



MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES

Cours

v2.3

CPGE - MARRAKECH

1 Préambule

L'objectif de ce chapitre est de montrer comment proposer un modèle d'action mécanique s'exerçant sur un solide.

2 Action mécanique sur un solide

2.1 Notion d'action mécanique



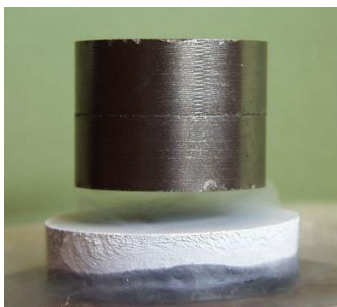
Définition *Action mécanique*

Une action mécanique est un phénomène susceptible de provoquer ou modifier le mouvement d'un solide, ou de le déformer.

2.2 Classification des actions mécaniques

On classe les actions mécaniques selon la nature géométrique du domaine sur lequel elles s'appliquent (avec contact ou non, intérieurs ou extérieurs...). On distingue ainsi :

- les actions à distance exercées en chaque point d'un corps (pesanteur, champ électromagnétique,...)
- les actions de contact entre différents milieux :
 - ◊ contact surfacique (pression de l'eau sur un barrage, liaison rotule...)
 - ◊ contact linéique ou ponctuel si la zone de contact est petite (liaison sphère-plan, liaison cylindre-plan,...)



(a) Action à distance



(b) Action ponctuelle



(c) Action surfacique

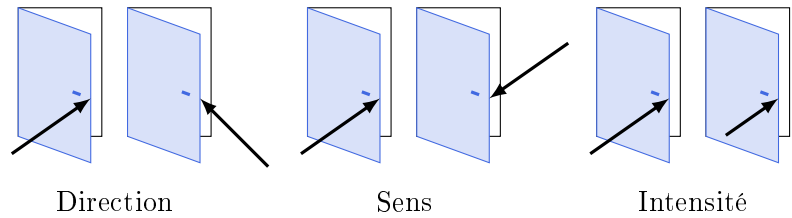
FIGURE 1 – Classification des actions mécaniques

2.3 Représentation d'une action mécanique

2.3.1 Notion de force

Pour mettre en mouvement une porte, il est nécessaire d'appliquer une force caractérisée par :

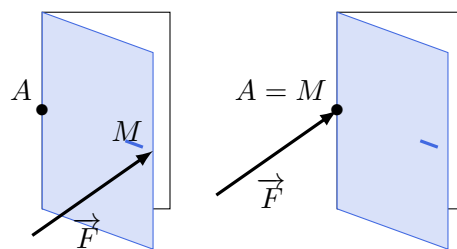
- sa direction ;
- son sens ;
- son intensité.



L'utilisation d'un vecteur \vec{F} pour modéliser une force semble donc adaptée. L'unité est le **Newton** (N). Une force caractérise donc la **tendance** d'une action mécanique à **mettre localement en translation un solide**.

2.3.2 Notion de moment

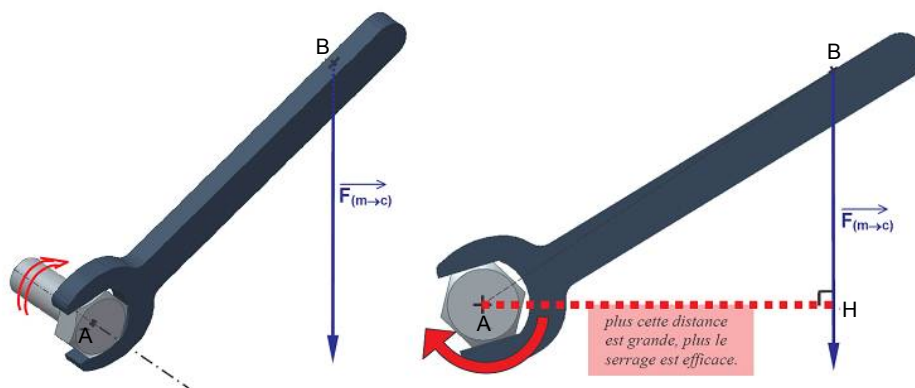
Cette seule donnée d'une force n'est pas suffisante pour décrire une action mécanique. Pour une même force, les effets sont différents suivant les points d'application.



On introduit la notion de moment au point A de la force \vec{F} (appliquée localement en M) qui caractérise l'effet de la force en un point donné : $\vec{M}_{A,\vec{F}} = \vec{AM} \wedge \vec{F}$ (dont les composantes sont exprimées en N.m).

Un moment caractérise ainsi la **tendance** d'une action mécanique à **mettre en rotation un solide autour d'un axe donné**.

L'exemple suivant illustre les caractéristiques du moment.



On modélise l'action mécanique de la main sur la clé par une force appliquée au point B , représentée par le vecteur $\overrightarrow{F_{m \rightarrow c}}$. C'est cette force qui permet de serrer la vis en la faisant « tourner » autour du point A .

On dit que la force appliquée en B crée un moment au point A .

On constate que : $\overrightarrow{M_{A, m \rightarrow c}} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_{m \rightarrow c}} = \overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{F_{m \rightarrow c}}$, où H est le projeté orthogonal de B sur le support de la force $\overrightarrow{F_{m \rightarrow c}}$.



Définition Bras de levier

La distance AH est appelée **bras de levier** : distance la plus courte du support de la force au point d'application.

Cette notion est utilisée en pratique pour calculer rapidement le moment d'une force sans passer par le produit vectoriel.

Par définition du produit vectoriel, le vecteur moment est orthogonal au plan contenant le vecteur force \overrightarrow{F} et le vecteur \overrightarrow{AB} avec A le point où le moment est calculé.

2.3.3 Torseur d'action mécanique



Définition Action mécanique

Une action mécanique est donc représentée par :

- un vecteur \overrightarrow{F} ;
- un moment en A : $\overrightarrow{M_{A, \overrightarrow{F}}} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F}$.

Si on écrit l'effet de la force en B , on obtient :

$$\overrightarrow{M_{B, \overrightarrow{F}}} = \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{F} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{M_{A, \overrightarrow{F}}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F}$$

On constate donc que le champ de moment est un champ antisymétrique, il est donc représentable par un torseur.



Définition Torseur des actions mécaniques

Ainsi toute action mécanique est caractérisée par un torseur :

$$\{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{i \rightarrow j}} \\ \overrightarrow{M_{A, i \rightarrow j}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{array} \right\}_b$$

Le vecteur force $\overrightarrow{F_{i \rightarrow j}}$ est appelé **résultante** de l'action mécanique de i sur j .

Pour exprimer l'action mécanique en un autre point, il suffit d'utiliser la relation de changement de point d'un torseur :



Définition Formule de changement de point

$$\overrightarrow{M_{B,i \rightarrow j}} = \overrightarrow{M_{A,i \rightarrow j}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_{i \rightarrow j}}$$

2.3.4 Torseurs particuliers

Un **torseur couple** est de la forme $\{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{C} \end{array} \right\}$ et s'écrit de la même manière en tout point. Cette action mécanique correspond à l'action qui aurait tendance à faire tourner un solide.

Un **torseur glisseur** est de la forme $\{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$ au point d'application de la force. Cette action mécanique correspond à l'action qui aurait tendance à faire déplacer en translation un solide. La droite (M, \vec{F}) est l'axe du glisseur.

3 Modèle global - modèle local

3.1 Définition

Les actions mécaniques peuvent se modéliser mathématiquement sous la forme d'un champ de vecteurs $\vec{f}(M)$ appelée densité d'effort qui peut être volumique, surfacique ou linéique selon le modèle employé.

3.2 Passage d'une formulation locale à une expression globale

Soit $\vec{f}(M)$ (Action volumique, surfacique ou linéique) s'exerce sur un solide Σ . Chaque action élémentaire locale en chaque point M peut être considérée comme une action mécanique traduite par un torseur élémentaire :

$$\left\{ d\mathcal{T}_{\vec{f} \rightarrow \Sigma} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{dF_{\vec{f} \rightarrow \Sigma}} = \vec{f}(M)d\mu \\ dM_{M, \vec{f} \rightarrow \Sigma} \end{array} \right\}$$

avec $d\mu$ une mesure de la zone au voisinage de M (FIGURE 2). $d\mu$ est un élément de volume dV , un élément de masse dm , un élément de surface dS ou un élément de longueur $d\ell$

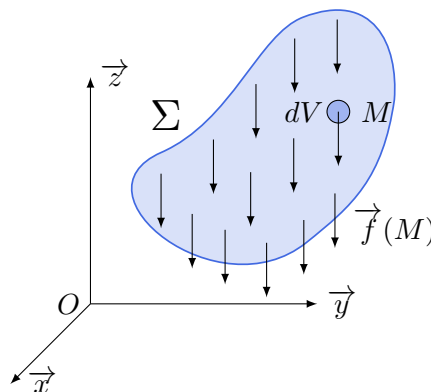


FIGURE 2 – Action mécanique volumique $\vec{f}(M)$ s'exerçant sur un système matériel Σ

Le torseur global des actions mécaniques est obtenu en faisant l'intégrale de l'ensemble des actions élémentaires en tout point du solide.

On a donc :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{\mu} \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2} \\ \overrightarrow{M}_{A,1 \rightarrow 2} = \int_{\mu} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{\mu} f(M) \overrightarrow{u}(M) d\mu \\ \overrightarrow{M}_{A,1 \rightarrow 2} = \int_{\mu} \overrightarrow{AM} \wedge f(M) \overrightarrow{u}(M) d\mu \end{array} \right\}$$

$d\mu$ peut être soit un volume, soit une surface ou une ligne de contact. On se retrouve alors à calculer soit une intégrale de volume (intégrale triple), de surface (intégrale double) ou d'une ligne (intégrale simple).

4 Action mécanique à distance : cas de la pesanteur

Dans le cas d'un solide de volume V , placé dans un champ de pesanteur, on a pour le modèle local :

$$\overrightarrow{dF}_{\text{pes} \rightarrow S}(M) = f(M) \overrightarrow{u}(M) dV \text{ où :}$$

- $\overrightarrow{u}(M) = -\overrightarrow{z}$
- $f(M)$ est la densité volumique de force au voisinage du point M . Pour un matériau homogène, $f(M) = \rho g = \text{cste}$ où ρ est la masse volumique du solide.

On peut donc maintenant calculer le torseur des actions de pesanteur sur le solide :

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F}_{\text{pes} \rightarrow S} = \int_V -\rho g \overrightarrow{z} dV \\ \overrightarrow{M}_{A,\text{pes} \rightarrow S} = \int_V \overrightarrow{AM} \wedge -\rho g \overrightarrow{z} dV \end{array} \right\}$$

Dans le cas particulier où les éléments de réduction du torseur sont écrits au centre de gravité G , on a $\overrightarrow{M}_{G,\text{pes} \rightarrow S} = \overrightarrow{0}$ car $\int_V \overrightarrow{GM} dV = \overrightarrow{0}$ par définition du centre de gravité dans le cas d'une masse volumique constante. Ainsi :

 **Définition** *Torseur de la pesanteur sur un solide S*

Le torseur de la pesanteur est un torseur glisseur :

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S}\} = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F}_{\text{pes} \rightarrow S} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}}$$

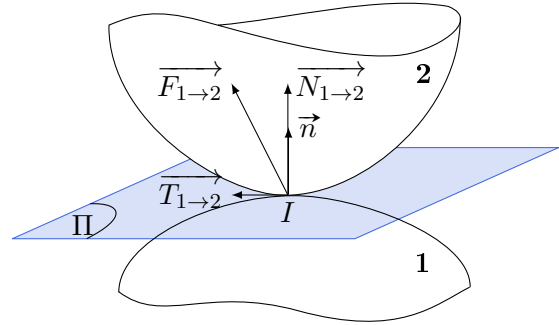
On définira toujours cette action mécanique de pesanteur en G pour simplifier les calculs.

5 Action mécanique de contact : Modèle du contact parfait



Définition

Dans le cas d'un **contact parfait**, c'est-à-dire **sans frottement**, l'action mécanique élémentaire est portée par la normale à la surface de contact élémentaire.



Le vecteur $\vec{u}(I) = \vec{n}$ est la normale au point de contact considéré (si on considère l'action du solide 1 sur 2, la normale est celle qui va de 1 vers 2).

L'expression de la densité d'effort est dans le cas général inconnue mais la connaissance seule de la géométrie du contact peut permettre de remonter à la forme du torseur des actions transmissibles.

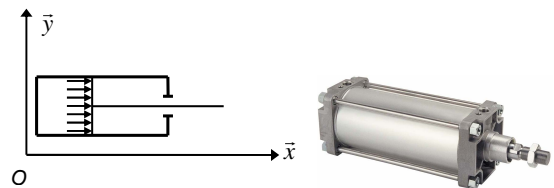


Remarque

La densité d'effort est en revanche souvent connue dans le cas d'un contact d'un fluide sur un solide, on la nomme **pression**.

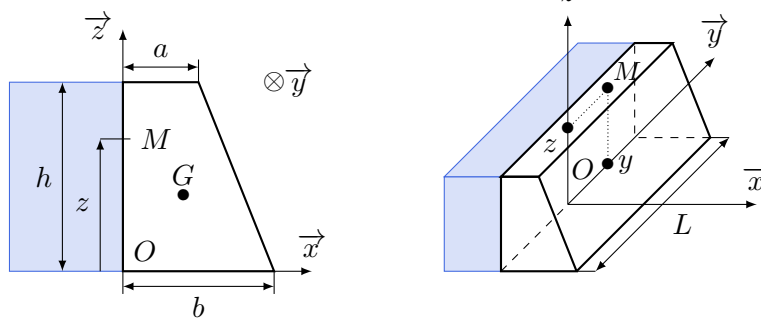
Exemple 1 : Action dans un vérin

Dans un vérin, la pression est considérée comme constante en première approximation : $f(P) = p$ et $\vec{n} = \vec{x}$; on note le rayon du piston R . On montre que : $\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{tige}} = pS \cdot \vec{x} = p\pi R^2 \cdot \vec{x}$



Exemple 2 : Action de l'eau sur un barrage

Dans un barrage électrique, la pression de l'eau sur le barrage dépend linéairement de la hauteur du fluide



$f(M) = p(z) = p_{\text{atm}} + \rho g(h - z)$; $\vec{n} = \vec{x}$; on note la largeur du barrage $L = 130$ m, la hauteur du barrage $h = 20$ m et la masse volumique de l'eau $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$; le point O est situé au milieu du barrage suivant l'axe \vec{y} .

On montre que : $\{\mathcal{T}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}}\} = \begin{Bmatrix} Lh \left(p_{\text{atm}} + \rho g \frac{h}{2} \right) \cdot \vec{x} \\ L \frac{h^2}{6} (3p_{\text{atm}} + \rho gh) \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}$

L'axe central est en A tel que $\overrightarrow{OA} = c \cdot \vec{z}$ avec : $c = \frac{h}{3} \times \frac{3p_{\text{atm}} + \rho gh}{2p_{\text{atm}} + \rho gh}$

$$\text{On a : } \left\{ \mathcal{T}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} Lh \left(p_{\text{atm}} + \rho g \frac{h}{2} \right) \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

6 Actions mécaniques dans les liaisons parfaites

On suppose que toutes les liaisons sont parfaites :

- les pièces mécaniques sont des solides indéformables ;
- les surfaces sont géométriquement parfaites ;
- les jeux sont nuls ;
- le contact est sans frottement ni adhérence.



Propriété

Si on compare le torseur d'action transmissible d'une liaison parfaite avec son torseur cinématique, on constate que :

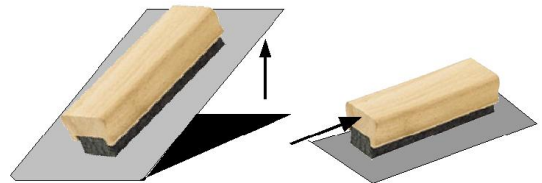
$$\overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}} \cdot \overrightarrow{M_A\{\mathcal{V}_{2/1}\}} + \overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}} \cdot \overrightarrow{R\{\mathcal{V}_{2/1}\}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} + \overrightarrow{M_{A,1 \rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = 0$$

Cette équation traduit le fait que la puissance mutuelle des actions mécaniques de contact dans une liaison parfaite est nulle.

7 Modélisation des actions de contact avec frottements

7.1 Mise en évidence du phénomène de frottement et d'adhérence

Dans la réalité, les liaisons sans frottement n'existent pas. dans l'exemple ci-contre Il est nécessaire d'imposer un effort pour déplacer une brosse. De même, une brosse sur un plan incliné restera en position, jusqu'à un angle limite d'inclinaison.



Le phénomène de frottement est omniprésent dans l'étude du comportement et la conception des systèmes. Il peut être :

- **Utile** lorsqu'il s'agit de freiner ou d'accélérer un solide ;
- **Néfaste** lorsqu'il est à l'origine de pertes d'énergie ou d'usures trop importantes ;
- **Négligeable** dans la plupart des cas.

7.2 Modèle de Coulomb

Le modèle de Coulomb est basé sur des observations empiriques.

On différencie deux cas :


Définition *Modèle de Coulomb - Cas 1 : Frottement (ou glissement) en I*

Glissement en I (FIGURE 3b) : $\overrightarrow{V_{I \in 2/1}} \neq \overrightarrow{0}$ (il existe un mouvement relatif entre les deux solides)

- $\|\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}\| = f \cdot \|\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}\|$
- $\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{V_{I \in 2/1}} < 0$.
- $\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}} \wedge \overrightarrow{V_{I \in 2/1}} = \overrightarrow{0}$.


Définition *Modèle de Coulomb - Cas 2 : Non glissement en I*

Il y a adhérence ou roulement sans glissement (FIGURE 3a) : $\overrightarrow{V_{I \in 2/1}} = \overrightarrow{0}$ (il n'y a pas de mouvement mais il existe une tendance au mouvement relatif entre les deux solides.)

- limite sur l'action tangentielle : $\|\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}\| \leq f \cdot \|\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}\|$ avec $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = \overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}$


Remarque

A la limite de glissement (ou équilibre strict) on applique les lois de coulomb relatives au frottement.

Le coefficient de frottement f (sans unité) est obtenu expérimentalement. Il dépend des matériaux en contact, de la qualité des surfaces et de la nature du contact.

7.3 Représentation graphique des lois de Coulomb : le cône de frottement

Les conditions de frottement peuvent se représenter graphiquement sous la forme d'une action tangentielle maximale proportionnelle à l'action normale, c'est-à-dire sous la forme d'une inclinaison maximale de la force transmise au contact par rapport à la normale. L'angle d'inclinaison maximal φ est tel que $f = \tan \varphi$.

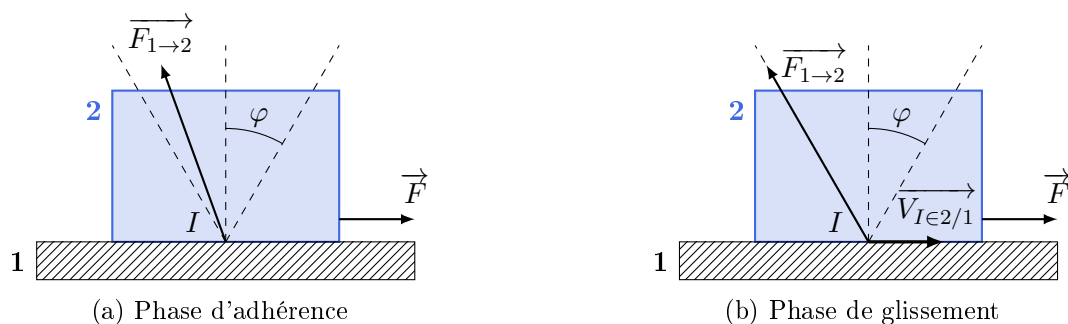


FIGURE 3 – Représentation graphique (plane) du cône de frottement.

En phase d'adhérence (figure 3a), la condition de Coulomb impose que l'action $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}$ soit « dans le cône de frottement » ou, à la limite du glissement, « sur le cône ».

En phase de glissement (figure 3b), la condition de Coulomb impose que l'action $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}$ soit « sur le cône » et la composante tangentielle $\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}$ opposée à la vitesse de glissement.

Le modèle de Coulomb interdit à l'action $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}$ d'être hors du cône.

Ces représentations planes sont à interpréter en trois dimensions. Le secteur angulaire est alors effectivement un cône, de demi-angle au sommet φ (figure 4).

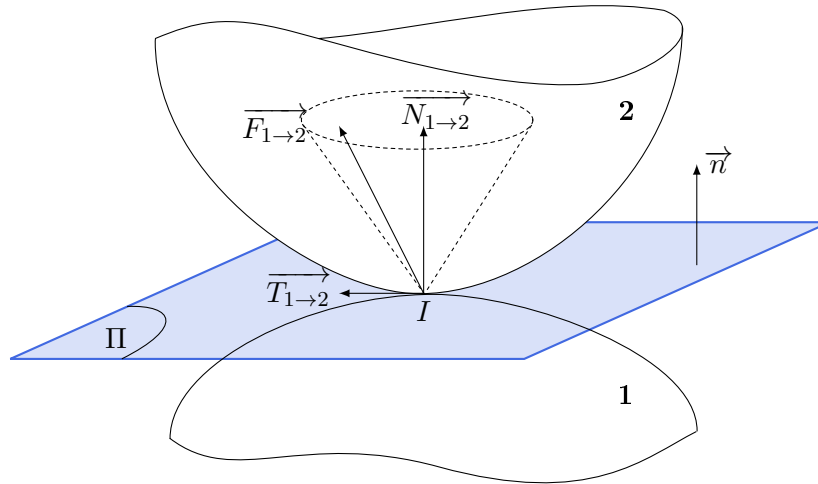


FIGURE 4 – Représentation 3D du cône de frottement.

Quelques exemples de coefficient de frottement pour des contacts classiques en mécanique.

Matériaux en contact	f
Acier/acier (sec)	0,2
Acier/bronze ou laiton (sec)	0,2
Acier/bronze ou laiton (lubrifié)	0,08
Acier/téflon	0,05

TABLE 1 – Quelques valeurs de coefficients de frottement

7.4 Contact ponctuel avec résistance au roulement ou au pivotement

Soient $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{M_{I,1 \rightarrow 2}} = \overrightarrow{M_{nI,1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{M_{tI,1 \rightarrow 2}}$ le moment transmis entre 1 et 2.

On note $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{\Omega_P} + \overrightarrow{\Omega_R} = \omega_P \vec{n} + \overrightarrow{\Omega_R}$.

Où ω_P est la composante de *pivotement* et $\overrightarrow{\Omega_R}$ la composante de *roulement* ($\overrightarrow{\Omega_R} \in \Pi$).

Par extension des lois de Coulomb sur le frottement, les **résistances au pivotement** ou au **roulement** peuvent se modéliser sous la forme :

Résistances au pivotement :

- Si $\omega_P = 0$:

$$\diamond |\overrightarrow{M_{nI,1 \rightarrow 2}}| \leq \delta \cdot |\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}|.$$

- Si $\omega_P \neq 0$:

$$\diamond \vec{\Omega}_P \wedge \vec{M}_{nI,1 \rightarrow 2} = \vec{0}$$

$$\diamond \vec{\Omega}_P \cdot \vec{M}_{nI,1 \rightarrow 2} < 0$$

$$\diamond |\vec{M}_{nI,1 \rightarrow 2}| = \delta \cdot |\vec{N}_{1 \rightarrow 2}|$$

Résistances au roulement :

- Si $\vec{\Omega}_R = \vec{0}$:

$$\diamond |\vec{M}_{t,1 \rightarrow 2}| \leq \mu \cdot |\vec{N}_{1 \rightarrow 2}|$$

- Si $\vec{\Omega}_R \neq \vec{0}$:

$$\diamond \vec{\Omega}_R \wedge \vec{M}_{tI,1 \rightarrow 2} = \vec{0}$$

$$\diamond \vec{\Omega}_R \cdot \vec{M}_{tI,1 \rightarrow 2} < 0$$

$$\diamond |\vec{M}_{tI,1 \rightarrow 2}| = \mu \cdot |\vec{N}_{1 \rightarrow 2}|$$

Les coefficients de résistances au pivotement δ et au roulement μ sont exprimés en m et sont obtenus expérimentalement.

Matériaux en contact	δ
Acier sur acier (trains)	10^{-5} m
Pneu sur bitume (camions)	10^{-2} m

TABLE 2 – Quelques valeurs de coefficients de résistance au roulement