Principe Fondamental de la Statique

Cours

v1.2

1 Isolement d'un système matériel

1.1 Frontière d'isolement

On considère un ensemble matériel Σ quelconque (ensemble de solides, solide seul...). On délimite l'ensemble Σ par une frontière. Tout ce qui est en dehors de cette frontière est appelé « milieu extérieur de Σ » et est noté $\overline{\Sigma}$.

La définition de la frontière d'isolement est indispensable avant toute étude, elle permet d'identifier les actions mécaniques s'exerçant sur le système considéré.

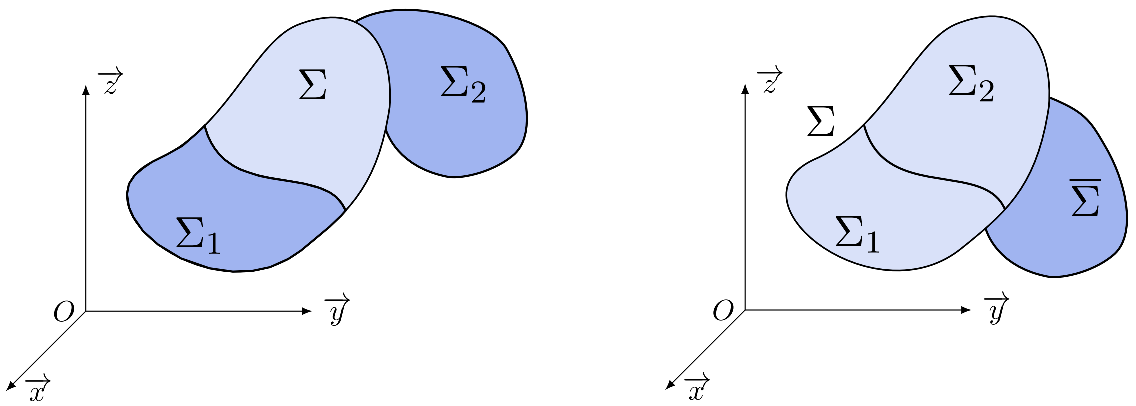
Attention

On n'isole jamais le bâti !!!

En effet, le bâti étant le référentiel galiléen, à l'échelle du système industriel étudié, il est très difficile de connaître les actions qui s'exercent sur celui-ci.

1.2 Inventaire des actions mécaniques

Le milieu extérieur $\overline{\Sigma}$ agit sur l'ensemble Σ (ensemble isolé par une frontière) : action de contact ou à distance...



(a) Deux systèmes matériels Σ_1 et Σ_2 agissent sur Σ. (b) Deux systèmes matériels Σ_1 et Σ_2 agissent sur $\overline{\Sigma}$.

FIGURE 1 – Isolements

On note $\left\{\mathcal{T}_{\overline{\Sigma}\rightarrow\Sigma}\right\}$ l'ensemble des actions mécaniques extérieures agissant sur Σ. Plusieurs cas peuvent alors se présenter :

Y.FARTOUH - fartouh.cpge@gmail.com

- Si deux milieux Σ_1 et Σ_2 disjoints agissent sur Σ ($\overline{\Sigma} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$), alors (FIGURE 1a) :

$$\{\mathcal{T}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}\} = \{\mathcal{T}_{\Sigma_1\to\Sigma}\} + \{\mathcal{T}_{\Sigma_2\to\Sigma}\}$$

- Si Σ est constitué de deux éléments $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ (Σ est partitionné) alors (FIGURE 1b) :

$$\{\mathcal{T}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}\} = \left\{\mathcal{T}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma_1}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma_2}\right\}$$

Pour déterminer les actions mécaniques extérieures, on extrait l'ensemble isolé et on recense pour chaque solide :

- les actions mécaniques de contact **avec l'extérieur** ;
- les actions mécaniques à distance exercées **par l'extérieur**.

On parle de **inventaire (ou bilan) des actions mécaniques extérieures** (IAME ou BAME).

1.3 Du graphe des liaisons au graphe de structure

Le graphe de liaisons permet de visualiser le ou les isolement(s) à réaliser et permet de rendre systématique la recherche des actions mécaniques extérieures.

Définition *Graphe de structure*

Le graphe de structure correspond au graphe des liaisons auquel on ajoute les actions mécaniques à distance qui s'appliquent sur chaque solide, les actions des ressorts, des moteurs, etc ...

Le bâti (pièce de référence) est toujours bien repéré pour ne pas l'isoler (voir FIGURE 2).

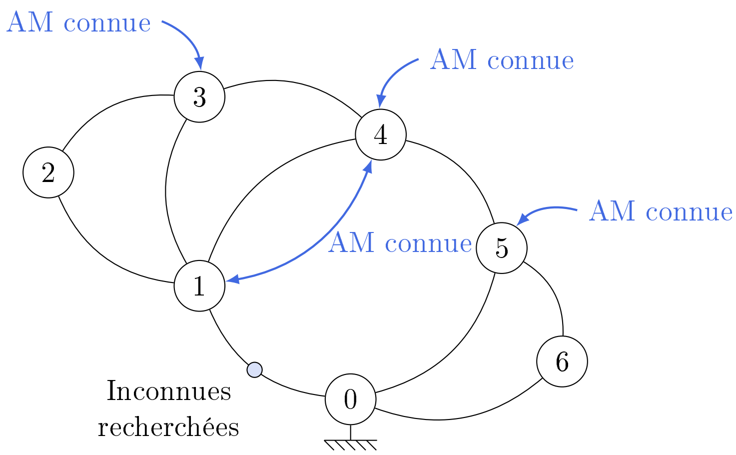


FIGURE 2 – Graphe de structure type d'un système,avec actions connues et inconnues.

Remarque

Il est important de savoir repérer si l'action mécanique est interne à un mécanisme :

- un ressort exerce une action mécanique entre deux solides ;
- un fluide exerce une action entre deux solides ;
- dans un moteur constitué d'un rotor et d'un stator, l'effet magnétique génère un couple sur le rotor et le couple opposé sur le stator, on a donc bien une action mécanique entre deux solides.

Par contre, la pesanteur est bien une action extérieure à chaque solide.

2 Principe fondamental de la statique (PFS)

2.1 Énoncé

Définition *Principe fondamental de la statique (PFS)*

Si un système mécanique Σ est en équilibre dans un référentiel galiléen, alors, la somme des actions mécaniques de l'extérieur sur Σ est nulle :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to\Sigma}\} = \{0\}$$

2.2 Résolution d'un problème de statique

Il n'est pas toujours nécessaire, pour résoudre un problème de statique, de vérifier l'ensemble du PFS. En effet, l'écriture torsorielle revient à poser deux équations vectorielles :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to\Sigma}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{\text{ext}\to\Sigma}} \\ \overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to\Sigma}} \end{array} \right\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

- l'équation de résultante statique : $\overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to\Sigma}\}} = \overrightarrow{F_{\text{ext}\to\Sigma}} = \overrightarrow{0}$;
- l'équation du moment statique en un point : $\overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to\Sigma}\}} = \overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to\Sigma}} = \overrightarrow{0}$.

On parle de **théorème de la résultante statique** et de **théorème du moment statique** en un point donné. On peut ainsi obtenir **6 équations scalaires**.

3 Théorème des actions réciproques

Définition *Théorème des actions réciproques*

Si un système matériel Σ_2 applique une action mécanique sur Σ_1, notée $\{\mathcal{T}_{\Sigma_2\to\Sigma_1}\}$, alors réciproquement, Σ_1 applique l'action opposée sur Σ_2 :

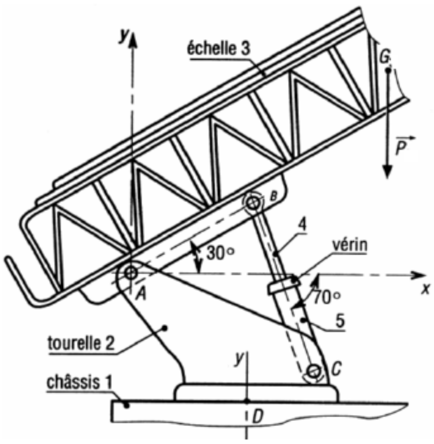
$$\{\mathcal{T}_{\Sigma_2\to\Sigma_1}\} = -\{\mathcal{T}_{\Sigma_1\to\Sigma_2}\}$$

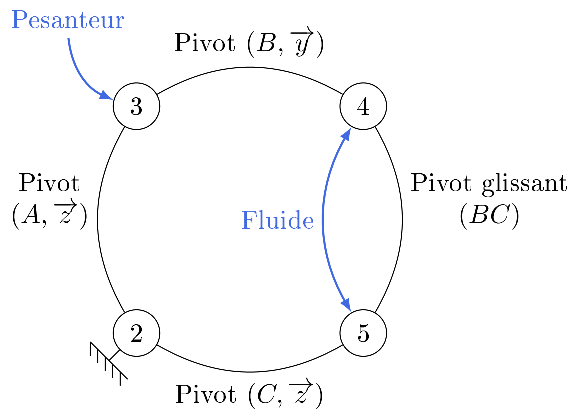
4 Quelques isolements particuliers

Exemple : Échelle de pompier

Il s'agit d'étudier l'équilibre de système soumis à deux ou trois forces (glisseurs).

Dans de nombreuses situations, une étude plane des actions mécaniques peut être menée. Dans ces conditions, les actions mécaniques dans les liaisons ponctuelles ou pivot sont des glisseurs.





4.1 Système soumis à deux glisseurs

Définition

Si un système matériel est en équilibre sous l'action de deux glisseurs $\overrightarrow{F_B}$ en B et $\overrightarrow{F_C}$ en C, les deux forces sont opposées et ont pour droite support la droite (BC).

Exemple : Échelle de pompier

On se retrouve dans ce cas de figure en isolant l'ensemble $\{\mathbf{4}+\mathbf{5}\}$.

Remarque

Il peut être intéressant de commencer par isoler les ensembles de solides soumis à deux forces car le support de ces forces peut alors être immédiatement identifié.

4.2 Système soumis à trois glisseurs

Définition

Si un système matériel est en équilibre sous l'action de trois glisseurs $\overrightarrow{F_A}$ en A, $\overrightarrow{F_B}$ en B et $\overrightarrow{F_G}$ en G, ces forces sont coplanaires, concourantes ou parallèles et leur somme vectorielle nulle.

Exemple : Échelle de pompier

On se retrouve dans ce cas de figure en isolant **3**.

5 Méthodes de résolution

Soit un système constitué de plusieurs solides en liaison et soumis à des actions mécaniques extérieures. L'objectif d'une étude de statique des solides est de déterminer les équations liant les actions mécaniques s'exerçant sur chaque solide. Plusieurs types de problèmes peuvent alors être posés :

- dimensionner le mécanisme, c'est-à-dire déterminer si les liaisons vont résister. On souhaite donc connaître toutes les actions mécanique dans les liaisons ainsi que les actions mécaniques extérieures inconnues ;
- seules les actions mécaniques extérieures sont recherchées en fonction d'actions mécaniques connues.

5.1 Méthode systématique

La méthode systématique consiste à isoler chaque solide individuellement de façon à écrire la totalité des équations disponibles. Cette méthode est celle qui a été employée dans l'exemple précédent du micro-compresseur : toutes les équations ont été écrites. C'est aussi la méthode utilisée dans les logiciels de simulation numérique. Pour chaque isolement, la démarche est la même :

1. Isoler chaque solide sauf le bâti ;
2. Établir l'inventaire des actions mécaniques extérieures (IAME) : ce point est particulièrement attendu dans la rédaction d'un isolement (et donc obligatoire) ;
3. Écrire le PFS pour chaque solide ;
4. Réduire en un point quelconque les torseurs d'actions mécaniques ;
5. Projeter sur une base quelconque pour obtenir un système d'équations scalaires à résoudre.

Attention

Cette méthode est systématique mais très longue puisqu'il faut tout écrire pour résoudre. Elle n'est à utiliser que si l'énoncé demande explicitement de tout trouver !

Avant même de commencer la résolution, il est possible d'établir un premier bilan du nombre d'équations et d'inconnues du système :

- $6 \times N_S$ équations scalaires (N_S : nombre de solides qu'il est possible d'isoler) en 3 dimensions ou $3 \times N_S$ en modélisation plane ;
- I_s inconnues (I_s : nombre d'inconnues dans les torseurs d'actions mécaniques).

Si $I_s \leq 6 \times N_S$ (ou $3 \times N_S$) alors peut-être que le problème possède une solution. En classe de PSI, en 2^{e}année, l'étude de la théorie des mécanismes permettra de savoir à coup sûr si la résolution est possible.

5.2 Méthode intuitive – Stratégie de résolution

Une méthode plus intuitive peut être très efficace pour celui qui possède une vision plus fine du système, car bien souvent, il n'est pas nécessaire de déterminer la totalité des inconnues.

Lorsque seules quelques inconnues d'actions mécaniques sont recherchées, il faut écrire le minimum d'équations permettant de relier ces inconnues aux données, autant que possible sans faire intervenir les inconnues non recherchées.

Il s'agit alors d'analyser les actions mécaniques dans le mécanisme à partir des mouvements permis par les liaisons (mobilités qui annulent certaines composantes d'efforts dans les liaisons) et d'identifier les efforts qui *travaillent*.

Il n'y a rien de systématique par cette méthode mais deux points sont à retenir pour élaborer une stratégie de résolution :

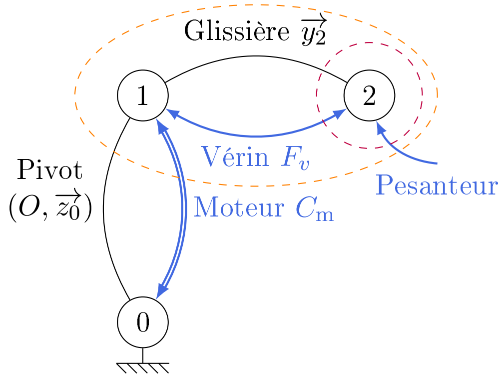


FIGURE 3 – Exemple d'une chaîne ouverte

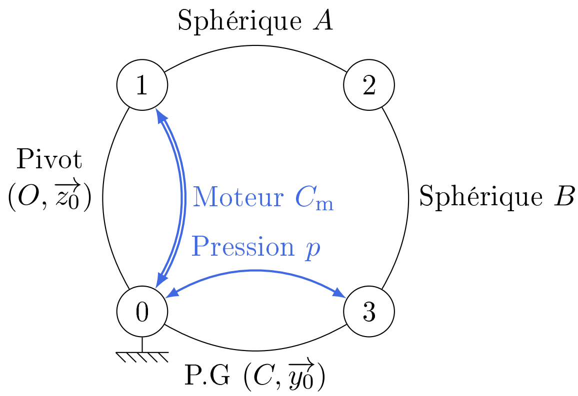


FIGURE 4 – Chaîne fermée du micro-compresseur

- repérer rapidement les solides soumis à deux forces : leur isolement doit pouvoir conduire à des simplifications utiles sur les actions mécaniques, identifiables sans même écrire le PFS (voir 4.1) ;
- suivant le type de chaîne
  - pour une chaîne fermée, dans le cas des liaisons avec le bâti, écrire les équations de PFS sur les mobilités de ces liaisons permet de déterminer comment les efforts se transmettent dans le mécanisme ;
  - pour une chaîne ouverte, l'isolement de l'ensemble des solides allant de la partie ouverte du mécanisme jusqu'à l'actionneur que l'on souhaite dimensionner, permettra de déterminer le résultat en une seule équation.

Exemple : pour la chaîne ouverte de la FIGURE 3

- l'isolement de $\{\mathbf{1}+\mathbf{2}\}$ permet de déterminer le couple moteur C_m par utilisation de l'équation du moment statique statique au point O en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_0}$;
- l'isolement de $\{\mathbf{2}\}$ permet de déterminer la force dans le vérin F_v par utilisation de l'équation de la résultante statique en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_2}$.

Exemple : pour la chaîne fermée du micro-compresseur (FIGURE 4)

Dans le cas du micro-compresseur, si l'unique inconnue recherchée est le couple moteur permettant de comprimer le fluide à 8 bar dans la chambre supérieure, il n'est pas nécessaire d'écrire toutes les équations.

- La bielle **2** étant soumise à deux forces, il est possible de déduire sans calcul que ces forces sont égales en norme et colinéaires à $\overrightarrow{y_2}$ (voir 4.1). Elles s'expriment donc toutes les deux en fonction d'une unique variable T (qui correspond à la norme de chacune des forces) ;
- Le piston **3** étant en liaison pivot glissant d'axe $(B,\overrightarrow{y_0})$ avec le bâti, seules les équations de moment et résultante suivant $\overrightarrow{y_0}$ ne font pas intervenir d'inconnue de liaison de **0** sur **3**. La force T et la pression p travaillent uniquement dans le mouvement de translation suivant $\overrightarrow{y_0}$ (et pas dans le mouvement de rotation d'axe vertical $(B,\overrightarrow{y_0})$), il faut donc isoler le piston **3** et écrire l'équation de la résultante statique sur $\overrightarrow{y_0}$ pour déterminer T en fonction de la pression p ;
- Pour trouver la relation entre le couple moteur C_m qui s'applique sur l'arbre **1** et la norme T de l'action mécanique de **2** sur **1**, il faut donc isoler l'arbre **1** et utiliser l'équation du moment statique (car on cherche une relation sur le couple C_m). On utilise alors la mobilité de la liaison pivot d'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$, soit donc le théorème du moment statique écrit au point O en projection sur $\overrightarrow{z_0}$ qui donnera la relation entre C_m et T.