



CINÉMATIQUE DU SOLIDE INDÉFORMABLE

TD

Nom :

v1.3

CPGE - MARRAKECH

1 Exercice 1 : ÉOLIENNE

1.1 Présentation : Données et paramétrages

Une éolienne est un système qui permet de **transformer l'énergie des vents en énergie électrique**. Son schéma est représenté sur la figure ci-dessous (Figure 1). Elle constituée de trois solides :

- **0** : Bâti. Repère lié : $R_0 (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- **1** : Bloc oscillant. Repère lié : $R_1 (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. Mouvement de **1** par rapport à **0** : rotation autour de $(A, \vec{z}_0)$, de paramètre $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.
- **2** : Hélice. Repère lié : $R_2 (G_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. Mouvement de **2** par rapport à **1** : rotation autour de $(G_2, \vec{x}_1)$, de paramètre $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) \cdot \overrightarrow{AG_2} = L\vec{x}_1$; $\overrightarrow{CA} = h\vec{x}_1 + b\vec{z}_1$ et $\overrightarrow{G_2B} = r\vec{y}_2$. L, h, b et r sont des constantes.

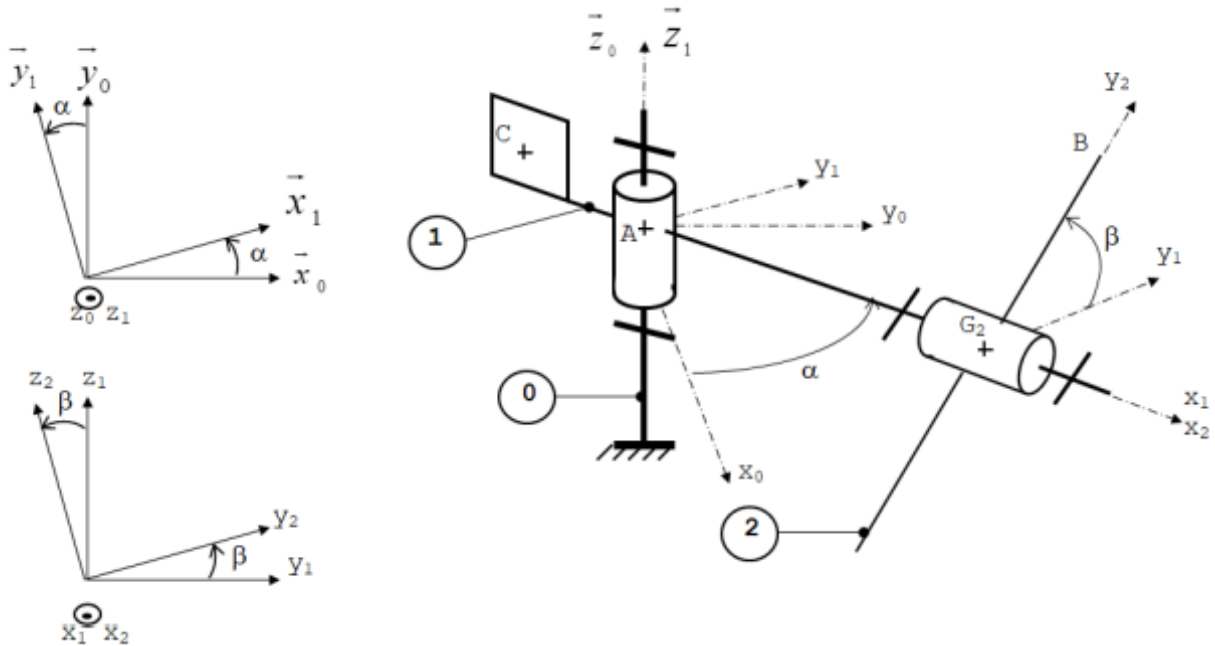


FIGURE 1 – Modélisation et paramétrage

1.2 Travail demandé

Question 1 Dresser le schéma de structure du mécanisme.

Question 2 Exprimer $\vec{\Omega}_{(1/R0)}$ et $\vec{\Omega}_{(2/R0)}$.

Question 3 Calculer $\overrightarrow{V_{C \in 1/R0}}$ par dérivation.

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{V_{G_2 \in 1/R_0}}$ par la relation de transport des vitesses.

Question 5 Exprimer $\overrightarrow{V_{B \in 2/R_0}}$ par la relation de composition.

Question 6 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma_{B \in 2/R_0}}$.

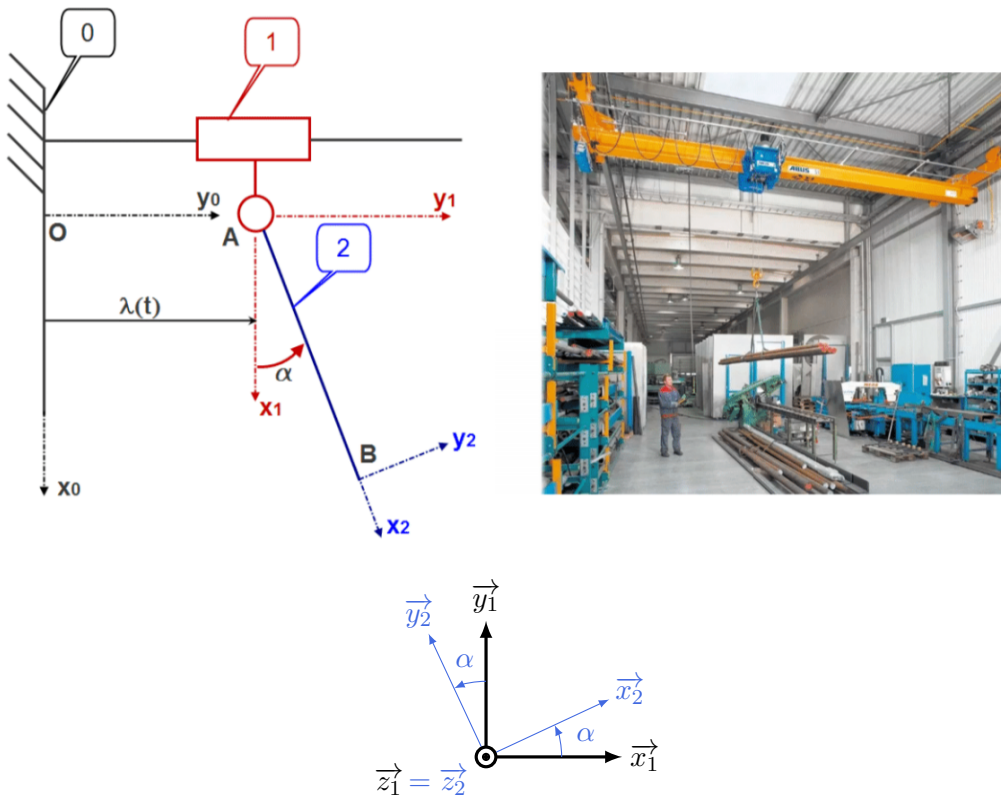
Question 7 Calculer : $\vec{x}_0 \cdot \overrightarrow{\Gamma_{C \in 1/R_0}}$.

Question 8 Exprimer : $\vec{x}_1 \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G_2 \in 2/R_0}}$.

2 Exercice 2 : Mécanisme de transport de charge

2.1 présentation : Données et paramétrages

Un mécanisme de transport de charge (pont roulant) est constitué d'un rail fixe (0), d'un chariot mobile (1) en liaison glissière avec ce dernier, d'un bras rigide (2) articulé en A sur le chariot. La charge est situé en B. Le mécanisme évolue dans le plan vertical. Les liaisons sont parfaites. Le but de cet exercice est d'analyser le mouvement du bras et donc de la charge lors des séquences d'accélération et de mouvement uniforme du chariot



Le paramétrage est le suivant :

- Solide 0 de repère associé $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
- Solide 1 de repère associé $R_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ tel que $\overrightarrow{OA} = \lambda(t)\vec{y}_0$
- Solide 2 de repère associé $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ tel que $\overrightarrow{AB} = b\vec{x}_2$ et $\alpha(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$



Attention

La projection des résultats demandés dans la base B_0 ne présente aucun intérêt et n'est pas demandé.

2.2 Travail demandé

Question 1 Définir un vecteur position pour B par rapport à (0) à l'aide du paramétrage.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{V_{A \in 1/0}}$ en fonction du paramétrage (Par dérivation)

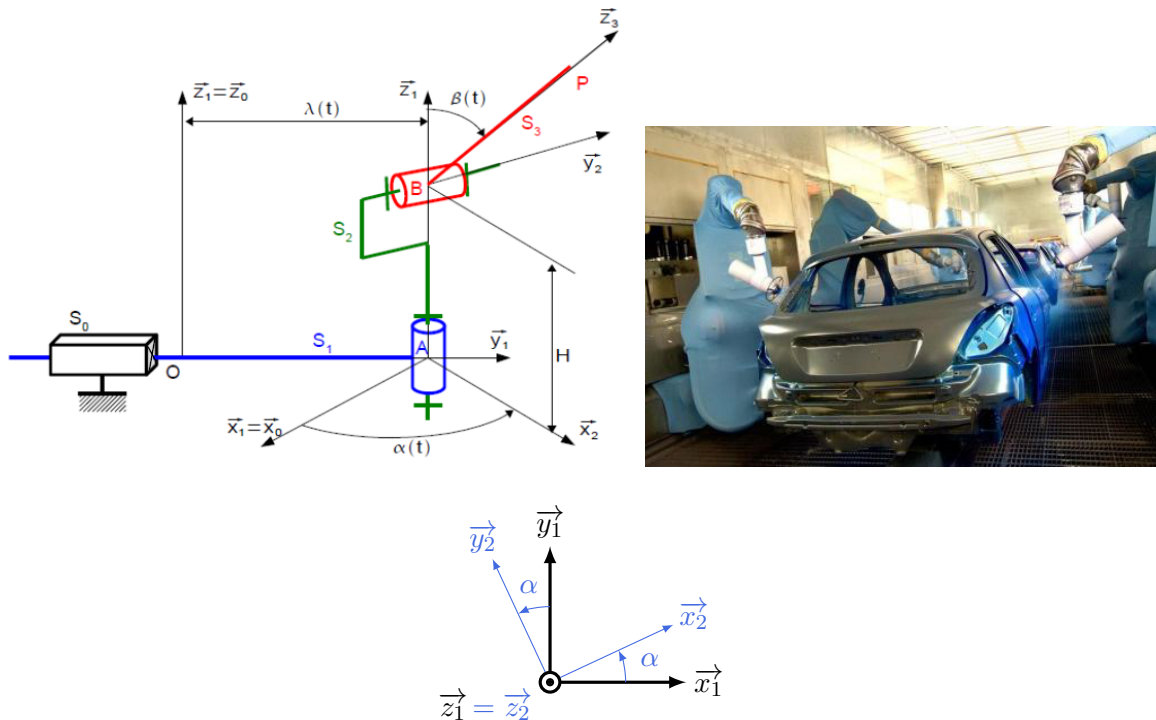
Question 3 Déterminer $\overrightarrow{V_{B \in 2/0}}$ en fonction du paramétrage (Par trois méthodes)

Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma_{B \in 2/0}}$ en fonction du paramétrage.

3 Exercice 3 : Robot de peinture

3.1 Présentation, données et paramétrage

On étudie un robot de peinture de voiture. Ce robot se déplace par rapport à une carrosserie de voiture, et projette dessus de la peinture. Le modèle cinématique du robot est donnée sur la figure ci-dessous :



- Le chariot S_1 , auquel on associe le repère $R_1 (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est en mouvement de translation de direction $\vec{y}_0$ par rapport au bâti S_0 , de repère $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- Le corps S_2 auquel on associe le repère $R_2 (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, est en mouvement de rotation d'axe $(B, \vec{z}_0)$ avec le chariot S_1 .
- Le bras S_3 , auquel on associe le repère $R_3 (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, est en mouvement de rotation d'axe $(B, \vec{z}_2)$ avec le corps S_2 .

- Le paramétrage est le suivant :
 - ◊ $\overrightarrow{AB} = H \cdot \overrightarrow{Z_1}$ $\overrightarrow{OA} = \lambda(t) \cdot \overrightarrow{y_0}$ $\overrightarrow{BP} = L \cdot \overrightarrow{z_3}$
 - ◊ $\alpha = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$ $\beta = (\overrightarrow{z_2}, \overrightarrow{z_3})$

3.2 Travail demandé

- Question 1** Déterminer les vitesses angulaires : $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$ et $\overrightarrow{\Omega(3/2)}$
- Question 2** Déterminer les vitesses linéaires : $\overrightarrow{V_{A \in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{A \in 2/1}}$ et $\overrightarrow{V_{A \in 3/2}}$
- Question 3** Déterminer les torseurs cinématiques : $\{V_{(1/0)}\}_A$, $\{V_{(2/1)}\}_A$ et $\{V_{(3/2)}\}_A$
- Question 4** En déduire le torseur cinématique : $\{V_{(3/0)}\}_A$
- Question 5** Déterminer la vitesse du point $\overrightarrow{V_{P \in 3/0}}$, (sans faire la dérivée).

4 Exercice 4 : Manipulateur MANUMAX

4.1 Présentation, données et paramétrages

Les manipulateurs MANUMAX exécutent des mouvements combinés et répétitifs selon un cycle déterminé. Ils sont adaptables à plusieurs tâches : chargement et déchargement d'une machine, assemblage de pièces... La figure 2 donne la schématisation adoptée pour l'étude de l'ensemble automatique de manipulation.

Le mécanisme est constitué de 4 solides : 0, 1, 2 et 3.

- Solide 0 : Socle (Bâti) : Repère lié $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$;
- Solide 1 : Corps : Repère lié $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_0})$. Le mouvement de 1/0 est une rotation d'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$ et de paramètre $\alpha(t)$. $\overrightarrow{OG_1} = a \cdot \overrightarrow{z_0}$;
- Solide 2 : Bras : Repère lié $R_2(O_2, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_0})$. Le mouvement de 2/1 est une translation d'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$ et de paramètre z tel que : $\overrightarrow{OO_2} = z \cdot \overrightarrow{z_0} + l_2 \cdot \overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{O_2G_2} = -a \cdot \overrightarrow{x_1}$;
- Solide 3 : Main avec la pièce qu'elle teint : Repère lié $R_3(OG_3, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$. Le mouvement de 3/2 est une translation et rotation d'axe $(O_2, \overrightarrow{x_1})$ de paramètres $\beta(t)$ et $x(t)$ tel que : $\overrightarrow{O_2G_3} = x \cdot \overrightarrow{x_1}$.

4.2 Travail demandé

- Question 1** Tracer les figures planes de rotation ;
- Question 2** Déterminer $\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{3/R_0}}$;
- Question 3** Justifier le choix de la base du repère lié à 2 ;
- Question 4** Déterminer $\overrightarrow{V_{G_1 \in 1/R_0}}$ et $\overrightarrow{\Gamma_{G_1 \in 1/R_0}}$ par dérivation ;
- Question 5** Déterminer $\overrightarrow{V_{G_2 \in 2/R_0}}$ par la relation de champ ;
- Question 6** Calculer $\overrightarrow{\Gamma_{G_2 \in 2/R_0}}$;
- Question 7** Déterminer $\overrightarrow{V_{G_3 \in 3/R_0}}$ par composition. (Faire apparaître le mouvement de 3/2, de 2/1 et de 1/0) ;

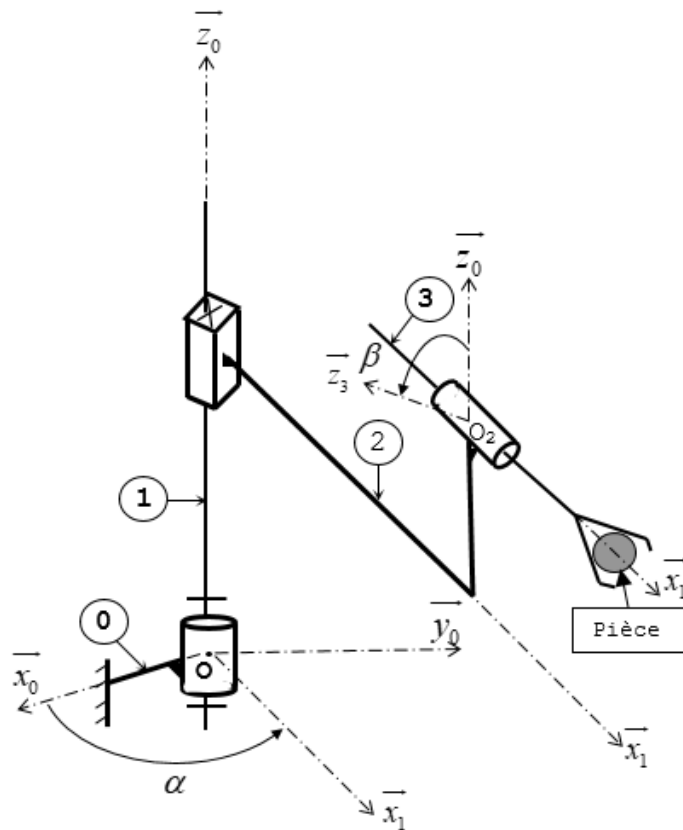


FIGURE 2 – Schéma du manipulateur MANUMAX

Question 8 Spécifier les trajectoires du point G_3 dans le mouvement relatif et dans les deux mouvements d'entraînement ;

Question 9 Déterminer $\vec{y}_1 \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G_3 \in 3/R_0}}$;

Question 10 Donner les torseurs cinématiques de 1/0, de 2/1 et de 3/2 réduits aux points G_1 , G_2 et G_3 respectivement.

5 Exercice 5 : Scie sauteuse

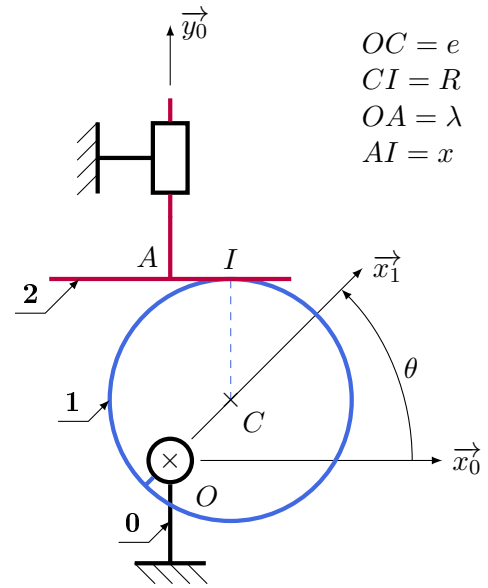
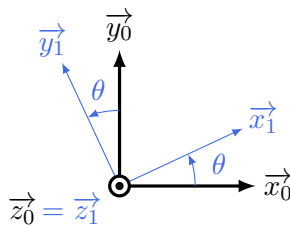
5.1 Présentation : Données et paramétrages

Le système de transformation dans ce type de scie sauteuse est un système par came à excentrique.

Réal : scie sauteuse

= modélisation $\Rightarrow$

Modèle cinématique associé



$$\begin{aligned} OC &= e \\ CI &= R \\ OA &= \lambda \\ AI &= x \end{aligned}$$

5.2 Travail demandé

Question 1 Écrire la Fermeture géométrique et Exprimer la loi entrée/sortie géométrique : $\lambda = f(\theta)$. En déduire la loi entrée /sortie cinématique : $\dot{\lambda} = f(\dot{\theta})$

Question 2 Exprimer le vecteur vitesse de glissement en utilisant la composition des mouvements.

Question 3 Exprimer ce vecteur vitesse de glissement en fonction de θ .

Question 4 Traduire la condition cinématique de maintien de contact au point I (entre 2 et 1). Retrouver la loi entrée sortie cinématique $\dot{\lambda}$ et $\dot{\theta}$.

6 Exercice 6 : Table élévatrice

6.1 Présentation, données et paramétrages

On considère le mécanisme représenté sur la figure 3. Il se compose de quatre solides : 0, 1, 2 et 3.

- **Solide 0 :** Bâti fixe, auquel est associé le repère $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- **Solide 1 :** Bras pivotant, auquel est lié le repère $R_1 (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$. Le mouvement de 1 par rapport à 0 est une rotation d'axe $(O, \vec{z}_0)$, de paramètre $\alpha(t)$. $\vec{OB} = l_1 \cdot \vec{x}_1$;
- **Solide 2 :** Galet cylindrique de rayon $\frac{D_2}{2}$, auquel est lié le repère $R_2 (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$. Le mouvement de 2 par rapport à 1 est une rotation d'axe $(B, \vec{z}_0)$ paramétrée par $\beta(t)$. **J** est le point de contact entre 2 et 3 ;
- **Solide 3 :** Plate-forme. Repère associé : $R_3 (G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Le mouvement de 3 par rapport à 0 est une translation de direction $\vec{y}_0$, et de paramètre y , tel que : $\vec{OG} = y(t) \cdot \vec{y}_0$.

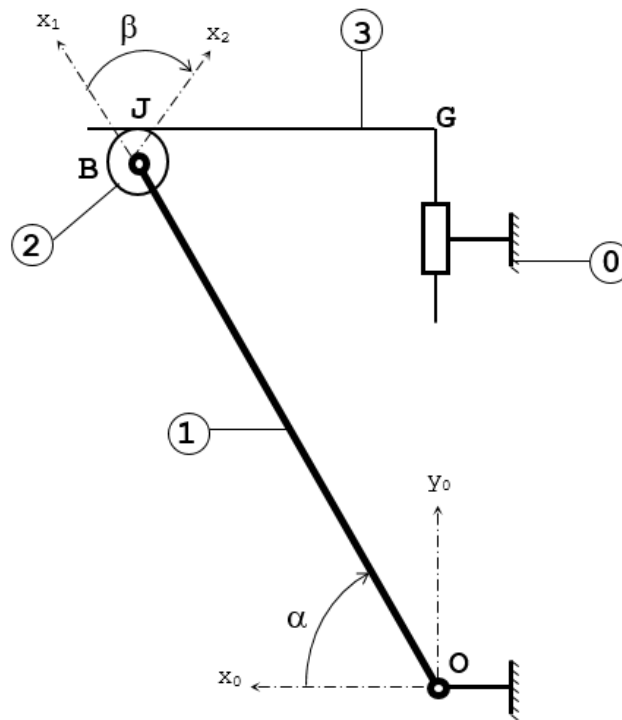


FIGURE 3 – Mécanisme d'étude

6.2 Travail demandé

Question 1 Tracer le schéma de structure du mécanisme ;

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{2/0}}$;

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{V_{J \in 2/0}}$ puis $\overrightarrow{V_{J \in 3/0}}$ par la relation de champ. Dédurre $\overrightarrow{V_{J \in 3/2}}$: vitesse de glissement en J , entre les solides 2 et 3 ;

Question 4 Dédurre alors une relation entre $\dot{y}(t)$ et $\dot{\alpha}(t)$;

Question 5 Sachant qu'il y'a roulement sans glissement en J entre les solides en contact, déduire une relation entre $\dot{\beta}(t)$ et $\dot{\alpha}(t)$.Conclure.

7 Exercice 7 : POUSSOIR A ROULETTE

7.1 Présentation

Un poussoir à roulette est représenté par le schéma cinématique suivant (Voir figure 4) :

- Le plateau 3 est lié au bâti par une liaison glissière de direction $\vec{y}_0$. Le repère $R_3 (C, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié à 3. On pose : $\overrightarrow{BC} = \lambda \cdot \vec{y}_0$.
- Au bâti 0 est associé le repère $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On pose : $\overrightarrow{OB} = b \cdot \vec{x}_0$ (b constante).
- Le bras 1 est lié au bâti 0 par une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$. Le repère $R_1 (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est lié à 1. On pose : $\overrightarrow{OA} = a \cdot \vec{x}_1$; $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.

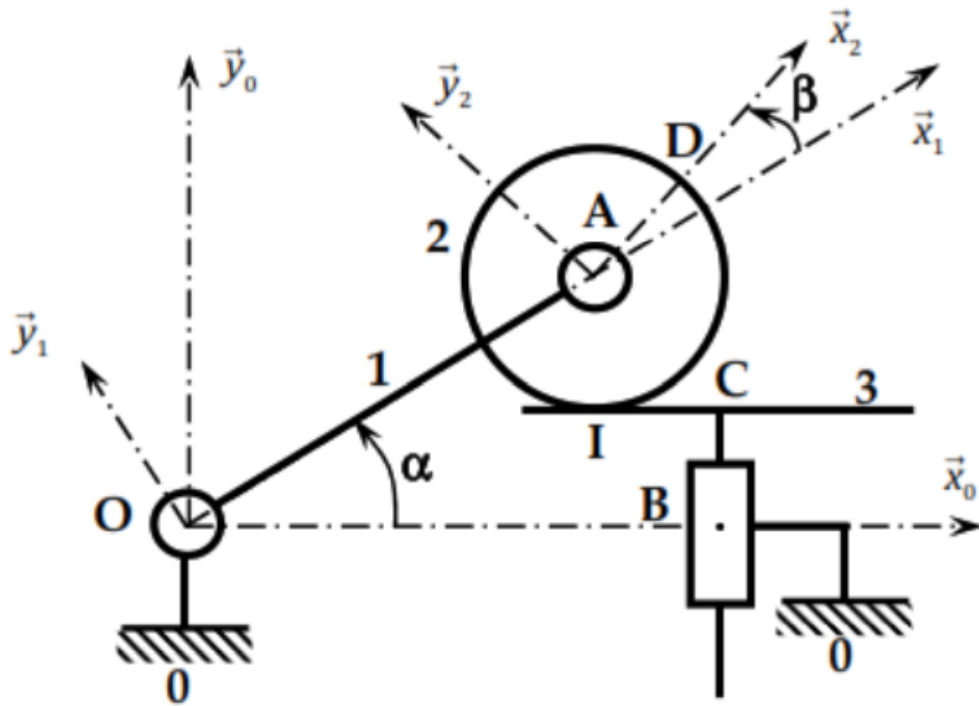


FIGURE 4 – Modélisation et paramétrage

- La roulette 2, de rayon R , est liée au bras 1 par une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$. Le repère $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ est lié à 2 et on pose : $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.
- La roulette 2 est en contact en I avec le plateau 3. Un système non représenté assure le maintien de contact. On pose $\vec{IC} = \mu \cdot \vec{x}_0$. Soit D un point de la roulette 2 tel que : $\vec{AD} = R \cdot \vec{x}_2$.

7.2 Travail demandé

Question 1 Tracer les figures planes faisant apparaître les différentes rotations.

Question 2 Donner, sous leurs formes les plus simples, les torseurs cinématiques des mouvements suivants :

$$\{v(1/0)\}, \{v(2/1)\} \text{ et } \{v(3/0)\}.$$

Question 3 En déduire les torseurs cinématiques $\{v(2/0)\}$ réduit en A puis en I et $\{v(2/3)\}$ réduit en I.

Question 4 Traduire la condition cinématique de maintien de contact au point I. En déduire une relation entre $\dot{\alpha}$ et $\dot{\lambda}$.

Question 5 Retrouver la relation entre $\dot{\alpha}$ et $\dot{\lambda}$ en exploitant la fermeture géométrique du cycle.

Question 6 En supposant qu'il y a roulement sans glissement en I, préciser la relation entre $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$.

Question 7 Déterminer l'accélération du point D de 2 dans son mouvement par rapport à 0 en fonction de a , R et α .