Application 1 et 2

1) $\vec{V}_{(M\in C/P)} = \dot{y}\vec{y}$ $\quad (\dot{y} > 0)$

D'après les lois de coulomb

• $\vec{f}_{t(M)} \wedge \vec{V}_{(M\in C/P)} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{f}_{t(M)} = f_{t(M)}\,\vec{y}$

• $\vec{f}_{t(M)} \cdot \vec{V}_{(M\in C/P)} < 0 \Leftrightarrow f_{t(M)}\,\dot{y} < 0 \Leftrightarrow f_{t(M)} < 0$

Donc $\vec{f}_{t(M)} = -\left|f_{t(M)}\right| \cdot \vec{y}$

• $\left|f_{t(M)}\right| = k\left|\vec{f}_{n(M)}\right| = f\,\dfrac{mg}{L}$

D'où $\boxed{\vec{f}_{t(M)} = -f\,\dfrac{mg}{L}\,\vec{y}}$

2) On a: $\left\{\mathcal{C}_{(P\to C)}\right\} = \left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{M}_I\end{matrix}\right\}_I$

• $\vec{R} = \int \vec{f}_{(M)}\,dl = \int \left[\vec{f}_{n(M)} + \vec{f}_{t(M)}\right] dl$

$= \displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{mg}{L}\left(\vec{z} - f\vec{y}\right) dx$

$= \dfrac{mg}{L}\left(\displaystyle\int_{-L/2}^{L/2} dx\right)\left(\vec{z} - f\vec{y}\right)$

$= mg\,\dfrac{L}{L}\left(\vec{z} - f\vec{y}\right)$

donc: $\vec{R} = mg\left(\vec{z} - f\vec{y}\right)$

• $\vec{M}_I = \int \vec{IM} \wedge \vec{f}_{(M)}\,dx$

$= \displaystyle\int_{-L/2}^{L/2} x\,.\,\vec{x} \wedge \frac{mg}{L}\left(\vec{z} - f\vec{y}\right) dx$

$= \displaystyle\int_{-L/2}^{L/2} x\,\frac{mg}{L}\left(-\vec{y} - f\vec{z}\right) dx$

$= -\dfrac{mg}{L}\left(\displaystyle\int_{-L/2}^{L/2} x\,dx\right)\left(\vec{y} + f\vec{z}\right)$

$\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(-\frac{L}{2}\right)^2\right] = 0$

donc $\vec{M}_I = \vec{0}$

Finalement: $\boxed{\left\{\mathcal{C}_{(P\to C)}\right\} = \left\{\begin{matrix} mg\left(\vec{z} - f\vec{y}\right)\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_I}$

Application 3

$$\left\{\mathcal{T}_{(hui \to Pis)}\right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{matrix} \right\}_O$$

$$\vec{R} = \iint \vec{f}_{(M)}\, ds = \iint p\left(1 - \frac{r}{R}\right) ds\, \vec{x}$$

$$= p\left[\iint_{(S)} \left(1 - \frac{r}{R}\right) ds\right] \vec{x} \quad \text{(on fait sortir les constantes } p \text{ et } \vec{x}\text{)}$$

$$= p\left[\iint_{(S)} ds - \iint \frac{r}{R}\, ds\right] \vec{x}$$

$$= p\left[S - \frac{1}{R}\iint r\, ds\right] \vec{x} \quad (S : \text{surface totale du disque})$$

$$\iint r\, ds = \iint r.r\, dr\, d\theta$$

$$= \iint r^2\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^R r^2\, dr \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\int_0^R r^2\, dr = \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^R = \frac{1}{3} R^3$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

donc $$\vec{R} = p\left[S - \frac{1}{R}\left(\frac{2\pi R^3}{3}\right)\right] \vec{x}$$

or $$S = \pi R^2$$

$$\Rightarrow \vec{R} = p\left(\pi R^2 - \frac{2\pi R^2}{3}\right) \vec{x}$$

$$\boxed{\vec{R} = \frac{p \pi R^2}{3}\, \vec{x}}$$

$$- \vec{m}_O = \iint \vec{OM} \wedge \vec{p}_{M} \, ds$$

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r = r(\cos\theta\,\vec{y} + \sin\theta\,\vec{z})$$

donc

$$\vec{OM} \wedge \vec{p}_{M} = r(\cos\theta\,\vec{y} + \sin\theta\,\vec{z}) \wedge P\left(1 - \frac{r}{R}\right)\vec{x}$$

$$= rP\left(1 - \frac{r}{R}\right)\left(-\cos\theta\,\vec{z} + \sin\theta\,\vec{y}\right)$$

donc :

$$\vec{m}_O = \iint rP\left(1 - \frac{r}{R}\right)\left(-\cos\theta\,\vec{z} + \sin\theta\,\vec{y}\right) ds$$

$$= \iint rP\left(1 - \frac{r}{R}\right)\left(-\cos\theta\,\vec{z} + \sin\theta\,\vec{y}\right) r\,dr\,d\theta$$

$$= P\int_0^R r^2\left(1 - \frac{r}{R}\right)dr \times \int_0^{2\pi}\left(\sin\theta\,\vec{y} - \cos\theta\,\vec{z}\right) d\theta$$

or on a : $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\sin\theta\,\vec{y} - \cos\theta\,\vec{z}\right) d\theta = \left[\int_0^{2\pi} \sin\theta\,\vec{y}\right] - \left[\int_0^{2\pi} \cos\theta\,\vec{z}\right]$

$$= \left[-\cos\theta\right]_0^{2\pi} \cdot \vec{y} - \left[\sin\theta\right]_0^{2\pi} \cdot \vec{z}$$

D'où : $\vec{m}_O = \vec{0}$

Alors finalement on a : $\boxed{\left\{\mathcal{T}_{(\text{huile} \to \text{piston})}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\pi P R^2}{3}\vec{x} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_O}$

Application 4

1) Le plan tangent commun à 0 et 1 est $(A, \vec{x}, \vec{z}) \perp \vec{y}$

On a $\{\tau_{(0 \to 1)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = a\vec{x} + b\vec{y} \\ \vec{m} = c\vec{z} \end{array} \right\}$

$\underbrace{b\vec{y}}_{\vec{N}} + \underbrace{a\vec{x}}_{\vec{T}}$; $c\vec{z}$ moment de roulement

effort normal — effort tangentiel

et $\{\mathcal{V}_{(1/0)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}\vec{z} \\ \vec{V}_{(A\in 1/0)} \end{array} \right\}$

- $\dot{\theta}\vec{z}$ vitesse de roulement
- $\vec{V}_{(A\in 1/0)}$: vitesse de glissement

$\vec{N} = b\vec{y}$ (dirigé de 0 vers 1)

donc $b > 0$

- On applique les lois de Coulomb

↳ Glissement : $\cdot\ \vec{V}_{(A\in 1/0)} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ (vérifié)

$\cdot\ \vec{V}_{(A\in 1/0)} \cdot \vec{T} < 0 \iff \vec{V}_{(A\in 1/0)} \cdot a\vec{x} < 0$

↳ portée par $-\vec{x}$.

$\iff a > 0$

↳ Roulement : $\cdot\ \dot{\theta}\vec{z} \wedge c\vec{z} = \vec{0}$ (vérifié)

$\cdot\ \dot{\theta}\vec{z} \cdot c\vec{z} < 0 \iff \dot{\theta}c < 0$

or $\dot{\theta} < 0$, car la rotation se fait de $\vec{y}$ vers $\vec{x}$

$\iff c > 0$

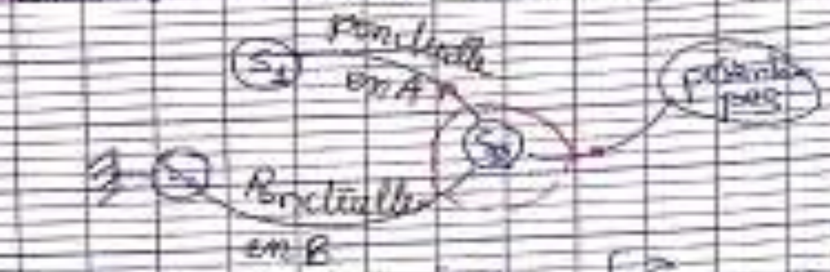
2) La dernière relation des lois de Coulomb donne :

↳ Glissement : $a = f b$

↳ Roulement : $c = \eta b$

Application 5

Dressons le schéma d'analyse :



1) PFS appliqué à S_2 : $\{\mathcal{T}_{(\bar{S}_2 \to S_2)}\} = \{0\}$

$$\{\mathcal{T}_{(S_1 \to S_2)}\} + \{\mathcal{T}_{(S_0 \to S_2)}\} + \{\mathcal{T}_{(pes \to S_2)}\} = \{0\}$$

$*$ $\{\mathcal{T}_{(S_1 \to S_2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} x_{12}\vec{x} + y_{12}\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$

$*$ $\{\mathcal{T}_{(S_0 \to S_2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} y_{02}\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$

Réduisons ce torseur en A.

$$\vec{M}_{A(S_0 \to S_2)} = \vec{M}_{B(S_0 \to S_2)} + \vec{AB} \wedge y_{02}\vec{y}$$

$$= L\vec{x} \wedge y_{02}\vec{y} = L y_{02}\vec{z}_0$$

donc $\{\mathcal{T}_{(S_0 \to S_2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} y_{02}\vec{y} \\ L \cdot y_{02}\vec{z}_0 \end{array} \right\}_A$

$*$ $\{\mathcal{T}_{(pes \to S_2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} -mg\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_2}$

$$\vec{M}_{A(pes \to S_2)} = \vec{M}_{G(pes \to S_2)} + \vec{AG}_2 \wedge (-mg\vec{y}_0)$$

$$= (e\vec{y} - x_e\vec{x}) \wedge (-mg\vec{y}_0)$$

$$= -mg(e\,\vec{y} \wedge \vec{y}_0 + x_e\vec{x} \wedge \vec{y}_0)$$

$$= -mg(-e\sin\alpha\,\vec{z}_0 + x_e\cos\alpha\,\vec{z}_0)$$

$$= mg(e\sin\alpha - x\cos\alpha)\,\vec{z}_0$$

Le TRS appliqué à S_2 donne :

$X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Y_{02}\vec{y} - mg\vec{y_0} = \vec{0}$

en proj sur $\vec{x_0}$:

$$\boxed{X_{12}\cos\alpha - Y_{12}\sin\alpha - Y_{02}\sin\alpha = 0} \quad (1)$$

en proj sur $\vec{y_0}$:

$$\boxed{X_{12}\sin\alpha + Y_{12}\cos\alpha + Y_{02}\cos\alpha - mg = 0} \quad (2)$$

en proj sur $\vec{z_0}$:

$$\boxed{L\,Y_{02} + mg\,(e\sin\alpha - x_e\cos\alpha) = 0} \quad (3)$$

2) Dans le contact S_2-S_1 au point A on a :

$\vec{V}_{(A\in S_2/S_1)}$ est porté par $(-\vec{x})$

car la planche a tendance à glisser vers le bas sous l'effet du poids

et $\vec{R}_{(S_1\to S_2)} = \underbrace{X_{12}\vec{x}}_{\text{tangentiel}} + \underbrace{Y_{12}\vec{y}}_{\text{normal}}$

Appliquons les lois de Coulomb du glissement :

$\to \vec{V}_{(A\in S_2/S_1)} \wedge X_{12}\vec{x} = \vec{0}$ (vérifiée)

$\to \vec{V}_{(A\in S_2/S_1)} \cdot X_{12}\vec{x} < 0 \Leftrightarrow X_{12} > 0$

$\to |X_{12}| = f\,|Y_{12}|$

or X_{12} et Y_{12} sont > 0

D'où : $$\boxed{X_{12} = f\,Y_{12}} \quad (4)$$

3) On dispose de 4 équations pour 4 inconnues : $X_{12}, Y_{12}, Y_{02}, x_e$

La manipulation des 4 équa donne : $$\boxed{x_e = e\tan\alpha + L\left(1 - \frac{\tan\alpha}{f}\right)}$$

Remarque :

TRS en proj $\to \vec{x}$: $X_{12} - mg\sin\alpha = 0$

TRS en proj $\to \vec{y}$: $Y_{12} + Y_{02} - mg\cos\alpha = 0$