



MODÉLISATION DES MÉCANISMES

Cours

v1.1

CPGE - MARRAKECH

1 Préambule

L'objectif de ce cours est de montrer les outils permettant de **modéliser** des systèmes mécaniques pour ensuite pouvoir mener différentes études à partir de ce modèle.

2 Hypothèses – Définitions

2.1 Les solides

Dans tout ce cours, on fait l'hypothèse que les éléments étudiés (solides) ne se déforment pas.



Définition *Solide indéformable*

On définit donc un **solide indéformable** par un ensemble de points dont la distance entre eux ne varie pas au cours du temps :

$$\forall A \in S, \forall B \in S, \|\overrightarrow{AB}\| = \text{cste} \quad \forall t$$

2.2 Les contacts

Lorsqu'un système est constitué de plusieurs **solides indéformables**, certains sont en contact ; on dit alors qu'ils sont en liaison les uns avec les autres.



Définition *Liaison entre solides*

Une liaison entre deux solides est une relation de contact entre ces deux solides.

Ce contact est caractérisé par sa géométrie (point, droite, arc de cercle, plan...) et par les mouvements relatifs qu'il autorise. L'analyse des liaisons se fait toujours en considérant **la nature des contacts**.

2.2.1 Contact ponctuel



Définition *Contact ponctuel*

Deux solides S_1 et S_2 sont en contact ponctuel si l'intersection de leur représentation géométrique est un point.



FIGURE 1 – Exemples de contacts ponctuels

Exemples : contact sphère/sphère, sphère/plan, cône/plan, cylindre/cylindre...

2.2.2 Contact linéique



Définition *Contact linéique*

Deux solides S_1 et S_2 sont en contact linéique si l'intersection de leur représentation géométrique est une ligne.

En pratique, on se limitera à deux type de lignes : la droite (contact linéique rectiligne) et le cercle (contact linéique circulaire).

Exemples : contact cylindre/plan, sphère/cylindre, dentures d'engrenages ...

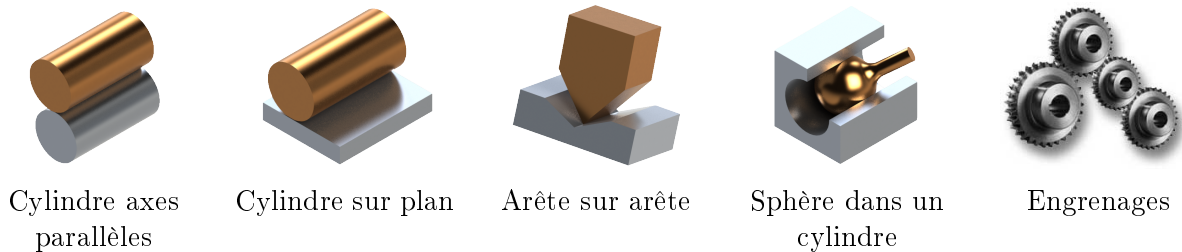


FIGURE 2 – Exemples de contacts linéiques

2.2.3 Contact surfacique



Définition *Contact surfacique*

Le cas général est d'avoir autour d'un point A , pour deux solides S_1 et S_2 , deux surfaces qui ont la même forme géométrique en contact. S_1 et S_2 peuvent avoir en commun une surface qui peut être gauche ou plane.

Exemples : contact plan/plan, arbre/alésage de même diamètre, sphère dans sphère...

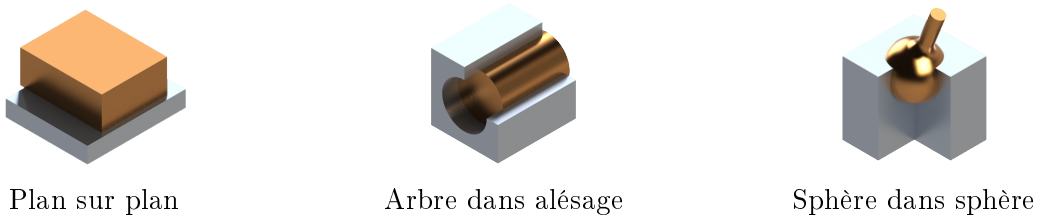


FIGURE 3 – Exemples de contacts surfaciques

2.3 Degrés de liberté autorisés par un contact

2.3.1 Repères

Pour caractériser la taille et la position des éléments d'un système, il est nécessaire de définir un (ou plusieurs) repère qui sera attaché à un référentiel donné.

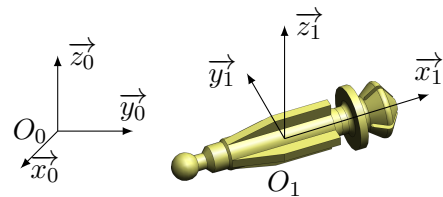


Définition Repère

Un repère est constitué d'une origine et d'une base orthonormée b constituée de 3 axes. Ainsi, $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) = (O_0, b_0)$ est le repère d'origine O_0 et de base b_0 .

Étudier le mouvement d'un solide S_1 par rapport à un solide S_0 muni d'un repère R_0 revient à l'étudier par rapport à ce repère :

$$\text{Mvt}_{S_1/S_0} = \text{Mvt}_{S_1/R_0}$$



2.3.2 Paramètres de position d'un solide dans l'espace

Afin de positionner un solide dans l'espace, il est nécessaire de connaître le nombre de paramètres nécessaires au positionnement d'un solide S_1 par rapport à un référentiel S_0 muni d'un repère $R_1 (O_1, b_1)$. Le solide S_1 est muni d'un repère $R_1 (O_1, b_1)$.

Il est usuel en mécanique de considérer :

- les trois coordonnées du point origine du repère R_1 dans le repère R_0 définissant 3 translations ;
- les trois angles qui définissent la position de la base du repère R_1 par rapport à celle du repère R_0 , définissant 3 rotations.

Quand un angle est défini, on lui associe une figure de **calcul** ou figure **géométrale** (ou figure **plane**) permettant de réaliser facilement des projections

2.3.3 Degrés de liberté



Définition Degrés de liberté

6 paramètres sont donc nécessaires pour repérer un solide par rapport à un autre solide. On parle de **degrés de liberté**.

3 Rotations	3 Translations
R_x , rotation d'axe (A, \vec{x})	T_x , translation d'axe \vec{x}
R_y , rotation d'axe (A, \vec{y})	T_y , translation d'axe \vec{y}
R_z , rotation d'axe (A, \vec{z})	T_z , translation d'axe \vec{z}

TABLE 1 – Possibilités de mouvement d'un solide dans l'espace

On note le tableau des degrés de liberté :

$$\begin{vmatrix} R_x & T_x \\ R_y & T_y \\ R_z & T_z \end{vmatrix}$$



Remarque

Une liaison entre deux solides supprime des degrés de liberté.

Pour caractériser les liaisons, on définit un repère local $R(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à partir des caractéristiques géométriques des contacts (point, droite, centre, axe, normale...).

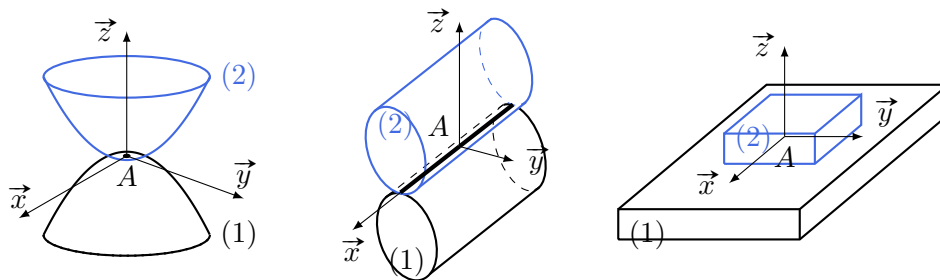


FIGURE 4 – Nature du contact et repère local associé

Ce repère est ensuite associé à chaque solide. On détermine alors les **possibilités de mouvements** autorisés entre les solides (d'un repère par rapport à l'autre), **sans changer la nature du contact**.

Le nombre de degrés de liberté (**ddl**) d'une liaison entre deux solides est le nombre de **mouvements relatifs indépendants** que la liaison autorise entre ces deux solides **sans changer la nature du contact**. Ce nombre est égal au plus à 6 (pour une liaison dite **libre**). S'il est égal à 0, la liaison est appelée **liaison encastrement**.

2.4 Liaisons normalisées

2.4.1 Hypothèses de modélisation des liaisons

- les pièces mécaniques sont des solides indéformables ;
- les surfaces sont géométriquement parfaites (FIGURE 5) ;
- les jeux sont nuls (FIGURE 6) ;
- le type de contact reste le même au cours du mouvement.

La liaison parfaite est donc une liaison théorique tant d'un point de vue géométrique que d'un point de vue de la nature physique du contact.

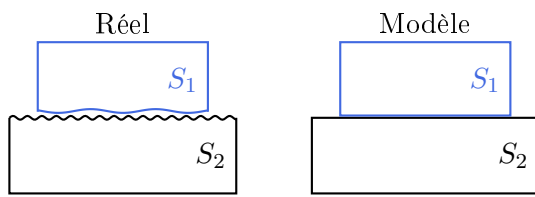


FIGURE 5 – Surface réelle (avec des défauts amplifiés) et modèle associé

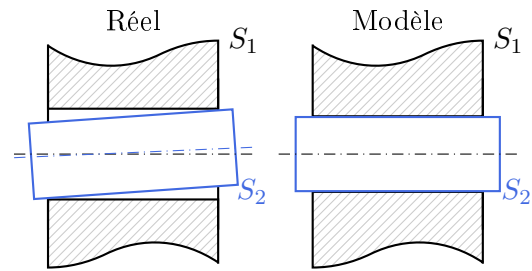


FIGURE 6 – Guidage réel avec jeu (avec des défauts amplifiés) et modèle associé

2.4.2 Liaisons élémentaires

Une liaison élémentaire entre deux solides S_1 et S_2 est obtenue à partir du contact des surfaces géométrique élémentaire liée aux S_1 et S_2

Le TABLEAU 2 donne les différentes combinaisons de surfaces et les noms de 6 liaisons normalisées :

- contact plan/sphère : liaison ponctuelle ou liaison sphère-plan ;
- contact plan/cylindre : liaison linéaire rectiligne ou liaison cylindre-plan ;
- contact plan/plan : liaison appui plan ;
- contact cylindre/sphère : liaison linéaire annulaire ou liaison sphère-cylindre ;
- contact cylindre/cylindre : liaison pivot glissant ;
- contact sphère/sphère : liaison rotule ou liaison sphérique.

	Plan	Cylindre	Sphère
Sphère			
Cylindre			
Plan			

TABLE 2 – Association de surfaces élémentaires

2.4.3 Liaisons composées

Une liaison composée est obtenue par association cohérente de liaisons élémentaires. Le TABLEAU 3 donne quelques associations possibles.

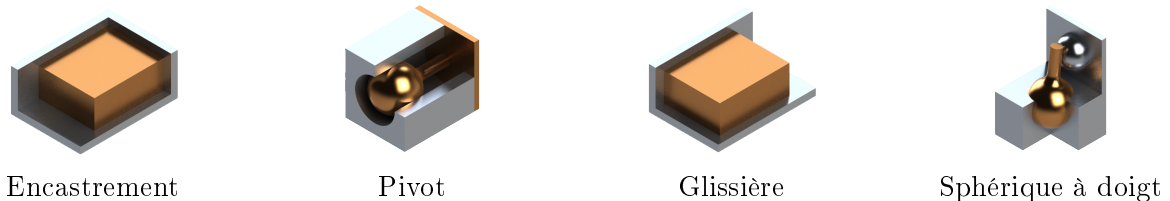
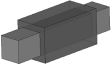
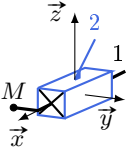
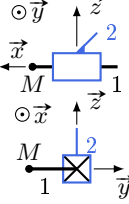

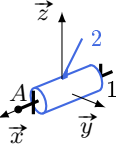
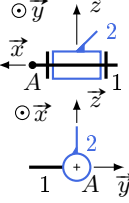

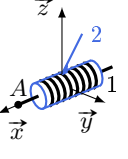
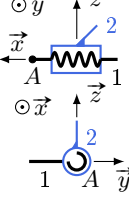
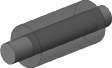
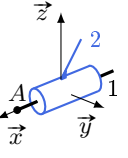
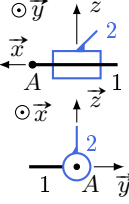
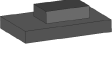
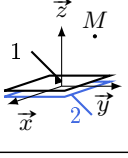
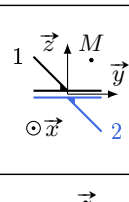

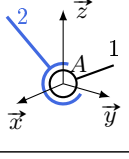
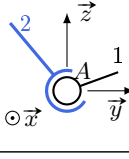


TABLE 3 – Liaisons composées

2.4.4 Tableau des liaisons normalisées

L'ensemble des normalisées est résumé dans le TABLEAU 4 à connaître par cœur.

Nom	Caractéristique	Degrés de liberté	Schéma spatial (3D)	Schéma(s) plan(s) (2D)	Mobilités
Encastrement		0 ddl			$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Glissière 	Direction \vec{x}	1 ddl			$\begin{bmatrix} 0 & T_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Pivot 	Axe (A, \vec{x})	1 ddl			$\begin{bmatrix} R_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Hélicoïdale 	Axe (A, \vec{x})	1 ddl			$\begin{bmatrix} R_x & T_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Pivot glissant 	Axe (A, \vec{x})	2 ddl			$\begin{bmatrix} R_x & T_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Appui plan 	Normale au plan \vec{z}	3 ddl			$\begin{bmatrix} 0 & T_x \\ 0 & T_y \\ R_z & 0 \end{bmatrix}$
Sphérique 	Centre de la sphère A	3 ddl			$\begin{bmatrix} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ R_z & 0 \end{bmatrix}$


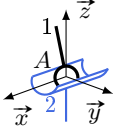
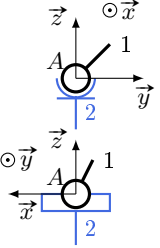
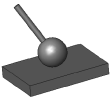
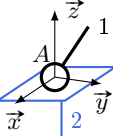
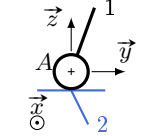

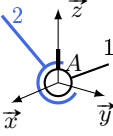
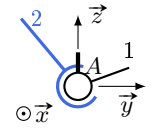

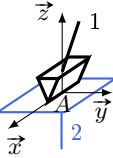
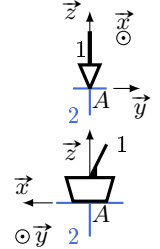
Nom	Caractéristique	Degrés de liberté	Schéma spatial (3D)	Schéma(s) plan(s) (2D)	Mobilités
 Sphère cylindre	Centre de la sphère A Direction \vec{x}	4 ddl			$\begin{bmatrix} R_x & T_x \\ R_y & 0 \\ R_z & 0 \end{bmatrix}$
 Sphère plan	Point de contact A Normale au plan \vec{z}	5 ddl			$\begin{bmatrix} R_x & T_x \\ R_y & T_y \\ R_z & 0 \end{bmatrix}$
 Sphérique à doigt	Centre de la sphère A Normale au plan \vec{x} Direction du doigt \vec{z}	2 ddl			$\begin{bmatrix} R_x & 0 \\ 0 & 0 \\ R_z & 0 \end{bmatrix}$
 Linéaire rectiligne (ou cylindre plan)	Droite de contact (A, \vec{x}) Normale au plan \vec{z}	4 ddl			$\begin{bmatrix} R_x & T_x \\ 0 & T_y \\ R_z & 0 \end{bmatrix}$

TABLE 4 – Tableau des liaisons normalisées

Application : voir TD1 - Système d'orientation de phare - Q1

3 Modélisation d'un mécanisme



Définition *mécanisme*

Un mécanisme est un ensemble de **pièces** mécaniques (**solides**) reliées entre elles par des **liaisons** pour accomplir un service.

La définition d'un **modèle** du mécanisme nécessite la mise en place :

- des **classes d'équivalence** ou groupes de pièces sans mouvement relatif ;
- des **liaisons** entre ces classes d'équivalence.

3.1 Classes d'équivalence

3.1.1 Définition



Définition Classes d'équivalence

Une **classe d'équivalence cinématique** est un ensemble de pièces **qui n'ont aucun mouvement relatif** entre elles. Elles sont liées complètement entre elles (par des liaisons encastrement) et ont donc le même mouvement.

3.1.2 Règles à respecter pour la détermination des classes d'équivalence

- les pièces qui se déforment (ressorts, amortisseurs...) ne sont pas prises en compte dans la modélisation des liaisons (FIGURE 7a) ;
- les éléments roulants des roulements (qui constituent chacun un groupe cinématique) ne sont pas pris en compte. On ne s'intéresse qu'aux bagues intérieure et extérieure (voir FIGURE 7b) ;

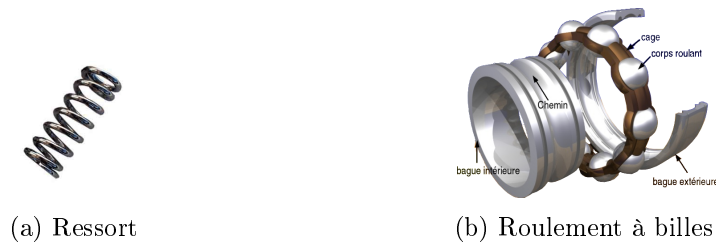


FIGURE 7 – Exemples de composants à ne pas prendre en compte

3.2 Graphe de liaisons

3.2.1 Définition



Définition Graphe de liaisons

Le graphe de liaisons est une représentation graphique qui répertorie les classes d'équivalence et les modèles de liaisons entre celles-ci (exemple FIGURE 8). Pour établir un graphe de liaisons, il faut :

1. **déterminer** les classes d'équivalence cinématiques et dessiner un cercle par classe nommée ;
2. pour chaque contact, **déterminer** les mouvements autorisés sans changer la nature du contact et en déduire le type de liaison à l'aide du tableau des liaisons normalisées ;
3. **nommer** et **caractériser** chaque liaison sur le graphe des liaisons.

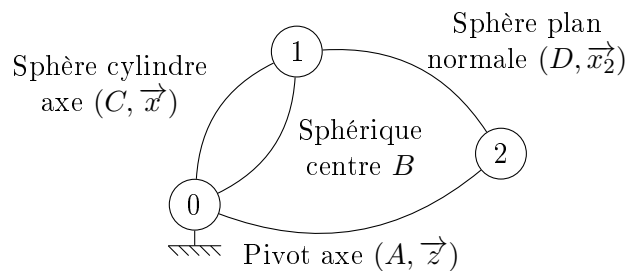


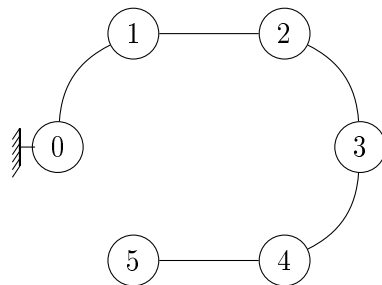
FIGURE 8 – Exemple de graphe de liaisons d'un mécanisme

La construction du graphe de liaisons peut conduire à trois cas différentes :

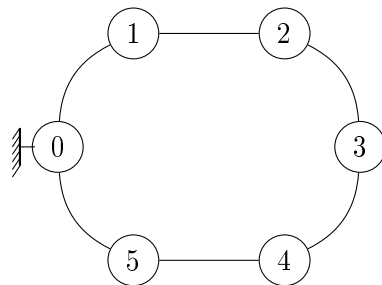
Une **chaîne ouverte** est constituée d'une association en série de solides (ou classes d'équivalence) et de liaisons.

Une **chaîne fermée** est constituée d'un ensemble de solides (ou classes d'équivalence) reliés par de multiples liaisons.

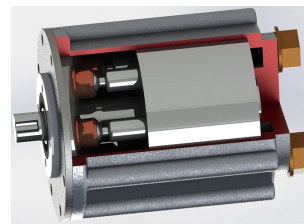
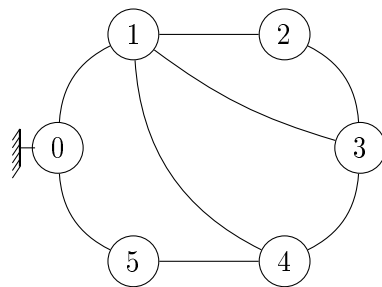
Lorsque le modèle du mécanisme comporte plusieurs boucles, le modèle est dit à **chaînes complexes**.



(a) Chaîne ouverte - exemple d'un robot



(b) Chaîne fermée simple - exemple de la perceuse



(c) Chaînes complexes - exemple d'une pompe à pistons axiaux

FIGURE 9 – Graphe de liaisons et structure de mécanismes

Application : voir TD1 - Système d'orientation de phare - Q2 et Q3

4 Représentation d'un modèle : le schéma cinématique

4.1 Description

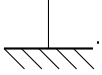
Le schéma cinématique d'un mécanisme est une figure plane (2D) ou spatiale (3D) qui permet :

- d'aider à la compréhension du fonctionnement du mécanisme ;

- de mener des études théoriques (géométriques, cinématiques, dynamiques...).

Le schéma cinématique est une représentation du graphe des liaisons au moyen des **symboles des liaisons normalisées**. Il doit être représentatif du mécanisme réel.

4.2 Méthode de construction

- choisir une représentation adaptée en utilisant les figures ou les vues données.
- choisir une couleur par classe d'équivalence et mettre ces couleurs sur le graphe des liaisons ;
- mettre en place les points, les axes, les normales... mis en évidence sur le graphe des liaisons en les positionnant comme sur les images données du mécanisme (photo, représentation volumique) ;
- mettre en place les symboles normalisés des liaisons autour de ces points, de ces axes en utilisant les caractéristiques des liaisons pour les déplacer si nécessaire (utiliser obligatoirement les deux couleurs des classes d'équivalence identifiées) ;
- relier les sorties des symboles pour reconstituer les classes d'équivalence (relier les couleurs entre elles) en respectant le parallélisme. Reporter les numéros des classes d'équivalence si besoin sur le schéma. Utiliser le symbole du bâti (pièce fixe) à plusieurs endroits si nécessaire .

Application : voir TD1 - Système d'orientation de phare - Q4

5 Modélisation plane

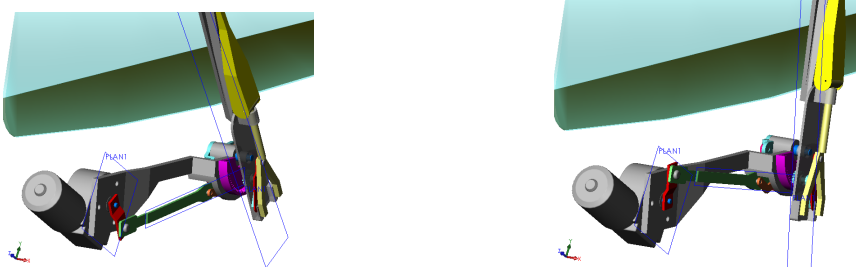
5.1 Définition du mouvement plan



Définition *Mouvement plan*

Le mouvement d'un solide S_2 par rapport à un solide S_1 est dit plan si il existe un plan Π_2 lié à S_2 qui reste coïncident avec un plan Π_1 lié à S_1 au cours du mouvement.

Exemple : essuie-glace Mercedes



Les plans représentés par des cadres sur la figure ci-dessus coïncident entre eux au cours du mouvement.

Conséquences : le paramétrage du solide S_2 par rapport au solide S_1 ne nécessite que **3 paramètres** (positionnement d'un point dans un plan ou dans l'espace) :

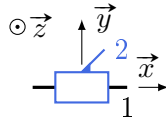
- 2 translations dans le plan ;

- 1 rotation d'axe perpendiculaire au plan (on parle d'articulation en un point donné dans ces conditions).

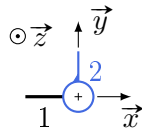
5.2 Modèles de liaisons planes

Dans le cas d'un mouvement plan, compte tenu des mouvements possibles, on distingue :

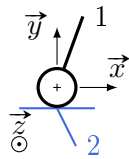
- la liaison glissière qui permet un mouvement de translation (ci-dessous, le symbole dans le plan de la liaison glissière de direction x)




- la liaison pivot qui permet un mouvement de rotation (d'axe perpendiculaire au plan), on parle généralement d'articulation en un point (ci-dessous, le symbole d'une liaison pivot d'axe orthogonal au plan du mouvement)



- la liaison sphère-plan qui permet à la fois un mouvement de translation dans le plan et un mouvement de rotation d'axe perpendiculaire au plan (ci-dessous, le symbole dans le plan d'une liaison sphère-plan permettant une translation suivant l'axe \vec{x})



Le référentiel est représenté par le symbole ci-après. Le référentiel est aussi appelé bâti .

En analysant les mouvements entre les solides qui constituent un mécanisme plan, on peut alors définir un schéma de mouvement à l'aide des symboles précédents.

5.3 Schéma cinématique d'une modélisation plane

En modélisation plane uniquement :

- **on ne schématise pas des modèles de liaison** (on ne tient pas compte de la géométrie des contacts) ;
- on représente les **mouvements relatifs entre deux pièces dans le plan d'étude**.

Le schéma établi est donc un schéma de mouvement. Il utilise les symboles des liaisons préconisés par l'*AFNOR*, non pas comme tels, mais pour définir des mouvements relatifs. C'est là toute l'ambiguïté. Ce subtil distinguo demande beaucoup de vigilance. Il est utilisé pour simplifier les études théoriques.

Application : voir TD1 - Système d'orientation de phare - Q5-Q6