



CINÉTIQUE

TD 1

Professeur: YASSINE FARTOUH

v01

CPGE - MARRAKECH

Exercice 1 : Géométrie d'un bras du robot

La figure 1 illustre le bras intermédiaire 3 du mécanisme « bras de robot », modélisé par un assemblage de trois plaques rectangulaires homogènes d'épaisseur négligeable.

- Plaque 31 de masse m_{31} , de longueur b , de largeur a et de centre d'inertie G_{31} .
- Plaque 32 de masse m_{32} , de longueur b , de hauteur h et de centre d'inertie G_{32} .
- Plaque 33, identique à la plaque 32, de centre d'inertie G_{33} . $m_3 = m_{31} + 2.m_{32}$

Le repère $R_3 = (B, \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est lié au bras 3.

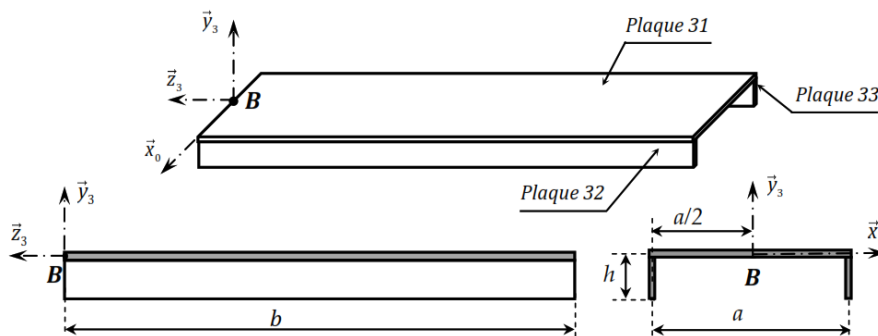


FIGURE 1 – Géométrie adoptée du bras intermédiaire 3

On notera la matrice d'inertie d'un solide i au point M dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ comme suit :

$$\bar{I}(M, i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$

Le centre d'inertie G_3 du bras 3 est tel que : $\overrightarrow{BG_3} = X_{G3} \cdot \vec{x}_0 + Y_{G3} \cdot \vec{y}_3 + Z_{G3} \cdot \vec{z}_3$.

Question 1 Déterminer les composantes du vecteur position $\overrightarrow{BG_3}$ du centre d'inertie G_3 du bras 3.

Question 2 Donner, en justifiant, la forme simplifiée de la matrice d'inertie $\bar{I}(B, 3)$ dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$.

Question 3 Exprimer en fonction des données, et dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, la matrice d'inertie $\bar{I}(G_{31}, 31)$. En déduire la matrice d'inertie $\bar{I}(B, 31)$ dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$.

Question 4 Exprimer en fonction des données, et dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, les matrices d'inertie $\bar{I}(G_{32}, 32)$ et $\bar{I}(G_{33}, 33)$. En déduire les matrices d'inertie $\bar{I}(B, 32)$ et $\bar{I}(B, 33)$.

Question 5 Déduire l'expression de la matrice d'inertie $\bar{I}(B, 3)$ dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$.

Exercice 2 : Inertie d'une roue

On modélise la roue par un solide (S) de masse m , de centre d'inertie C , constitué d'un cylindre creux de rayons R_e et R_i percé de quatre trous débouchant identiques de rayons « r » réparties sur un rayon « $4r$ » comme le montre la figure 2.

Afin de faciliter les calculs on propose de considérer que la roue S est une plaque d'épaisseur négligeable, obtenue à partir d'un disque homogène S_1 de rayon R_e et de centre C , duquel on retranche le disque S_2 (de rayon R_i et de centre C) et les quatre disques S_3, S_4, S_5 et S_6 de rayons r et de centres d'inertie C_3, C_4, C_5 et C_6 respectivement comme indiqué sur la figure 2.

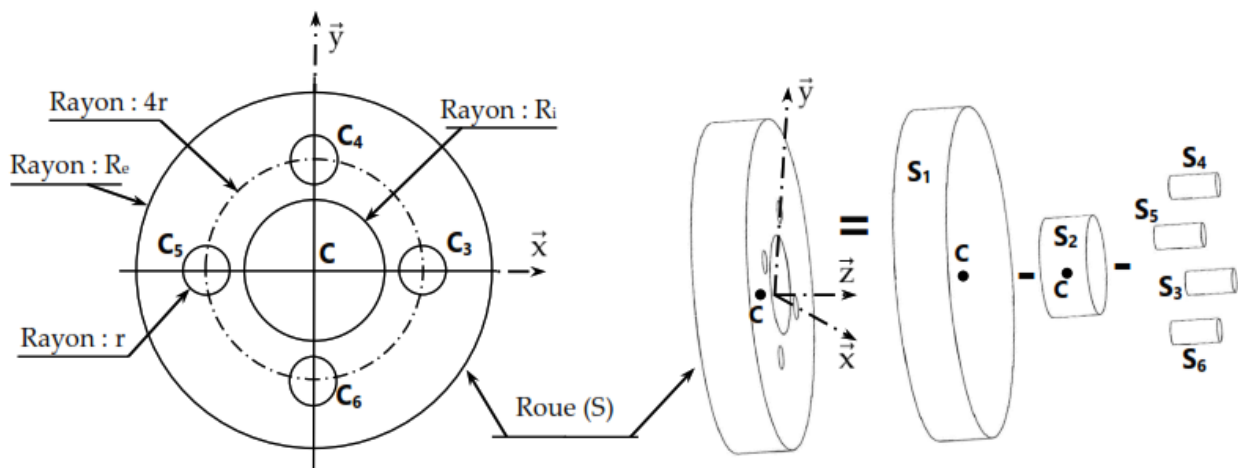


FIGURE 2 – Modèle géométrique simplifié de la roue.

Question 1 Déterminer la masse surfacique notée (λ) du matériau de S en fonction de : m, R_e, R_i , et r .

Question 2 Dédurre m_1, m_2 et m_3 : les masses des disques S_1, S_2 et S_3 respectivement, en fonction de m, R_e, R_i , et r .

Question 3 Donner l'expression de I_{2z} ; le moment d'inertie de S_2 par rapport à l'axe $(C, \vec{z})$.
(On donne $I_{1z} = m_1 \cdot \frac{R_e^2}{2}$ le moment d'inertie de S_1 par rapport à l'axe $(C, \vec{z})$).

Question 4 Déterminer I_{3z} ; le moment d'inertie de S_3 par rapport à l'axe $(C, \vec{z})$ en utilisant le théorème de Huygens.

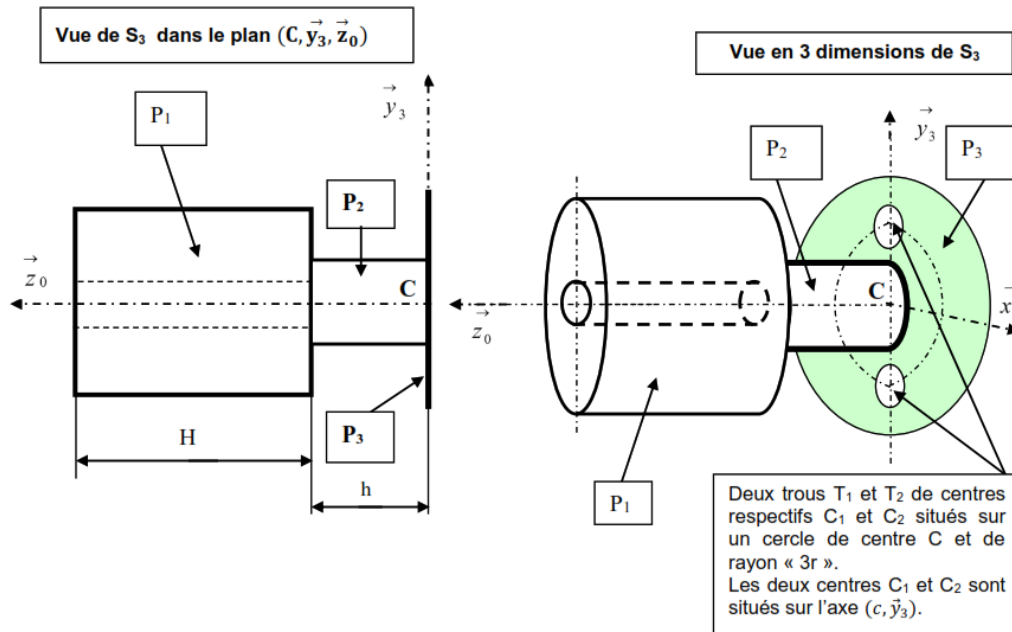
Question 5 Déterminer I_z : moment d'inertie de S par rapport à l'axe $(C, \vec{z})$ en fonction de m, R_e, R_i et en vous aidant de la relation : $I_z = I_{1z} - I_{2z} - 4 \cdot I_{3z}$

Exercice 3 : Étude cinétique d'un solide homogène

Le solide S_3 , supposé homogène, est constitué de trois parties, comme le montre la Figure 3 :

- P_1 : Cylindre creux de rayon extérieur R , de rayon intérieur r et de hauteur H . La masse de cette partie est m_{P1} , et son centre d'inertie est G_{P1} ;

- $\mathbf{P}_2$: Cylindre plein de rayon R_{P2} , de hauteur h , de masse m_{P2} et de centre d'inertie G_{P2} ;
- $\mathbf{P}_3$: Disque de centre d'inertie C et de rayon $6r$. Il est percé de deux trous T_1 et T_2 de rayon r . La masse de cette partie est m_{P3} .
- $(C, \vec{z}_0)$ est un axe de révolution commun aux parties $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$.

FIGURE 3 – Modèle géométrique de S_3

On adopte la notation suivante :

- Matrice d'inertie du solide S_i au point M dans la base β : $\bar{I}_{(M, S_i)} = \begin{bmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{bmatrix}_\beta$

Question 1 Déterminer la position du centre d'inertie G_3 du solide $\mathbf{S}_3$ dans le repère $R_3 (C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$, en fonction des dimensions de $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ et $\mathbf{P}_3$ et de leurs masses ;

Question 2 :

a - Donner la forme simplifiée de la matrice d'inertie du solide $\mathbf{S}_3$ au point C et dans la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$. (On ne demande pas d'explicitier les termes non nuls de cette matrice) ;

a - Cette matrice conservera-t-elle sa forme dans la base de Ro ? Expliquer ;

La matrice d'inertie de la partie $\mathbf{P}_1$ en son centre d'inertie G_{P1} est :

$$\bar{I}_{(G_{P1}, P1)} = m_{P1} \begin{pmatrix} \frac{R^2+r^2}{4} + \frac{H^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2+r^2}{4} + \frac{H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2+r^2}{2} \end{pmatrix}_{R3}$$

Question 3 En négligeant l'effet des trous T_1 et T_2 , déterminer le moment d'inertie C_3 du solide $\mathbf{S}_3$ par rapport à son axe $(C, \vec{z}_0)$.