DYNAMIQUE

TD

Professeur: YASSINE FARTOUH

v1.1

CPGE - MARRAKECH

Equilibrage statique et dynamique

Les vibrations dues au mauvais équilibrage d'un solide en rotation autour d'un axe est un des phénomènes les plus fréquemment rencontrés (roues de voiture, arbres des machines-outils,...). D'où l'utilité de déceler les causes et la manière d'y remédier.

1 Modélisation

Considérons un solide (S) de masse m, de centre d'inertie G, en liaison pivot parfaite d'axe $(O,\vec{z})$ avec un bâti (S_0).

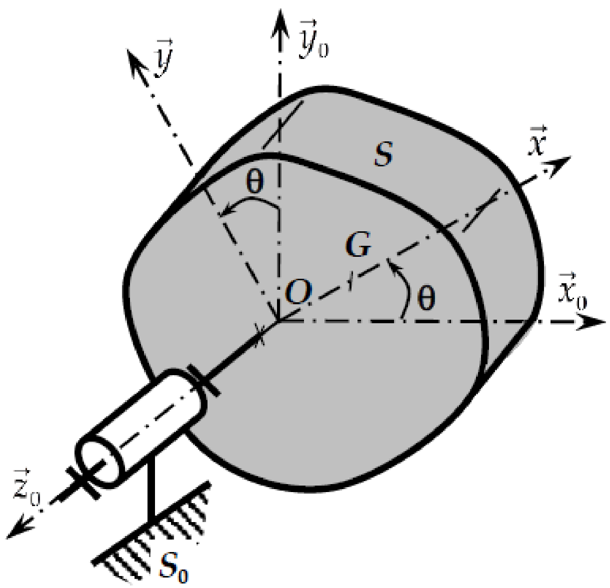


FIGURE 1 – Modélisation

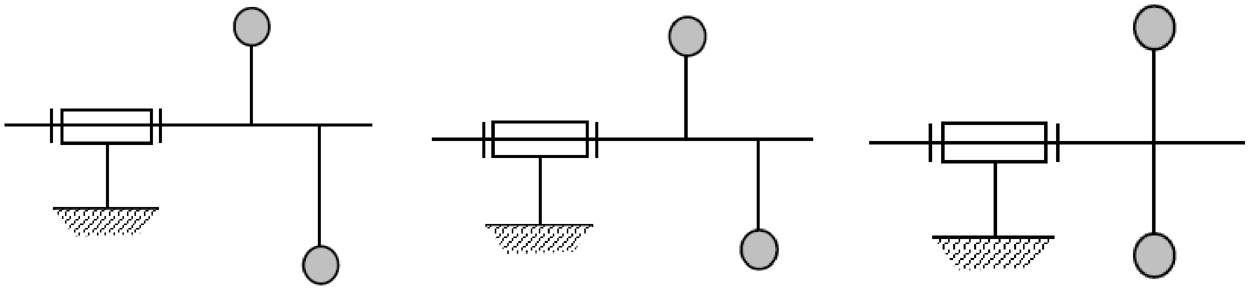
Le repère $R_0\,(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ lié au bâti (S_0) est supposé galiléen et l'axe $(O,\overrightarrow{y_0})$ est vertical ascendant. Soit $R\,(O,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z_0})$ un repère lié à (S) avec : $(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y}) = \theta$.

On pose $\overrightarrow{OG} = a.\overrightarrow{z} + b.\overrightarrow{x}$, et on donne la matrice d'inertie du solide (S) au point O, dans la base $b(\,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z_1}))$:

$$\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_b$$

2 Conditions d'équilibrage

- **Condition 1 :** Ramener le centre d'inertie G de (S) sur l'axe de rotation (O, $\vec{z}$) , on réalise ainsi l'équilibrage statique de (S) (Figure 2b)
- **Condition 2 :** Rendre l'axe de rotation (O, $\vec{z}$) principal d'inertie de (S), on réalise ainsi l'équilibrage dynamique de (S) (Figure 2c)



(a) Solide non équilibré (b) Solide équilibré statiquement (c) Solide équilibré dynamiquement

FIGURE 2 – Illustration d'equilibrage

3 Réalisation pratique de l'équilibrage

L'équilibrage peut se réaliser soit en fixant deux masselottes S_1 et S_2 sur le rotor (roues de voiture..), soit en enlevant de la matière au rotor (roues de trains, vilebrequins ...). Dans ce dernier cas, l'étude sera menée en affectant aux masselottes une « masse négative». Dans un but de simplification, on assimilera les masselottes S_1 et S_2 à des masses ponctuelles en M_1 et M_2 :

- Masselotte S_1 de masse m_1 : $\overrightarrow{OM_1} = x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z}_0$.
- Masselotte S_2 de masse m_2 : $\overrightarrow{OM_2} = x_2\vec{x} + y_2\vec{y} + z_2\vec{z}_0$.

Équilibrage statique de l'ensemble $\Sigma = S + S_1 + S_2$.

Le centre d'inertie de E étant défini par :

$$(m + m_1 + m_2) \cdot \overrightarrow{OG_\Sigma} = m\overrightarrow{OG} + m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}.$$

Exprimons que celui-ci doit appartenir à l'axe $(O, \vec{z}_0)$:

$$\overrightarrow{OG_\Sigma} \cdot \vec{x} = mb + m_1x_1 + m_2x_2 = 0 \quad (1)$$
$$\overrightarrow{OG_\Sigma} \cdot \vec{y} = m_1y_1 + m_2y_2 = 0 \quad (2)$$

Équilibrage dynamique de l'ensemble $\Sigma = S + S_1 + S_2$.

Les produits d'inertie D_Σ et E_Σ de l'ensemble Σ doivent être nuls, soit :

$$D_\Sigma = D + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 = 0 \quad (3)$$
$$E_\Sigma = E + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 = 0 \quad (4)$$

À ce stade de l'étude, on constate que l'on a 4 équations à 8 inconnues :

$$(m_1,\ m_2,\ x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2).$$

Il existe donc une infinité de solutions pour réaliser l'équilibrage.

Dans la pratique, on rencontre fréquemment des contraintes pour la fixation des masselottes. C'est le cas par exemple pour l'équilibrage des roues de voitures, les masselottes devant être fixées sur le pourtour de la jante, une de chaque côté de la roue (Figure 3).

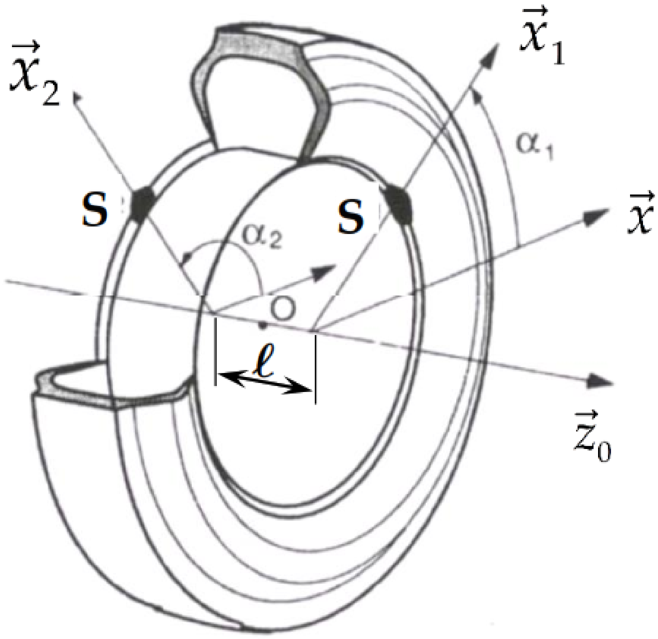


Figure 3 – équilibrage des roues de voitures

Si l'on passe aux coordonnées cylindriques par rapport au repère R lié à la roue, on a :

- pour S_1 : (R, α_1, z_1) avec : $x_1 = R\cos\alpha_1$, $y_1 = R\sin\alpha_1$, $z_1 = \ell/2$ (ℓ : largeur de la jante).
- pour S_2 : (R, α_2, z_2) avec : $x_2 = R\cos\alpha_2$, $y_2 = R\sin\alpha_2$, $z_2 = -\ell/2$.

Les 4 équations relatives à l'équilibrage deviennent à 4 inconnues (m_1, m_2, α_1 et α_2) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
mb + m_1 R\cos\alpha_1 + m_2 R\cos\alpha_2 &= 0\\
m_1 R\sin\alpha_1 + m_2 R\sin\alpha_2 &= 0\\
D + m_1 z_1 R\sin\alpha_1 + m_2 z_2 R\sin\alpha_2 &= 0\\
E + m_1 z_1 R\cos\alpha_1 + m_2 z_2 R\cos\alpha_2 &= 0
\end{aligned}$$