Corrigé DS3-ENS

Question 1

a. Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, F, E, W)$ un automate pondéré tel que L est le langage reconnu par $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{B} = (Q, \Sigma, I, F, E)$. C'est un automate fini non déterministe. u est reconnu par $\mathcal{B}$ si et seulement s'il existe une suite $e_1, \cdots, e_k$ d'éléments de E tels que, si $e_i = (p_i, a_i, q_i)$, $q_i = p_{i+1}$, $u = a_1 \cdots a_k$ et $q_1 \in I$, $q_k \in F$. Ceci équivaut $T_{\mathcal{A}}(u) > -\infty$ ce qui équivaut à $u \in Supp(L)$. Ainsi, le langage reconnu par $\mathcal{B}$ est $Supp(L)$.

b. Soit $\mathcal{B} = (Q, \Sigma, I, F, E)$ un automate fini qui reconnaît un langage L. Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, F, E, W)$ où $W : E \to \mathbb{R}$ est la fonction nulle. Alors, pour tout $u \in \Sigma^*$, $T_{\mathcal{A}}(u) = 0$ s'il existe un chemin acceptant dans $\mathcal{A}$ étiqueté par u et $T_{\mathcal{A}}(u) = -\infty$ sinon. D'après la question précédente, $Supp(L_{\mathcal{A}}) = L$. Ainsi, $u \in L$ si et seulement si $u \in Supp(L_{\mathcal{A}})$ si et seulement si $T_{\mathcal{A}}(u) > -\infty$ si et seulement si $T_{\mathcal{A}}(u) = 0$.

Question 2

a. $L = \{(u, w'u)\}$ où $w(u) = \max\{k \in \mathbb{N} \,/\, w \in \Sigma^*.ab^k.a.\Sigma^*\}$.

b. On pose $Q = \{0, 1\}$, $I = \{0, 1\}$, $F = \{0, 1\}$, $E = \{(0, a, 0); (0, b, 0); (1, a, 1); (1, b, 1)\}$ et $W(0, a, 0) = W(1, b, 1) = 1$, $W(0, b, 0) = W(1, a, 1) = 0$. Alors $(Q, \{a, b\}, I, F, E, W)$ reconnaît le langage pondéré $\{\big(u, \max(|u|_a, |u|_b)\big)\}$.

Question 3

a. Notons W la fonction poids de l'automate reconnaissant L. $L(u) = \max\{W(s) \,/\, s$ acceptant d'étiquette $u\}$. Par conséquent, si $L(u) \leq c$, pour tout chemin acceptant s d'étiquette u, $W(s) \leq L(u) \leq c$. Réciproquement, si tout chemin acceptant s d'étiquette u, $W(s) \leq c$, alors $\max\{W(s) \,/\, s$ acceptant d'étiquette $u\} \leq c$.

b. Supposons que, $\forall u \in \Sigma^*$, $L(u) \leq c$. Soit s un chemin acceptant sans cycle. Soit u le mot de ce chemin. On a donc $W(s) \leq L(u) \leq c$. Soit s un cycle élémentaire. Notons p son origine (qui est aussi son extrémité). p est utile donc il existe $i \in I$ et $f \in F$ ainsi qu'un chemin s_1 de i à p et un chemin s_2 de p à f. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, s^k la concaténation de s k fois avec lui-même. Notons t_k la concaténation de s_1, s^k et s_2. t_k est un chemin de i à f donc est acceptant. De ce fait, $W(t_k) \leq c$ donc $W(s_1) + kW(s) + W(s_2) \leq c$. La suite arithmétique $\big(W(s_1) + W(s_2) + kW(s)\big)_{k \in \mathbb{N}}$ est majorée donc sa raison $W(s)$ est négative (au sens large) donc $W(s) \leq 0$. En conclusion, tout chemin acceptant sans cycle est de poids inférieur à c et tout cycle élémentaire est de poids négatif ou nul.

Réciproquement, supposons que tout chemin acceptant sans cycle soit de poids au plus c et que tout cycle élémentaire sont de poids au plus 0. Montrons par récurrence sur la taille d'un chemin acceptant que tout chemin acceptant de l'automate est de poids au plus c.

Soit un chemin sans cycle élémentaire s. Par hypothèse $W(s) \leq c$. En particulier, si un chemin acceptant est de taille 0 ou 1, il est de poids au plus c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que tout chemin acceptant de l'automate de taille au plus n est de poids au plus c. Soit s un chemin de taille $n+1$. Si s est sans cycle, par hypothèse, il est de poids au plus c. Sinon, notons $p_0, \cdots, p_n, p_{n+1}$ les sommets de ce chemin. Soit $i_1 = \min\{i \,/\, \exists j < i_0 \,/\, p_j = p_{i_1}\}$. Soit $i_0 < i_1$ tel que $p_{i_0} = p_{i_1}$. Alors le chemin $s' = (p_0, \cdots, p_{i_0}, p_{i_1+1}, \cdots, p_{n+1})$ est un chemin acceptant de longueur au plus n qui a, par hypothèse, poids au plus c. En outre, $c = (p_{i_0}, \cdots, p_{i_1})$ est un cycle élémentaire qui a donc poids au plus 0. Ainsi, $W(s) = W(c) + W(s') \leq 0 + c = c$. Ceci prouve que, pour tout chemin acceptant s de l'automate, $W(s) \leq c$. De ce fait, pour tout $u \in \Sigma^*$, si u est reconnu par l'automate, il existe un chemin acceptant s tel que $W(s) = L(u)$ donc $L(u) \leq c$.

Question 4

Notons u_i la i-ème lettre de u et $n = |u|$. $P(u) = P\big(\bigcap_{i=1}^{n} \Sigma^{i-1}u_i\Sigma^{n-i}\big)$. $\Sigma^{i-1}u_i\Sigma^{n-i}$ est l'événement E_i ou son complémentaire. Les événements E_i sont indépendants donc, par passage au complémentaire de certains événements indépendants, les événements $\Sigma^{i-1}u_i\Sigma^{n-i}$ sont indépendants donc $P(u) = \prod_{i=1}^{n} P(\Sigma^{i-1}u_i\Sigma^{n-i})$. En notant $I_a = \{i \,/\, u_i = a\}$ et $I_b = \{i \,/\, u_i = b\}$, $P(u) = \prod_{i \in I_a} p \times \prod_{i \in I_b} (1-p) = p^{|u|_a}(1-p)^{|u|_b}$.

Question 5

a. $|X_k|_a = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{E_i}$ donc $|X_k|_a$ suit une loi binomiale de paramètres k et p donc $E(|X_k|_a) = np$ et $V(|X_k|_a) = kp(1-p)$.

b. Soit $\beta > p$. $P\big(|X_k|_a \geq \beta k\big) = P\big(|X_k|_a - E(|X_k|_a) \geq (\beta - p)k\big)$. Or $\big(|X_k|_a - E(|X_k|_a) \geq (\beta - p)k\big) \subset \big((|X_k|_a - E(|X_k|_a))^2 \geq (\beta - p)^2k^2\big)$ donc, d'après l'inégalité de Markov, $P\big(|X_k|_a \geq \beta k\big) \leq \frac{V(|X_k|_a)}{(\beta-p)^2k^2} = \frac{p(1-p)}{(\beta-p)^2k}$. En posant $\delta_1 = \frac{p(1-p)}{(\beta-p)^2}$, on obtient le résultat demandé.

Soit $\gamma < p$. Alors $\big(|X_k|_a \leq \gamma k\big) = \big(|X_k|_a - E(|X_k|_a) \leq (\gamma - p)k\big) \subset \big(\big||X_k|_a - E(|X_k|_a)\big| \geq (p - \gamma)k\big)$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P\big(|X_k|_a \leq \gamma k\big) \leq \frac{V(|X_k|_a)}{(p-\gamma)^2k^2} = \frac{p(1-p)}{(p-\gamma)^2k}$. En posant $\delta_2 = \frac{p(1-p)}{(\gamma-p)^2}$, on obtient le résultat.

c. C'est le langage $\{(u, \max(|u|_a h_a, |u|_b h_b)) \,/\, u \in \Sigma^*\}$.

d. $L_{\mathcal{A}_1}(X_k) = \max(h_a|X_k|_a, h_b|X_k|_b)$. Soit $\epsilon > 0$.

Quitte à échanger les rôles de a et b, supposons que $h_a p \geq h_b q$ donc $\alpha = h_a p$. Alors $\big(\big|L_{\mathcal{A}_1}(X_k) - \alpha k\big| \geq \epsilon k\big) = \big(L_{\mathcal{A}_1}(X_k) \geq h_a(p + \frac{\epsilon}{h_a})k\big) \cup \big(L_{\mathcal{A}_1}(X_k) \leq h_a(p - \frac{\epsilon}{h_a})k\big)$.

En outre, $\big(L_{\mathcal{A}_1}(X_k) \leq h_a(p - \frac{\epsilon}{h_a})k\big) \subset \big(h_a|X_k|_a \leq h_a(p - \frac{\epsilon}{h_a})k\big) = \big(|X_k|_a \leq k(p - \frac{\epsilon}{h_a})\big)$. D'après la question précédente, il existe donc $\delta_1 > 0$ tel que $P\big(L_{\mathcal{A}_1}(X_k) \leq h_a(p - \frac{\epsilon}{h_a})k\big) \leq P\big(|X_k|_a \leq k(p - \frac{\epsilon}{h_a})\big) \leq \frac{\delta_1}{k}$.

De surcroît, $\big(L_{\mathcal{A}_1}(X_k) \geq h_a(p + \frac{\epsilon}{h_a})k\big) = \big(|X_k|_a \geq k(p + \frac{\epsilon}{h_a})\big) \cup \big(|X_k|_b \geq k(\frac{h_a p}{h_b} + \frac{\epsilon}{h_b})\big)$ donc $P\big(L_{\mathcal{A}_1}(X_k) \geq h_a(p + \frac{\epsilon}{h_a})k\big) \leq P\big(|X_k|_a \geq k(p + \frac{\epsilon}{h_a})\big) + P\big(|X_k|_b \geq k(\frac{h_a p}{h_b} + \frac{\epsilon}{h_b})\big)$. D'après la question précédente, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $P\big(|X_k|_a \geq k(p + \frac{\epsilon}{h_a})\big) \leq \frac{\delta_2}{k}$.

Par ailleurs, $\frac{h_a p}{h_b} + \frac{\epsilon}{h_b} \geq q + \frac{\epsilon}{h_b} > q$ donc, d'après le résultat de la question précédente adaptée à la lettre b, il existe $\delta_3 > 0$ tel que $P\big(|X_k|_b \geq k(\frac{h_a p}{h_b} + \frac{\epsilon}{h_b})\big) \leq \frac{\delta_3}{k}$ donc $P\big(L_{\mathcal{A}_1}(X_k) \geq h_a(p + \frac{\epsilon}{h_a})k\big) \leq \frac{\delta_2 + \delta_3}{k}$.

En conclusion partielle, conformément à ce qu'avançait l'énoncé, il existe $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ tel que $P\big(\big|L_{\mathcal{A}_1}(X_k) - \alpha k\big| \geq \epsilon k\big) = P\big(L_{\mathcal{A}_1}(X_k) \leq h_a(p - \frac{\epsilon}{h_a})k\big) + P\big(L_{\mathcal{A}_1}(X_k) \geq h_a(p + \frac{\epsilon}{h_a})k\big) \leq \frac{\delta}{k}$.

Considérons l'événement $E = \big(|L_{\mathcal{A}_1}(X_k) - \alpha k| \geq \epsilon k\big)$. $\mathbb{1}_E + \mathbb{1}_{\overline{E}} = 1$ donc $\frac{1}{k}L_{\mathcal{A}_1}(X_k) - \alpha = \frac{1}{k}\mathbb{1}_E\big(L_{\mathcal{A}_1}(X_k) - k\alpha\big) + \frac{1}{k}\mathbb{1}_{\overline{E}}\big(L_{\mathcal{A}_1}(X_k) - k\alpha\big)$ donc $\frac{E\big(L_{\mathcal{A}_1}(X_k)\big)}{k} - \alpha = E\big(\frac{1}{k}L_{\mathcal{A}_1}(X_k) - \alpha\big) = \frac{1}{k}E\big(\mathbb{1}_E\big(L_{\mathcal{A}_1}(X_k) - k\alpha\big)\big) + \frac{1}{k}E\big(\mathbb{1}_{\overline{E}}\big(L_{\mathcal{A}_1}(X_k) - k\alpha\big)\big)$ donc, d'après l'inégalité triangulaire, $\big|\frac{E\big(L_{\mathcal{A}_1}(X_k)\big)}{k} - \alpha\big| \leq \frac{1}{k}E\big(\big|\mathbb{1}_E L_{\mathcal{A}_1}(X_k) - k\alpha\big|\big) + \frac{1}{k}E\big(\mathbb{1}_{\overline{E}}\big|L_{\mathcal{A}_1}(X_k) - k\alpha\big|\big)$.

En outre, $\big|L_{\mathcal{A}_1}(X_k) - \alpha k\big| \leq |L_{\mathcal{A}_1}(X_k)| + \alpha k \leq \max(h_a, h_b)k + \alpha k$ puis $\mathbb{1}_E\big|L_{\mathcal{A}_1}(X_k) - \alpha k\big| \leq \mathbb{1}_E \max(h_a, h_b)k + \alpha k$. Par conséquent, $\frac{1}{k}E\big(\mathbb{1}_E\big|L_{\mathcal{A}_1}(X_k) - k\alpha\big|\big) \leq \frac{1}{k}E\big(\mathbb{1}_E(\max(h_a, h_b) + \alpha)k\big) = P(E)(\max(h_a, h_b) + \alpha) \leq \frac{\delta}{k}(\max(h_a, h_b) + \alpha)$. Or $\lim_{k \to +\infty} \frac{\delta(\max(h_a, h_b) + \alpha)}{k} = 0$.

De ce fait, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, $\frac{\delta(\max(h_a,h_b)+\alpha)}{k} \leq \epsilon$. Par surcroît, $\frac{1}{k}E\big(\mathbb{1}_E\big|L_{\mathcal{A}_1}(X_k)-k\alpha\big|\big) \leq \epsilon$. Par ailleurs, $\big(\mathbb{1}_{\overline{E}}\big|L_{\mathcal{A}_1}(X_k)-k\alpha\big|\big) \leq \epsilon k$ donc $\frac{1}{k}E\big(\mathbb{1}_{\overline{E}}\big|L_{\mathcal{A}_1}(X_k)-k\alpha\big|\big) \leq \frac{1}{k}\epsilon k = \epsilon$.

En conclusion, pour tout $k \geq k_0$, $\big|\frac{E\left(L_{\mathcal{A}_1}(X_k)\right)}{k} - \alpha\big| \leq 2\epsilon$. Ceci prouve que $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{E\left(L_{\mathcal{A}_1}(X_k)\right)}{k} = \alpha$.

Question 6

a. $(Y_i = 1) = \overline{E_i}$ donc $P(Y_i = 1) = 1 - p = q$.

b. $(Y_i = 2) = (Y_{i-1} = 1) \cap E_i$. Y_{i-1} ne dépend que des événements $E_1, \cdots, E_{i-1}$ qui sont indépendants de E_i donc $(Y_{i-1} = 1)$ est indépendant de E_i donc $P(Y_i = 2) = P(Y_{i-1} = 1)P(E_i) = (1-p)p = pq$. Enfin, $P(Y_i = 3) = 1 - P(Y_i = 2) - P(Y_i = 1) = 1 - q - pq = p(1-q) = p^2$.

c. Soit $i \geq 1$. $L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1])$ est à valeurs dans $\{-3,-2,0,1,2,3\}$. De plus, $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = -3|Y_{i-2} = 2\big) = P(\overline{E_{i-1}} \cap E_i) = pq$, $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = 0|Y_{i-2} = 2\big) = p + q^2$; $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = 0|Y_{i-2} = 3\big) = P\big((E_{i-1} \cap E_i) \cup (E_{i-1} \cap \overline{E_i})\big) = P(E_{i-1}) = p$, $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = 1|Y_{i-2} = 3\big) = P(\overline{E_{i-1}} \cap \overline{E_i}) = q^2$ et $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = -2|Y_{i-1} = 3\big) = P(\overline{E_{i-1}} \cap E_i) = pq$; $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = 0|Y_{i-2} = 1\big) = P(\overline{E_{i-1}} \cap \overline{E_i}) = q^2$, $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = 2|Y_{i-2} = 1\big) = P(E_{i-1} \cap E_i) = p^2$ et $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = 3|Y_{i-2} = 1\big) = P(E_{i-1} \cap \overline{E_i}) = pq$.

D'après la formule des probabilités totales, si $i \geq 3$, $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = -3\big) = pq \times P(Y_i = 2) = pqp^2 = qp^3$, $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = -2\big) = pqP(Y_{i-2} = 3) = pqp^2 = p^3q$, $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = 0\big) = (p+q^2)P(Y_{i-2} = 2) + pP(Y_{i-2} = 3) = (p+q^2)pq$, $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = 1\big) = q^2P(Y_{i-2} = 3) = q^2p^2$, $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = 2\big) = p^2P(Y_{i-2} = 1) = p^2q$ et $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = 3\big) = pP(Y_{i-2} = 1) = pq$. Par conséquent, $E\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1])\big) = -3qp^3 - 2p^3q + q^2p^2 + 2p^2q + 3pq = 3pq(1-p^2) + 2p^2q(1-p) + q^2p^2 = 3pq^2(1+p) + 2p^2q^2 + p^2q^2 = 3pq^2(1+p+p) = 3pq^2(1+2p)$.

En outre, $P(Y_0 = 2) = 1$ donc, si $i = 2$, $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = 0\big) = p + q^2$ et $P\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1]) = -3\big) = pq$ donc $E\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1])\big) = -3pq$. Enfin, si $i = 1$, $E(L_{\mathcal{A}_2}(X[1])) = 2p + 3q$.

Enfin, $L_{\mathcal{A}_2}(X_k) = L_{\mathcal{A}_2}(X[k]) = \sum\limits_{i=2}^{k}\big(L_{\mathcal{A}_2}(X[i]) - L_{\mathcal{A}_2}(X[i-1])\big) + L_{\mathcal{A}_2}(X[1])$ donc $E\big(L_{\mathcal{A}_2}(X_k)\big) = \sum\limits_{i=3}^{k} 3pq^2(1+2p) - 3pq + 2p + 3q = 3pq^2(1+2p)(k-2) - 3pq + 2p + 3q \sim 3pq^2(1+2p)k$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{E\left(L_{\mathcal{A}_2}(X_k)\right)}{k} = 3pq^2(1+2p)$.

Question 7

a. En considérant les cas $x \leq y \leq z$, $x \leq z \leq y$, $y \leq x \leq z$, $y \leq z \leq x$, $z \leq x \leq y$, $z \leq y \leq x$, on vérifie que $\forall (x,y,z) \in \overline{\mathbb{R}}^3$ $\max(x, \max(y,z)) = \max(\max(x,y), z)$.

Soient $(B,C,D) \in (\overline{R}^{n,n})^3$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors $\big((B \oplus C) \oplus D\big)_{i,j} = \max(\max(B_{i,j}, C_{i,j}), D_{i,j}) = \max(B_{i,j}, \max(C_{i,j}, D_{i,j})) = \big(B \oplus (C \oplus D)\big)_{i,j}$ donc $(B \oplus C) \oplus D = B \oplus (C \oplus D)$.

b. Pour tout $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, $\max(x,y) = \max(y,x)$ donc, pour tout $(B,C) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,n}$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(B \oplus C)_{i,j} = \max(B_{i,j}, C_{i,j}) = \max(C_{i,j}, B_{i,j}) = (B \oplus C)_{i,j}$ donc $B \oplus C = C \oplus B$.

c. Soient $(B,C,D) \in (\overline{\mathbb{R}}^{n,n})^3$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, soit l_k tel que $B_{i,l_k} + C_{l_k,k} = \max\limits_{1\leq l\leq n}(B_{i,l} + C_{l,k})$ et m_k tel que $C_{k,m_k} + D_{m_k,j} = \max\limits_{1\leq m\leq n}(C_{k,m} + D_{m,j})$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $B_{i,k} + \max\limits_{1\leq m\leq n}(C_{k,m} + D_{m,j}) = B_{i,k} + C_{k,m_k} + D_{m_k,j} \leq B_{i,l_{m_k}} + C_{l_{m_k},m_k} + D_{m_k,j} = \max\limits_{1\leq l\leq n}(B_{i,l} + C_{l,m_k}) + D_{m_k,j} \leq \max\limits_{1\leq m\leq n}\big(\max\limits_{1\leq l\leq n}(B_{i,l} + C_{l,m}) + D_{m,j}\big)$ donc $B_{i,k} + (C \otimes D)_{k,j} \leq \max\limits_{1\leq m\leq n}\big((B \otimes C)_{i,m} + D_{m,j}\big) = \big((B \otimes C) \otimes D\big)_{i,j}$ donc $\max\limits_{1\leq k\leq n}\big(B_{i,k} + (C \otimes D)_{k,j}\big) \leq \big((B \otimes C) \otimes D\big)_{i,j}$ donc $\big(B \otimes (C \otimes D)\big)_{i,j} \leq \big((B \otimes C) \otimes D\big)_{i,j}$. De même, on montre que $\big(B \otimes (C \otimes D)\big)_{i,j} \geq \big((B \otimes C) \otimes D\big)_{i,j}$ donc $B \otimes (C \otimes D) = (B \otimes C) \otimes D$.

d. Pour tout $(x,y,z) \in \overline{\mathbb{R}}^3$, $x + \max(y,z) = \max(x+y, x+z)$ et, pour tout $\big((x_k)_{1\leq k\leq n}, (y_k)_{1\leq k\leq n}\big) \in \overline{\mathbb{R}}^n \times \overline{\mathbb{R}}^n$, $\max\limits_{1\leq k\leq n}(\max(x_k, y_k)) = \max\big(\max\limits_{1\leq k\leq n}(x_k), \max\limits_{1\leq k\leq n}(y_k)\big)$.

Soient $(B,C,D) \in (\overline{\mathbb{R}}^{n,n})^3$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors $\big(B \otimes (C \oplus D)\big)_{i,j} = \max\limits_{1\leq k\leq n}\big(B_{i,k} + (C \oplus D)_{k,j}\big) = \max\limits_{1\leq k\leq n}\big(B_{i,k} + \max(C_{k,j}, D_{k,j})\big) = \max\limits_{1\leq k\leq n}\big(\max(B_{i,k} + C_{k,j}, B_{i,k} + D_{k,j})\big) = \max\big(\max\limits_{1\leq k\leq n}(B_{i,k} + C_{k,j}), \max\limits_{1\leq k\leq n}(B_{i,k} + D_{k,j})\big) = \max\big((B \otimes C)_{i,j}, (B \otimes D)_{i,j}\big) = \big((B \otimes C) \oplus (B \otimes D)\big)_{i,j}$ donc $B \otimes (C \oplus D) = (B \otimes C) \oplus (B \otimes D)$. De même, on montre que $(C \oplus D) \otimes B = (C \otimes B) \oplus (D \otimes B)$.

e. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\infty + x = x + (-\infty) = -\infty$ et $\max(x, -\infty) = \max(-\infty, x) = x$.

Soit $U \in \overline{\mathbb{R}}^{n,n}$ tel que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, $U_{i,j} = -\infty$ si $i \neq j$ et $U_{i,j} = 0$ si $i = j$. Soit $B \in \overline{\mathbb{R}}^{n,n}$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $(B \otimes U)_{i,j} = \max\limits_{1\leq k\leq n}(B_{i,k} + U_{k,j}) = \max\big(\max\limits_{k\neq j}(-\infty), B_{i,j} + 0\big) = B_{i,j}$ donc $B \otimes U = B$. De même, $U \otimes B = B$.

Question 8

Soit $w_{i,j}^k$ le poids maximal d'un chemin de i à j de longueur k. Par convention, $w_{i,j}^k = 0$ si $i = j$ et $w_{i,j}^0 = -\infty$ si $i \neq j$. Ainsi, $(w_{i,j}^0)_{1\leq i,j\leq n} = U$. Un chemin de i à j de longueur $k+1$ est la concaténation d'un chemin de i à l de longueur 1 et d'un chemin de l à j de longueur k. Le poids maximal d'un chemin passant par ce sommet l est $w_{i,l}^1 + w_{l,j}^k = M_{i,j} + w_{i,j}^k$. Le poids maximal d'un chemin de longueur $k+1$ de i à j est donc $\max\limits_{1\leq l\leq n}(M_{i,l} + w_{l,j}^k)$. Par conséquent, $w_{i,j}^{k+1} = \max\limits_{1\leq l\leq n}(M_{i,l} + w_{l,j}^k)$ ce qui signifie que $(w_{i,j}^{k+1})_{1\leq i,j\leq n} = M \otimes (w_{i,j}^k)_{1\leq i,j\leq n}$.

Par conséquent, la matrice $W_k = (w_{i,j}^k)_{1\leq i,j\leq n}$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{R}}$ vérifie $W_0 = U = M^0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $W_{k+1} = M \otimes W_k$. Par définition, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $W_k = M^k$.

Question 9

a. Si u est le mot vide, le poids maximal d'un chemin d'étiquette u de p à q est $-\infty$ si $p \neq q$ et 0 si $p = q$. De ce fait, le poids maximal d'un chemin d'étiquette u de p à q est $U_{p,q} = \mathcal{M}(U)_{p,q}$.

Soit u de taille $n+1$, $u = u_1v$ où v est de taille n. Supposons que, pour tout $(p',q) \in Q^2$, $\mathcal{M}(v)_{p',q}$ est le poids maximal d'un chemin d'étiquette v de p' à q. Soit $(p,q) \in Q^2$. Un chemin s de p à q d'étiquette u est la concaténation d'une arête (p,u_1,p') de p à p' étiquetée par u_1 et d'un chemin s' de p' à q étiquetée par v. Le poids de ce chemin est $W(s) = W(p,u_1,q') + W(s')$. Le poids maximal est donc

$\max\limits_{1\le p'\le n}(W(p,u_1,p')+W(s')) = \max\limits_{1\le p'\le n}(W(p,u_1,p')+\mathcal{M}(v)_{p',q})$. Par définition, $W(p,u_1,p') = \mathcal{M}(u_1)_{p,p'}$ donc le poids maximal d'un chemin de p à q étiqueté par u est $\max\limits_{1\le p'\le n}\left(\mathcal{M}(u_1)_{p,p'}+\mathcal{M}(v)_{p',q}\right) = \left(\mathcal{M}(u_1)\otimes\mathcal{M}(v)\right)_{p,q}$. Par définition, $\left(\mathcal{M}(u_1)\otimes\mathcal{M}(v)\right)_{p,q} = \mathcal{M}(u)_{p,q}$.
Ainsi, par récurrence sur la taille de u, pour tout $u\in\Sigma^*$, pour tout $(p,q)\in Q^2$, $\mathcal{M}(u)_{p,q}$ est le poids maximal d'un chemin de p à q.
b. Notons $u = u_1\cdots u_n$. $L_{\mathcal{A}}(u)$ est le poids maximal d'un chemin de $i\in I$ à $f\in F$ étiqueté par u. De ce fait, $L_{\mathcal{A}}(u) = \max\limits_{i\in I, f\in F}\mathcal{M}(u)_{i,f} = \max\limits_{i\in I,f\in F}\left(\mathcal{M}(u_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}(u_n)\right)_{i,f}$. Pour tout $E\subset Q$, on pose $\mathcal{M}(E) = (x_p)_{p\in P}\in\overline{\mathbb{R}}^{n,1}$ tel que $x_p = 0$ si $p\in E$, $x_p = -\infty$ si $p\notin E$ et $\mathcal{M}(E)^\top = (x_p)_{p\in Q}\in\overline{\mathbb{R}}^{1,n}$ tel que $x_p = 0$ si $p\in E$, $x_p=-\infty$ si $p\notin E$.
Pour tout $M\in\overline{\mathbb{R}}^{n,n}$, $\left(M\otimes\mathcal{M}(E)\right)_i = \max\limits_{e\in E} M_{i,e}$ et $\left(\mathcal{M}(E)\otimes M\right) = \max\limits_{e\in E} M_{e,i}$. Par conséquent, $\mathcal{M}(I)\otimes M\otimes\mathcal{M}(F) = \max\limits_{i\in I,f\in F} M_{i,f}$.
Finalement, $L_{\mathcal{A}}(u) = \mathcal{M}(I)\otimes\mathcal{M}(u_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}(u_n)\otimes\mathcal{M}(F) = \mathcal{M}(I)\otimes\mathcal{M}(u)\otimes\mathcal{M}(F)$.

Question 10

a. L'ensemble des chemins sans cycle dans l'automate est fini. Il admet donc un maximum c. De par l'hypothèse faite par l'énoncé et le résultat de la question 3, tous les chemins sont de poids au plus c. Ainsi, pour tout $u\in\Sigma^*$, $L_{\mathcal{A}}(u)\le c$. De par la distributivité, pour tout $k\in\mathbb{N}$, M^k est une somme ($\oplus$) de produits ($\otimes$) de matrices $\mathcal{M}(a_i)$. Les produits de matrices $\mathcal{M}(a_i)$ ont pour coefficients les poids de chemins étiquetés par des mots. Comme cela a été remarqué, ces coefficients sont majorés par c. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, M^k a des coefficients majorés par c.

Pour tout $(x,y)\in\overline{\mathbb{R}}$, $x\le c$, $y\le c\Rightarrow\max(x,y)\le c$. Ainsi, les coefficients de $\bigoplus\limits_{i=0}^{k} M^i$ forment des suites croissantes et majorées par c donc convergent dans $\overline{\mathbb{R}}$.
b. Par distributivité, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $M^k = \left(\mathcal{M}(a_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{M}(a_n)\right)^k = \bigoplus\limits_{a_{i_1},\cdots,a_{i_k}}\mathcal{M}(a_{i_1})\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}(a_{i_k}) = \bigoplus\limits_{|u|=k}\mathcal{M}(u)$ donc $M^* = \bigoplus\limits_{u\in\Sigma^*}\mathcal{M}(u)$ donc, par distributivité, $\mathcal{M}(I)M^*\mathcal{M}(F) = \bigoplus\limits_{u\in\Sigma^*}\mathcal{M}(I)\otimes\mathcal{M}(u)\otimes\mathcal{M}(F) = \bigoplus\limits_{u\in\Sigma^*} L_{\mathcal{A}}(u) = \max\limits_{u\in\Sigma^*}(L_{\mathcal{A}}(u))$.
Ainsi, le poids du mot le plus lourd est $\mathcal{M}(I)M^*\mathcal{M}(F)$ (les matrices $\mathcal{M}(I)$, $\mathcal{M}(F)$ ayant été définies dans notre réponse 9b).
c. $M_{i,j}^{\le p} = \max\left(M_{i,j}^{\le p-1}, M_{i,p}^{\le p-1}+M_{p,j}^{\le p-1}\right)$.
M^* est la matrice des poids maximaux entre sommets. Ainsi, $M^* = M^{\le n}$.
L'algorithme est donc le suivant :
M :=W
Pour tout $1\le k\le n$, faire pour tout $1\le i,j\le n$, faire $M[i,j] := \max\left(M[i,j], M[i,k]+M[k,j]\right)$ fin faire
Renvoyer M
d. L'algorithme est le suivant :
M :=W
p :=0
b :=Vrai
Tant que p<n et b faire :
pour tout $1\le i,j\le n$ faire si M[i,p]+M[p,j]>c, b :=Faux sinon $M[i,j] := \max\left(M[i,j], M[i,p+1]+M[p+1,j]\right)$ fin faire
p :=p+1 fin faire
Renvoyer b

Question 11

a. $M^0\otimes v = U\otimes v = v$. $(0\lambda)\otimes v = 0\times v = (0+v_i)_{1\le i\le n} = v$ donc $M^0\otimes v\le(0\lambda)\otimes v$.
Soit $k\in\mathbb{N}$. Supposons que $M^k\otimes v\le(k\lambda)\otimes v$. Par hypothèse $M\otimes v\le\lambda\otimes v$ donc, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\max\limits_{1\le j\le n} M_{i,j}+v_j\le\lambda+v_i$ donc, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $M_{i,j}+v_j\le\lambda+v_i$.
Soit $i\in[\![1,n]\!]$. $(M^{k+1}\otimes v)_i = \left(M\otimes(M^k\otimes)\right)_i = \max\limits_{1\le j\le n} M_{i,j}+\left(M^k\otimes v\right)_j$. Or $M^k\otimes v\le(k\lambda)\otimes v$ donc, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $(M^k\otimes v)_j\le\left((k\lambda)\otimes v\right)_j = k\lambda+v_j$ donc $M_{i,j}+\left(M^k\otimes v\right)_j\le M_{i,j}+k\lambda+v_j = M_{i,j}+v_j+k\lambda\le\lambda+v_i+k\lambda = (k+1)\lambda+v_i$ donc $\max\limits_{1\le j\le n}\left(M_{i,j}+(M^k\otimes v)_j\right)\le(k+1)\lambda v_i$ donc $\left(M^{k+1}\otimes v\right)_i\le\left(((k+1)\lambda)\otimes v\right)_i$ donc $M^{k+1}\otimes v\le\left((k+1)\lambda\right)\otimes v$.
Par récurrence, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $M^k\otimes v\le(k\lambda)\otimes v$.
Par hypothèse, il existe $j\in[\![1,n]\!]$ tel que $v_j\ne-\infty$. Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Comme M est irréductible, il existe un chemin de i à j. Soit k la longueur de ce chemin. Alors $(M^k)_{i,j}$ est le poids maximal d'un chemin de i à j. Il est donc différent de $-\infty$. En outre, $\max\limits_{1\le l\le n}\left((M^k)_{i,l}+v_l\right)\le k\lambda+v_i$ donc $(M^k)_{i,j}+v_j\le k\lambda+v_i$ donc $-\infty<(M^k)_{i,j}+v_j-k\lambda\le v_i$ donc $v_i\ne-\infty$.
b. Soit k la longueur d'un cycle de poids 0. Soit i un sommet de ce cycle. Alors $(M^k)_{i,i}=0$ donc $(M^k)_{i,i}+v_i\le\max\limits_{1\le j\le n}\left((M^k)_{i,j}+v_j\right)\le k\lambda+v_i$ donc $0\le k\lambda$ donc $\lambda\ge 0$.

Question 12.

a. Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Alors $\lambda+v_i = (\lambda\otimes v)_i\le(M\otimes v)_i = \max\limits_{1\le j\le n}(M_{i,j}+v_j)$ donc il existe $j\in[\![1,n]\!]$ tel que $\lambda+v_i\le M_{i,j}+v_j$
b. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on pose $j_i\in[\![1,n]\!]$ tel que $\lambda+v_i\le M_{i,j_i}+v_{j_i}$.
Fixons $i_0=1$ et, pour tout k, $i_{k+1} = j_{i_k}$. $k\mapsto i_k$ est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. On peut donc considérer $k_0 = \max\{k\ /\ \mathrm{card}\{i_0,\cdots,i_{k-1}\} = k\}$. Il existe donc $k_1\in[\![1,k_0-2]\!]$ tel que $i_{k_0} = i_{k_1}$. Pour tout $k\in[\![k_1,k_0-1]\!]$, $\lambda+v_{i_k}\le M_{k,j_k}+v_{i_{k+1}}$ donc $(k_0-k_1)\lambda+\sum\limits_{k=k_1}^{k_0-1} v_{i_k} = \sum\limits_{k=k_1}^{k_0-1}(\lambda+v_{i_k})\le\sum\limits_{k=k_1}^{k_0-1} M_{i_k,i_{k+1}}+\sum\limits_{k=k_1}^{k_0-1} v_{i_{k+1}}$; en outre, $\sum\limits_{k=k_1}^{k_0-1} v_{i_{k+1}} = \sum\limits_{k=k_1+1}^{k_0} v_{i_k} = \sum\limits_{k=k_1+1}^{k_0-1} v_{i_k}+v_{i_{k_0}} = \sum\limits_{k=k_1}^{k_0-1} v_{i_k}$ donc $(k_0-k_1)\lambda\le\sum\limits_{k=k_1}^{k_0-1} M_{i_k,i_{k+1}}$. Enfin, $\sum\limits_{k=k_1}^{k_0-1} M_{i_k,i_{k+1}}$ est le poids d'un cycle donc est au plus 0. En conclusion, $(k_0-k_1)\lambda\le 0$ donc $\lambda\le 0$.

Question 13

Soit $j\in[\![1,n]\!]$. $(M^*)_{j,i}$ est le poids maximal d'un chemin de j à i. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. $M_{j,k}+(M^*)_{k,i}$ est le poids d'un chemin de j à i donc $M_{j,k}+(M^*)_{k,i}\le(M^*)_{j,i}$ donc $\max\limits_{1\le k\le n}\left(M_{j,k}+(M^*)_{k,i}\right)\le(M^*)_{j,i}$ donc $(M\otimes M^*)_{j,i}\le(M^*)_{j,i}$.

Pour tout $l \in \mathbb{N}$, $(M^l)_{j,i}$ est le poids maximal d'un chemin de longueur l de j à i donc $(M^l)_{j,i} \leq (M^*)_{j,i}$. Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $(M^l)_{j,i} = M_{j,k} + (M^{l-1})_{k,i} \leq M_{j,k} + (M^*)_{k,i} \leq \max\limits_{1\leq k\leq n}(M_{j,k} + (M^*)_{k,i}) = (M \otimes M^*)_{j,i}$. En outre, si $j \neq i$, $(M^0)_{j,i} = -\infty \leq (M \otimes M^*)_{j,i}$; si $j = i$, il existe un cycle $(i, u_1, i_1), (i_1, u_2, i_2), \cdots, (i_{n-1}, u_n, i_n)$ de poids 0 donc $0 = (M^*)_{j,i} = M_{i,i_1} + (M^*)_{i_1,i}$ donc $(M^0)_{j,i} = 0 = M_{j,i_1} + (M^*)_{i_1,i} \leq \max\limits_{1\leq k\leq n}(M_{j,k} + (M^*)_{k,i}) = (M \otimes M^*)_{j,i}$. Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(M^k)_{j,i} \leq (M \otimes M^*)_{j,i}$ donc $\Big(\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{N}} M^k\Big)_{j,i} = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}(M^k)_{j,i} \leq (M \otimes M^*)_{j,i}$ donc $(M^*)_{j,i} \leq (M \otimes M^*)_{j,i}$.

En conclusion, $M \otimes (M^*)_{1\leq j\leq n,i} = (M^*)_{1\leq j\leq n,i} = 0 \otimes (M^*)_{1\leq j\leq n,i}$. Ceci signifie que la colonne i de M^* est vecteur propre de M pour la valeur propre 0. Si λ est une valeur propre, il existe $v \neq (-\infty, \cdots, -\infty)$ tel que $M \otimes v = \lambda \otimes v$ donc $M \otimes v \leq \lambda \otimes v$ et $M \otimes v \geq \lambda \otimes v$ donc, d'après les questions 11 et 12, $\lambda \leq 0$ et $\lambda \geq 0$ donc $\lambda = 0$. La seule valeur propre possible de M est 0.

Question 14

a. Pour tout $i \in I^*$, il existe un cycle de poids 0 passant par i. Soit $d_i \geq 1$ la taille d'un tel cycle. Alors $(M^{d_i})_{i,i}$ est le poids maximal d'un chemin de i à i de taille au plus d_i. C'est donc 0. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le cycle précédent répété k fois est un cycle de poids 0 de longueur kd donc $(M^{kd})_{i,i} = 0$. I^* est fini. Il existe donc $d = \prod\limits_{i\in I^*} d_i \geq 1$. Alors, pour tout $i \in I^*$, d est un multiple de d_i donc $(M^d)_{i,i} = 0$.

b. Les chemins de i à j passant par i^* de longueur multiple de d ont un poids maximal. Soit k_0 tel qu'il existe un chemin passant par i^* de longueur $k_0 d$ de poids maximal parmi ceux de longueur multiple de d. Autrement dit, $(M^{k_0 d})_{i,i^*,j} = \max\limits_{k\in\mathbb{N}}(M^{kd})_{i,i^*,j}$.

Soit $k \geq k_0$. Supposons que $(M^{k_0 d})_{i,i^*,j} = (M^{kd})_{i,i^*,j}$. Par hypothèse, $(M^{(k+1)d})_{i,i^*,j} \leq (M^{k_0 d})_{i,i^*,j}$. De plus, il existe $k_1 + k_2 = kd$ tel que $(M^{kd})_{i,i^*,j} = (M^{k_1})_{i,i^*} + (M^{k_2})_{i^*,j}$ donc $(M^{kd})_{i,i^*,j} = (M^{kd})_{i,i^*,j} + (M^d)_{i^*,i^*} = (M^{k_1})_{i,i^*} + (M^d)_{i^*,i^*} + (M^{k_2})_{i^*,j} = (M^{k_1+d})_{i,i^*} + (M^{k_2})_{i^*,j} \leq \max\limits_{l_1+k_2=kd+d}\big((M^{l_1})_{i,i^*} + (M^{k_2})_{i^*,j}\big) = (M^{(k+1)d})_{i,i^*,j}$ donc $(M^{k_0 d})_{i,i^*,j} = (M^{kd})_{i,i^*,j} \leq (M^{(k+1)d})_{i,i^*,j}$.

Finalement, $(M^{k_0 d})_{i,i^*,j} = (M^{(k+1)d})_{i,i^*,j}$.

Par récurrence, pour tout $k \geq k_0$, $(M^{kd})_{i,i^*,j} = (M^{k_0 d})_{i,i^*,j}$ donc $(M^{kd})_{i,i^*,j} = (M^{(k+1)d})_{i,i^*,j}$.

c. Soit K_i l'entier de la question précédente pour $i \in I^*$. Soit $k \geq K_i$ pour tout $i \in I^*$. Supposons qu'un chemin de poids maximal de longueur kd de i à j ne passe par aucun sommet de I^*. Soit W un tel poids. Soit W' le poids maximal d'un chemin de i à j de longueur kd passant un sommet de I^*. Alors un chemin de poids maximal de longueur $kd + (n - \mathrm{card}(I^*))dl$ ne passant pas par I^* contient au moins dl cycles, nécessairement de poids strictement négatif. Le nombre de ces cycles étant fini, il en existe un de poids $c < 0$ maximum. Le poids maximal d'un chemin ne passant pas par I^* de longueur $kd + (n - \mathrm{card}(I^*))dl$ est donc au plus $W + cdl$. D'après la question précédente, le poids maximal d'un chemin de i à j passant par un sommet de I^* de longueur $kd + (n - \mathrm{card}(I^*))dl$ est égal à W' d'après la question précédente. Il existe donc $L \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $l \geq L$, $W' > W + cdl$. De ce fait, un chemin de poids maximal de longueur $kd + (n - \mathrm{card}(I^*))dl$ de i à j passe par l'un des sommets de I^*.

De ce fait, pour tout $k \geq K + (n - \mathrm{card}(I^*))L$, $(M^{kd})_{i,j} = \max\limits_{i\in I^*}(M^{kd})_{i,i^*,j}$.

d. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, il existe $K'_{i,j}$ tel que $(M^{kd})_{i,j} = \max\limits_{i\in I^*}(M^{kd})_{i,i^*,j}$ et, pour tout $i \in I^*$, il existe $K_{i,i^*,j}$ tel que $(M^{(k+1)d})_{i,i^*,j} = (M^{kd})_{i,i^*,j}$.

Soit $K_0 = \max\limits_{1\leq i,j\leq n}\big(K'_{i,j}, \max\limits_{i\in I^*} K_{i,i^*,j}\big)$. Soit $k \geq K_0$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(M^{(k+1)d})_{i,j} = \max\limits_{i\in I^*}(M^{(k+1)d})_{i,i^*,j} = \max\limits_{i\in I^*}(M^k)_{i,i^*,j} = (M^{kd})_{i,j}$. Ainsi, $M^{kd} = M^{(k+1)d}$ pour tout $k \geq K$. Soit $k \geq K_0 d$. Soit $k = dq + r$ la division euclidienne. Alors $q \geq K_0$. Ainsi, $M^k = M^{dq}M^r = M^{d(q+1)}M^r = M^{k+d}$.

Question 15

a. $\max\limits_{1\leq i\leq n}(M^k)_{i,i}$ est le cycle de poids maximal de taille k. $\frac{1}{k}\max\limits_{1\leq k\leq n}(M^k)_{i,i}$ est le poids moyen d'une arête d'un cycle de poids maximal de taille k. Un cycle de poids maximal est de taille au plus $n-1$ (sinon il se décompose en de plus petit cycle qui seront de poids inférieurs). $\rho(M)$ est donc le poids maximal moyen d'un cycle.

b. Pour tout $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, $\max\limits_{1\leq i\leq n}(x_i) + \lambda = \max\limits_{1\leq i\leq n}(x_i + \lambda$. Soit $v \neq (-\infty, \cdots, -\infty)$ un vecteur propre de M pour la valeur propre λ. $M \otimes v = \lambda \otimes v$ donc, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\lambda + v_i = \max\limits_{1\leq j\leq n}(M_{i,j} + v_j)$ donc $v_i = \max\limits_{1\leq j\leq n}(M_{i,j} + v_j) - \lambda = \max\limits_{1\leq j\leq n}(M_{i,j} - \lambda + v_j)$ donc $(\lambda \otimes M) \otimes v = v = 0 \otimes v$ donc 0 est valeur propre de $\lambda \otimes M$.

Réciproquement, supposons que 0 est valeur propre de $\lambda \otimes M$. Il existe $v \neq (-\infty, \cdots, -\infty)$ tel que $v = (\lambda \otimes M) \otimes v$ donc, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $v_i = \max\limits_{1\leq j\leq n}\big((M_{i,j} - \lambda) + v_j\big) = \max\limits_{1\leq j\leq n}(M_{i,j} + v_j) - \lambda$ donc $\lambda + v_i = \max\limits_{1\leq j\leq n}(M_{i,j} + v_j)$ donc $\lambda \otimes v = M \otimes v$ donc λ est valeur propre de M.

c. Soit $N = -\rho(M) \otimes M$. On montre par récurrence que $N^k = (-k\rho(M)) \otimes M^k$. Comme M est irréductible, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, il existe k tel que $(M^k)_{i,j} > -\infty$ donc $-k\rho(M) + (M^k)_{i,j} > -\infty$ donc $(N^k)_{i,j} > -\infty$ donc N est irréductible. En outre, il existe $k \in [\![0,n-1]\!]$ et $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\frac{(M^k)_{i,i}}{k} = \rho(M)$ donc $(N^k)_{i,i} = 0$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $(N^k)_{i,i} = (M^k)_{i,i} - k\rho(M) \leq k\rho(M) - k\rho(M) = 0$ donc N n'a que des cycles de taille au plus $n-1$ de poids au plus 0 et possède un cycle de poids exactement 0. Tout cycle du graphe de N a donc poids au plus 0 et en a de poids exactement 0.

D'après la question 13, la seule valeur propre de N est 0. La seule valeur propre de $-\rho(M) \otimes M$ est 0 donc, d'après la question précédente, la seule valeur propre de M est $\rho(M)$.

d. D'après la question 14, il existe K et d tels que, pour tout $k \geq K$, $N^{k+d} = N^k$ donc $(-(k+d)\rho(M)) \otimes M^{k+d} = (-k\rho(M)) \otimes M^k$. Par conséquent, $(-d\rho(M)) \otimes M^{k+d} = k\rho(M) \otimes \big(((-k\rho(M) - d\rho(M)) \otimes M^{k+d}\big) = k\rho(M) \otimes \big((-k\rho(M)) \otimes M^k\big) = M^k$ donc $d\rho(M) \otimes \big((-d\rho(M)) \otimes M^{k+d}\big) = (d\rho(M)) \otimes M^k$ donc $M^{k+d} = (d\rho(M)) \otimes M^k$.

Question 16

Soient i et k tels que $\rho(M) = \frac{1}{k}(M^k)_{i,i}$. Soit I la composante fortement connexe de i. $(M_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ est irréductible donc admet $\rho(M)$ comme valeur propre pour un vecteur propre $(v_i)_{i\in I}$. On a donc, pour tout $i \in I$, $\rho(M) + v_i = \max\limits_{j\in I}(M_{i,j} + v_j)$.

On définit $v = (v_i)_{1\leq i\leq n}$ par $v_i = -\infty$ si $i \notin I$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(M \otimes v)_i = \max\limits_{1\leq j\leq n}(M_{i,j} + v_j) = \max\big(\max\limits_{i\in I}(M_{i,j} + v_j), \max\limits_{i\notin I}(M_{i,j} + (-\infty))\big) = \max\limits_{i\in I}(M_{i,j} + v_j) = \rho(M) + v_i = (\rho(M) \otimes v)_i$. Par conséquent, $\rho(M)$ est une valeur propre de M.