un torseur couple est nul.

#### 3.4.2 Torseur glisseur

Un torseur est de type glisseur si la résultante d'un torseur n'est pas nulle et que l'automoment est nul. Il existe alors un point A tel que :

$$\{T_1\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\{T_1\}}} \\ 0 \end{array} \right\}$$

### 3.5 Axe central

On appelle axe central du torseur la droite  $(A, \vec{u})$  telle que pour tout point P appartenant à la droite  $(A, \vec{u})$  on a :

$$\overrightarrow{M_P(T_1)} = k \cdot \overrightarrow{R(T_1)}$$