Outils mathématiques

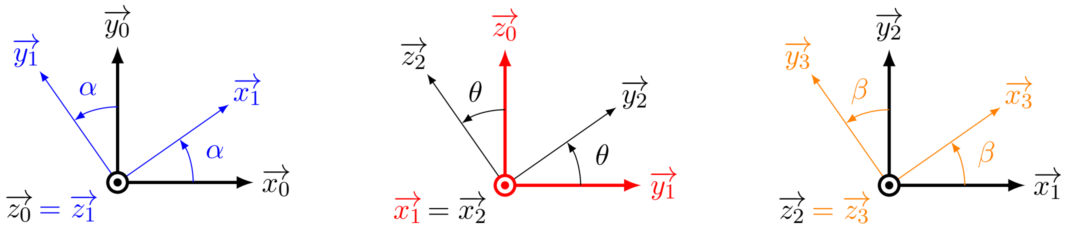
TD 1 et 2

Professeur : Y.FARTOUH v1.1

CPGE - MARRAKECH

Exercice 1

Les figures planes suivantes représentent la définition des rotations d'un repère R_3 par rapport à R_0 :



Question 1 Quelles sont les bases intervenant dans ces figures ;

Question 2 Compléter le tableau suivant : (Si nécessaire, projeter le second vecteur)

$\vec{x}_0 \wedge \vec{x}_1 =$	$\vec{z}_0 \wedge \vec{y}_2 =$	$\vec{x}_3 \wedge \vec{y}_1 =$ ....
$\vec{x}_0 \wedge \vec{y}_1 =$	$\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_3 =$	
$\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1 =$	$\vec{z}_0 \cdot \vec{y}_2 =$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_1 =$ ....
$\vec{x}_0 \cdot \vec{y}_1 =$	$\vec{z}_2 \cdot \vec{x}_3 =$	

Exercice 2

Soit un repère R$'(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ obtenu par deux rotations à partir d'un repère R$(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de paramètres α et β, autour de $\vec{k}$ et $\vec{x}$, respectivement.

Question 1 Tracer les figures planes de rotation (Si besoin y'à-t-il, la base intermédiaire sera appelée R_1, et comportera un vecteur noté $\vec{w}$).

Question 2 Donner les composantes de $\vec{y}$ dans R. Et déterminer : $\vec{w} \wedge \vec{k}, \vec{w} \wedge \vec{y}$ et $\vec{y} \wedge \vec{i}$.

Exercice 3

On considère les rotations des bases définies ci-dessous :

$$R_0\left(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}0\right) \xrightarrow{\psi/z_0} R_1\left(O, \vec{x}_1, \vec{y_1}, \vec{z_0}\right) \xrightarrow{\theta/\vec{x_1}} R_2\left(O, \vec{x_1}, \vec{y_2}, \vec{z_2}\right) \xrightarrow{\rho/\vec{z_2}} R_3\left(O, \vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_2}\right)$$

Question 1 Tracer les figures planes de rotation.

Question 2 Calculer $\overrightarrow{x_3} \cdot \overrightarrow{x_0}$ (effectuer le minimum possible de projections)

Question 3 Déterminer par la méthode directe :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right]_{R2}, \left.\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right]_{R1} \text{ et } \left.\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right]_{R0}$$

Question 4 Donner les vecteurs vitesse de rotation suivants : $\vec{\Omega}_{(R1/R0)}, \vec{\Omega}_{(R_3/R_1)}$ et $\vec{\Omega}_{(R_3/R0)}$.

Question 5 Déterminer les expressions compactes des dérivées suivantes (dérivation composée) :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R0}, \left.\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right]_{R1} \text{ et } \left.\frac{d\overrightarrow{y_3}}{dt}\right]_{R0}$$

Exercice 4

L'espace étant rapporté à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, soit deux points $A(2, -1, 3)_R$ et $B(3, -2, 4)_R$. On considère les deux torseurs :

$$\{T_1\} = {}_A\left\{ \begin{matrix} 2\vec{x} \\ \vec{y} + 3\vec{z} \end{matrix} \right\} \quad \textbf{et} \quad \{T_1\} = {}_B\left\{ \begin{matrix} \vec{x} + \vec{y} \\ \vec{x} + 2\vec{z} \end{matrix} \right\}$$

Question 1 Calculer le torseur $\{T\}$comme des deux torseurs précédents en A.

Question 2 Calculer le cognement (produit) des deux torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$.

Question 3 Donner les deux invariants de $\{T_1\}$.

Question 4 Montrer que $\{T_1\}$ est un glisseur, et déterminer les coordonnées du point I où son moment est nul.

Exercice 5

Dans un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, on considère deux torseurs :

$$\{T_1\} = {}_A\left\{ \begin{matrix} 2\vec{x} \\ 3\vec{x} + \vec{y} \end{matrix} \right\} \quad \textbf{et} \quad \{T_1\} = {}_B\left\{ \begin{matrix} \vec{x} - \vec{z} \\ 3\vec{y} \end{matrix} \right\} \quad \text{tel que : A}(2, -1, 3)_R$$

Question 1 Lequel des deux torseurs est particulier ? Préciser sa nature.

Question 2 Calculer l'invariant scalaire de chacun des deux torseurs.

Question 3 Réduire $\{T_2\}$ au point O.

Question 4 Donner la somme des deux torseurs au point 0.

Question 5 Donner la somme des deux torseurs au point A.

Question 6 Calculer leur produit.

Question 7 Donner l'équation de l'axe central de $\{T_1\}$.

Question 8 Déterminer dans R les coordonnées du point I où le moment de $\{T_2\}$ est nul.

Exercice 6

Dans un repère orthonormé direct $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, on considère les torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$:

$$\{T_1\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} 2\vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 + 3\vec{z}_0 \end{array} \right\} \quad \textbf{et} \quad \{T_1\} = {}_O\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_2 O} \end{array} \right\}$$

Avec : $\overrightarrow{R_2}(-1,0,0)_R$; $\overrightarrow{M_{20}}(-1,1,4)_R$ et $A(3,1,0)_R$

Question 1 Donner les deux invariants de $\{T_1\}$.

Question 2 Montrer que $\{T_1\}$ est un glisseur, et déterminer les coordonnées du point I où son moment est nul.

Question 3 Quel est l'axe central de $\{T_1\}$?

Question 4 Réduire $\{T_1\}$ au point O ;

Question 5 Déterminer le torseur $\{T\}$ Somme de $\{T_1\}$ et $\{T_1\}$ réduit en O ;

Question 6 Calculer le comoment de $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$;

On définit le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \alpha$

Question 7 Tracer la figure plane de rotation ;

Question 8 Déterminer $\{T_1\}$ réduit en A dans R_1 ;

Question 9 Compléter alors les torseurs suivants :

$$\{T_1\} = {}_A\left\{ \begin{array}{cc} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}_{R_1}$$

$$\{T_1\} = {}_O\left\{ \begin{array}{cc} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}_{R_1}$$