

Bienvenue en classe de MP*. L'année de spé étant très courte (les concours débutent mi-avril), il faut être mobilisé dès le début de l'année et être prêt à démarrer sur un rythme soutenu. Il est donc nécessaire d'avoir dès la rentrée des connaissances solides.

Afin de vous guider dans un programme de révision, voici ce document.

Tout d'abord il y a 37 exercices corrigés de la banque de CCINP des oraux. Cette banque comporte initialement 112 exercices couvrant le programme de sup et de spé. Lors de l'oral de CCINP, vous serez interrogés sur l'un de ces exercices et celui-ci est noté sur 8 points. Ce sont les exercices de niveau 1.

Ensuite il y a une sélection de 40 exercices corrigés dits de niveau 2 extraits des oraux des concours Centrale/Mines de ces cinq dernières années. Malgré des relectures, il peut y avoir encore des coquilles.

Quelques exercices sont vraiment difficiles.

La semaine de la rentrée, vous serez interrogés sur un exercice de niveau 1, un ou deux exercices de niveau 2 et enfin un exercice inconnu de niveau Mines/Télécom ou Mines.

Il y aura au moins un exercice d'algèbre, un exercice d'analyse et enfin un exercice de probabilité.

Vous aurez en plus quelques questions de cours, dans lesquelles il faudra uniquement restituer des énoncés de théorèmes.

Ces deux séries d'exercices vous permettront de réviser très largement le programme de sup et d'aborder sereinement la rentrée en spé.

Il est important de maîtriser au minimum les exercices de niveau 1.

Ne vous y mettez pas au dernier moment. Bon été et bon courage !

Nicolas Jacquet.

EXERCICES DE NIVEAU 1

CONCOURS COMMUN INP
FILIÈRE MP - FILIÈRE MPI

BANQUE ÉPREUVE ORALE DE MATHÉMATIQUES SESSION 2024

avec corrigés

2014, [CC BY-NC-SA 3.0 FR](#)

Dernière mise à jour : le 29/04/2024

Introduction

L'épreuve orale de mathématiques du CCINP, filière MP et filière MPI, se déroule de la manière suivante :

- 25mn de préparation sur table.
- 25mn de passage à l'oral.

Chaque sujet proposé est constitué de deux exercices :

- un exercice sur 8 points issu de la banque publique accessible sur le site <https://www.concours-commun-inp.fr/fr/index.html>
- un exercice sur 12 points.

Les deux exercices proposés portent sur des domaines différents.

Ce document contient les **112 exercices de la banque pour la session 2024** :

- 58 exercices d'analyse (exercice 1 à exercice 58).
- 36 exercices d'algèbre (exercice 59 à exercice 94).
- 18 exercices de probabilités (exercice 95 à exercice 112).

Dans l'optique d'aider les futurs candidats à se préparer au mieux aux oraux du CCINP, chaque exercice de la banque est proposé, dans ce document, avec un corrigé.

Il se peut que des mises à jour aient lieu en cours d'année scolaire.

Cela dit, il ne s'agira, si tel est le cas, que de mises à jour mineures : reformulation de certaines questions pour plus de clarté, relevé d'éventuelles erreurs, suppression éventuelle de questions ou d'exercices.

Nous vous conseillons donc de vérifier, en cours d'année, en vous connectant sur le site :

<https://www.concours-commun-inp.fr/fr/index.html>

Si une nouvelle version a été mise en ligne, la date de la dernière mise à jour se trouvera en haut de chaque page.

Si tel est le cas, les exercices concernés seront signalés dans le présent document, page 3.

Remerciements à David DELAUNAY pour l'autorisation de libre utilisation du fichier source de ses corrigés des exercices de l'ancienne banque, diffusés sur son site <http://mp.cpgedupuydelome.fr>

NB : la présente banque intègre des éléments issus des publications suivantes :

- A. Antib, L. d'Estampes et interrogateurs, Banque d'exercices de mathématiques pour le programme 2003-2014 des oraux CCP-MP, *Éd. Ress. Pédag. Ouv. INPT*, **0701** (2013) 120 exercices.
<http://pedagotech.inp-toulouse.fr/130701>
- D. Delaunay, Prépas Dupuy de Lôme, cours et exercices corrigés MPSI - MP, 2014.
<http://mp.cpgedupuydelome.fr>

L'équipe des examinateurs de l'oral de mathématiques du CCINP, filière MP et filière MPI.

Contact : Valérie BELLECAGE, coordonnatrice
des oraux de mathématiques du CCINP, filière MP
et filière MPI.

vbellecave@gmail.com

EXERCICE 3 analyse

Énoncé exercice 3

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$.

Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2. On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$.

En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Corrigé exercice 3

1. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

On prouve, par récurrence, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}.$$

2. g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} e^{2x} \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n! e^{2x} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}.$$

3. Notons (P_n) la propriété :

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

Prouvons que (P_n) est vraie par récurrence sur n .

La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (dérivée d'un produit).

Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 0$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I .

Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la

$$\text{fonction } fg \text{ l'est aussi avec } \forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I .

Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et :

$$\forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x) \right).$$

En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on

$$\text{obtient : } \forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

C'est-à-dire

$$(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \binom{n}{0} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + \binom{n}{n} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x).$$

Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

On remarque également que $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ et $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$.

On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

Donc (P_{n+1}) est vraie.

EXERCICE 4 analyse

Énoncé exercice 4

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\implies$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Corrigé exercice 4

1. Théorème des accroissements finis :
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
2. On pose $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.
Soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a, b]$.
En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction f , entre x_0 et $x_0 + h$, on peut affirmer qu'il existe c_h strictement compris entre x_0 et $x_0 + h$ tel que $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c_h)h$.
Quand $h \rightarrow 0$ (avec $h \neq 0$), on a, par encadrement, $c_h \rightarrow x_0$.
Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} f'(c_h) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l$.
On en déduit que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.
3. La fonction g est clairement continue et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
 $\forall x \in \mathbb{R}^*, |g(x)| \leq x^2$ donc $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} g(x) = 0 = g(0)$. Donc g est continue en 0.
 g est également dérivable en 0 car $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} (g(x) - g(0)) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Or $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} h \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$.
Donc, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Cependant, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
 $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ (car $|2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 2|x|$), mais $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.
Donc g' n'a pas de limite en 0.

EXERCICE 5 analyse

Énoncé exercice 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas $\alpha \leq 0$**

En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

(b) **Cas $\alpha > 0$**

Étudier la nature de la série.

Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

Corrigé exercice 5

1. (a) Cas $\alpha \leq 0$

$\forall n \geq 3, \ln n \geq 1$ donc $(\ln n)^\alpha \leq 1$.

On en déduit que : $\forall n \geq 3, u_n \geq \frac{1}{n}$.

Or $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n}$ diverge.

Donc, par critère de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

- (b) Cas $\alpha > 0$

Soit $n \geq 3$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$ donc

$$\forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket, f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1)$$

$$\text{donc } \sum_{k=3}^n f(k) \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \sum_{k=3}^n f(k-1)$$

$$\text{C'est-à-dire, } \sum_{k=3}^n f(k) \leq \int_2^n f(x) dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$$

f étant positive, on peut donc écrire dans $[0, +\infty]$ l'inégalité

$$\sum_{k=3}^{+\infty} f(k) \leq \int_2^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=2}^{+\infty} f(k)$$

de sorte que la série et l'intégrale sont simultanément finies,

autrement dit, $\sum_{n \geq 2} f(n)$ et $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ sont de même nature.

Puisque $\int_2^{+\infty} f(x) dx \stackrel{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, on peut affirmer que : $\int_2^{+\infty} f(x) dx < \infty \iff \alpha > 1$.

On en déduit que : $\sum_{n \geq 2} f(n)$ converge $\iff \alpha > 1$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_n = \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

Au voisinage de $+\infty$,

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e - e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}$.

De plus, au voisinage de $+\infty$, $\ln(n^2 + n) = 2 \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 \ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc $\ln(n^2 + n) \underset{+\infty}{\sim} 2 \ln n$.

Et comme $e^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{8} \times \frac{1}{n (\ln n)^2}$.

Or, d'après 1.(b), $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^2}$ converge.

Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

EXERCICE 6 analyse

Énoncé exercice 6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

Corrigé exercice 6

1. Par hypothèse : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| \leq \varepsilon. \quad (1)$

Prenons $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$.

Fixons un entier N vérifiant (1).

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| \leq \frac{1-l}{2}$.

Et donc, $\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1+l}{2}$.

On pose $q = \frac{1+l}{2}$. On a donc $q \in]0, 1[$.

On a alors $\forall n \geq N, u_{n+1} \leq qu_n$.

On en déduit, par récurrence, que $\forall n \geq N, u_n \leq q^{n-N} u_N$.

Or $\sum_{n \geq N} q^{n-N} u_N = u_N q^{-N} \sum_{n \geq N} q^n$ et $\sum_{n \geq N} q^n$ converge car $q \in]0, 1[$.

Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{n^n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = e^{-n \ln(1 + \frac{1}{n})}$.

Or $-n \ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} -1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} < 1$.

Donc, d'après 1., la série $\sum u_n$ converge.

EXERCICE 7 analyse

Énoncé exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .

(a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

(b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive.

Prouver que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}{(\sqrt{n+3} - 1)}$.

Remarque 1 : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1 .

Corrigé exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .

(a) Par hypothèse, $\exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies v_n \neq 0$.

Ainsi la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir du rang N_0 .

De plus, comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / N \geq N_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$. (1)

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Fixons un entier N vérifiant (1).

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$.

C'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies -\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} - 1 \leq \frac{1}{2}$. (*)

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{u_n}{v_n} \geq \frac{1}{2}$.

Et donc, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{u_n}{v_n} > 0$.

Ce qui implique que u_n et v_n sont de même signe à partir du rang N .

(b) On suppose que (v_n) est positive.

En reprenant les mêmes notations que dans 1.(a) : $\exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies v_n \neq 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies v_n > 0$.

De plus, on a prouvé, dans 1.(a), que :

$\exists N \in \mathbb{N} / N \geq N_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies -\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} - 1 \leq \frac{1}{2}$. (*)

On en a déduit dans 1.(a) que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{u_n}{v_n} > 0$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies v_n > 0$.

Donc on a aussi : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n > 0$.

D'après (*), $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$. (**)

Premier cas : Si $\sum v_n$ converge

D'après (**), $\forall n \geq N, u_n \leq \frac{3}{2}v_n$.

Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

Deuxième cas : Si $\sum v_n$ diverge

D'après (**), $\forall n \geq N, \frac{1}{2}v_n \leq u_n$.

Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Par symétrie de la relation d'équivalence, on obtient le résultat.

$$2. \text{ On pose } \forall n \geq 2, u_n = \frac{((-1)^n + i) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3} - 1)}.$$

$$|u_n| = \frac{\sqrt{2} \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3} - 1)}.$$

$$\text{De plus } |u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = v_n$$

$$\text{On a } n^{\frac{5}{4}} v_n = \frac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{1}{4}}}, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{5}{4}} v_n = 0. \text{ On en déduit que } \sum v_n \text{ converge.}$$

$$\text{D'après 1., } \sum_{n \geq 2} |u_n| \text{ converge.}$$

$$\text{Donc } \sum_{n \geq 2} u_n \text{ converge absolument.}$$

$$\text{De plus, la suite } (u_n)_{n \geq 2} \text{ est à valeurs dans } \mathbb{C}, \text{ donc } \sum_{n \geq 2} u_n \text{ converge.}$$

EXERCICE 39 analyse

Énoncé exercice 39

On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

$$\text{On pose alors } (x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

- (b) Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(|)$ est un produit scalaire dans l^2 .

On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $\| \cdot \|$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
Démontrer que φ est une application linéaire de l^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(|)$).
Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

Corrigé exercice 39

1. (a) Soit $(x, y) \in (l^2)^2$ avec $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n y_n| \leq \frac{1}{2} (x_n^2 + y_n^2).$$

Or $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum x_n y_n$ converge absolument, donc converge.

- (b) La suite nulle appartient à l^2 .

Soit $(x, y) \in (l^2)^2$ avec $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $z = x + \lambda y \in l^2$.

On a $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = x_n + \lambda y_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n^2 = (x_n + \lambda y_n)^2 = x_n^2 + \lambda^2 y_n^2 + 2\lambda x_n y_n. \quad (1)$$

Par hypothèse, $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent et d'après 1.(a), $\sum x_n y_n$ converge.

Donc, d'après (1), $\sum z_n^2$ converge.

Donc $z \in l^2$.

On en déduit que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

2. Soit $(x, y) \in l^2$ où $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On pose $z = x + \lambda y$ avec $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = x_n + \lambda y_n$.

Ainsi, $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(z) = z_p = x_p + \lambda y_p = \varphi(x) + \lambda \varphi(y)$.

Donc φ est linéaire sur l^2 . (*)

$$\forall (x, y) \in (l^2)^2, |x|_p^2 + \lambda^2 |y|_p^2 + 2\lambda |x|_p |y|_p \leq |x + \lambda y|_p^2 \leq \|x + \lambda y\|^2$$

$$\text{D'où } \forall (x, y) \in (l^2)^2, |x|_p + \lambda |y|_p \leq \|x + \lambda y\| \quad (**)$$

D'après (*) et (**), φ est continu sur l^2 .

3. On remarque déjà que $F \subset l^2$.

Analyse :

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^\perp$.

Alors $\forall y \in F, (x|y) = 0$.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

On considère la suite $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$y \in F$, donc $(x|y) = 0$, donc $x_p = 0$.

On en déduit que, $\forall p \in \mathbb{N}$, $x_p = 0$.

C'est-à-dire $x = 0$.

Synthèse :

la suite nulle appartient bien à $F^\perp$.

Conclusion : $F^\perp = \{0\}$.

Ainsi, $(F^\perp)^\perp = l^2$.

On constate alors que $F \neq (F^\perp)^\perp$.

EXERCICE 42 analyse

Énoncé exercice 42

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Corrigé exercice 42

1. On trouve comme solution de l'équation homogène sur $]0, +\infty[$ la droite vectorielle engendrée par $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$.
En effet, une primitive de $x \mapsto \frac{3}{2x}$ sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto \frac{3}{2} \ln x$.
2. On utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une fonction k telle que $x \mapsto k(x)x^{\frac{3}{2}}$ soit une solution de l'équation complète (E) sur $]0, +\infty[$.

On arrive alors à $2k'(x)x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x}$ et on choisit $k(x) = -\frac{1}{2x}$.

Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions $x \mapsto kx^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

3. On suppose qu'il existe une solution f de (E) sur $[0, +\infty[$.

Alors f est aussi solution de E sur $]0, +\infty[$.

Donc, il existe une constante k telle que $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = kx^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

De plus, comme f est solution de E sur $]0, +\infty[$ alors f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Donc en particulier, f est continue en 0.

Donc $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(kx^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \right) = 0$.

f doit également être dérivable en 0.

Or, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = k\sqrt{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$.

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$ est l'ensemble vide.

EXERCICE 43 analyse

Enoncé exercice 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
- (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

Corrigé exercice 43

On pose $f(x) = \text{Arctan } x$.

1. (a) **Premier cas** : Si $u_1 < u_0$

Puisque la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan } x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $\text{Arctan}(u_1) < \text{Arctan}(u_0)$ c'est-à-dire $u_2 < u_1$.

Par récurrence, on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

Deuxième cas : Si $u_1 > u_0$

Par un raisonnement similaire, on prouve que la suite (u_n) est strictement croissante.

Troisième cas : Si $u_1 = u_0$

La suite (u_n) est constante.

Pour connaître les variations de la suite (u_n) , il faut donc déterminer le signe de $u_1 - u_0$, c'est-à-dire le signe de $\text{Arctan}(u_0) - u_0$.

On pose alors $g(x) = \text{Arctan } x - x$ et on étudie le signe de la fonction g .

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{-x^2}{1+x^2}$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) < 0$.

Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et comme $g(0) = 0$ alors :

$\forall x \in]0, +\infty[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]-\infty, 0[$, $g(x) > 0$.

On a donc trois cas suivant le signe de x_0 :

- Si $x_0 > 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $x_0 = 0$, la suite (u_n) est constante.
- Si $x_0 < 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

- (b) La fonction g étant strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

0 admet donc un unique antécédent par g et, comme $g(0) = 0$, alors 0 est le seul point fixe de f .

Donc si la suite (u_n) converge, elle converge vers 0, le seul point fixe de f .

Premier cas : Si $u_0 > 0$

L'intervalle $]0, +\infty[$ étant stable par f , on a par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge et ce vers 0, unique point fixe de f .

Deuxième cas : Si $u_0 < 0$

Par un raisonnement similaire, on prouve que (u_n) est croissante et majorée par 0, donc elle converge vers 0.

Troisième cas : Si $u_0 = 0$

La suite (u_n) est constante.

Conclusion : $\forall u_0 \in \mathbb{R}$, (u_n) converge vers 0.

2. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

On a alors $h(x) = h(u_0) = h(\text{Arctan}(u_0)) = h(u_1) = h(\text{Arctan}(u_1)) = h(u_2) = \dots$

Par récurrence, on prouve que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(x) = h(u_n)$.

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(u_n) = h(0)$ par convergence de la suite (u_n) vers 0 et par continuité de h .

On obtient ainsi : $h(x) = h(0)$ et donc h est une fonction constante.

Réciproquement, toutes les fonctions constantes conviennent.

Conclusion : Seules les fonctions constantes répondent au problème.

EXERCICE 44 analyse

Énoncé exercice 44

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E .

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
 (b) Montrer que : $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
 (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Corrigé exercice 44

Soit E un espace vectoriel normé. On note A et B deux parties non vides de E .

1. (a) $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers x .
 (b) On suppose $A \subset B$. Prouvons que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
 Soit $x \in \overline{A}$.
 Il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$.
 Or $A \subset B$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in B$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$.
 Donc $x \in \overline{B}$.
2. D'après la question précédente,
 $A \subset A \cup B$, donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$.
 $B \subset A \cup B$, donc $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
 Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
 Prouvons que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
 Soit $x \in \overline{A \cup B}$.
 Il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A \cup B$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$.
 On considère les ensembles $A_1 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } u_n \in A\}$ et $A_2 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } u_n \in B\}$.
 Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A \cup B$, A_1 ou A_2 est de cardinal infini.
 On peut donc extraire de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A ou une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans B telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = x$.
 Donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
Remarque : On peut aussi prouver que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ sans utiliser les suites :
 $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont fermés, donc $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cup B$. Or $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cup B$, donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. (a) D'après la question 1. ,
 $A \cap B \subset A$, donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$.
 $A \cap B \subset B$, donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$.
 Donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
Autre méthode :
 Comme $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$ alors $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
 Comme $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cap B$, alors par minimalité de $\overline{A \cap B}$, on a $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
 (b) $A =]0, 1[$ et $B =]1, 2[$.
 $\overline{A \cap B} = \emptyset$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

EXERCICE 46 analyse

Énoncé exercice 46

On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$ converge.
3. $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$ converge-t-elle absolument ?

Corrigé exercice 46

$$1. \pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

$$\text{Or, au voisinage de } +\infty, \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

$$\text{Donc, au voisinage de } +\infty, \pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$2. \text{ On pose } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right).$$

$$\text{D'après 1., } v_n = \cos \left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = (-1)^{n+1} \sin \left(\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

$$\text{Donc } v_n = \frac{3\pi}{8} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (*)$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ converge (d'après le critère spécial des séries alternées).}$$

$$\text{De plus, } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge donc par critère de domination, } \sum_{n \geq 1} O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ converge absolument donc converge.}$$

$$\text{Donc d'après } (*), \sum_{n \geq 1} v_n \text{ converge.}$$

$$3. \text{ D'après le développement asymptotique du 2., on a } |v_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{3\pi}{8n}.$$

$$\text{Or } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge (série harmonique), donc } \sum_{n \geq 1} |v_n| \text{ diverge, c'est-à-dire } \sum_{n \geq 1} v_n \text{ ne converge pas absolument.}$$

EXERCICE 55 analyse

Énoncé exercice 55

Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
- (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .

Indication : discuter suivant les valeurs de a .

Corrigé exercice 55

1. (a) Montrons que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
La suite nulle appartient à E (obtenue pour $(u_0, u_1) = (0, 0)$).

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de E . Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Montrons que $w = u + \lambda v \in E$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + \lambda v_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$w_{n+2} = u_{n+2} + \lambda v_{n+2}.$$

Or $(u, v) \in E^2$, donc $w_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n + \lambda(2av_{n+1} + 4(ia - 1)v_n)$

c'est-à-dire $w_{n+2} = 2a(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + 4(ia - 1)(u_n + \lambda v_n)$

ou encore $w_{n+2} = 2aw_{n+1} + 4(ia - 1)w_n$.

Donc $w \in E$.

Donc E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

- (b) On considère l'application φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto (u_0, u_1) \end{aligned}$$

Par construction, φ est linéaire et bijective.

Donc φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On en déduit que $\dim E = \dim \mathbb{C}^2 = 2$.

2. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

On introduit l'équation caractéristique $(E) : r^2 - 2ar - 4(ia - 1) = 0$.

On a deux possibilités :

— si (E) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 , alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$
avec (α, β) que l'on détermine à partir des conditions initiales.

— si (E) a une unique racine double r , alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha n + \beta)r^n$
avec (α, β) que l'on détermine à partir des conditions initiales.

Le discriminant réduit de (E) est $\Delta' = a^2 + 4ia - 4 = (a + 2i)^2$.

Premier cas : $a = -2i$

$r = a = -2i$ est racine double de (E) .

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha n + \beta)(-2i)^n$.

Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc $1 = \beta$ et $1 = (\alpha + \beta)(-2i)$.

On en déduit que $\alpha = \frac{i}{2} - 1$ et $\beta = 1$.

Deuxième cas : $a \neq -2i$

On a deux racines distinctes $r_1 = 2(a + i)$ et $r_2 = -2i$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha(2(a + i))^n + \beta(-2i)^n$.

Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc $\alpha + \beta = 1$ et $2(a + i)\alpha - 2i\beta = 1$.

On en déduit, après résolution, que $\alpha = \frac{1 + 2i}{2a + 4i}$ et $\beta = \frac{2a + 2i - 1}{2a + 4i}$.

BANQUE ALGÈBRE

EXERCICE 59 algèbre

Énoncé exercice 59

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n .

On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :

- (a) sans utiliser de matrice de f ,
- (b) en utilisant une matrice de f .

2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.

Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

3. f est-il diagonalisable ?

Corrigé exercice 59

1. f est clairement linéaire. (*) De plus, $\forall P \in E \setminus \{0\}$, $\deg P' < \deg P$ donc $\deg(P - P') = \deg P$.

Et, si $P = 0$, alors $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = \deg P = -\infty$.

On en déduit que $\forall P \in E$, $\deg f(P) = \deg P$.

Donc $f(E) \subset E$. (**)

D'après (*) et (**), f est bien un endomorphisme de E .

(a) Déterminons $\text{Ker } f$.

Soit $P \in \text{Ker } f$.

$f(P) = 0$ donc $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = -\infty$.

Or, d'après ce qui précède, $\deg(P - P') = \deg P$ donc $\deg P = -\infty$.

Donc $P = 0$.

On en déduit que $\text{Ker } f = \{0\}$.

Donc f est injectif.

Or, $f \in \mathcal{L}(E)$ et E est de dimension finie ($\dim E = n + 1$) donc f est bijectif.

(b) Soit $e = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E . Soit A la matrice de f dans la base e .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

$\det A = 1$ d'où $\det A \neq 0$.

Donc f est bijectif.

2. Soit $Q \in E$.

D'après 1. : $\exists ! P \in E$, tel que $f(P) = Q$.

$P - P' = Q$, $P' - P'' = Q'$, ..., $P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$.

Or $P^{(n+1)} = 0$, donc, en sommant ces $n + 1$ égalités, $P = Q + Q' + \dots + Q^{(n)}$.

3. ~~Parvenons les notations de 1.(b).~~

~~Tout revient à se demander si A est diagonalisable.~~

~~Notons χ_A le polynôme caractéristique de A .~~

~~D'après 1.(b), on a $\chi_A(X) = (X - 1)^{n+1}$.~~

~~Dans 1 est l'unique valeur propre de A .~~

~~Ainsi, si A est diagonalisable, il existe $U \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ tel que $U^{-1}AU = I_{n+1}$.~~

~~Or, si $A = I_{n+1}$, on a $f(P) = P - P' = 0$ pour tout $P \in E$.~~

~~Ceci est contraire à $f \in \text{GL}(E)$.~~

~~Donc A n'est pas diagonalisable et par conséquent, f n'est pas diagonalisable.~~

EXERCICE 60 algèbre

Énoncé exercice 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. f est-il surjectif?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

Corrigé exercice 60

1. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\text{On a } f(M) = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } M \in \text{Ker } f \iff \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}.$$

$$\text{C'est-à-dire, } M \in \text{Ker } f \iff \exists (c, d) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit que } \text{Ker } f = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (*)$$

$$\text{On pose } M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après (*), la famille (M_1, M_2) est génératrice de $\text{Ker } f$.

De plus, M_1 et M_2 sont non colinéaires; donc (M_1, M_2) est libre.

Donc (M_1, M_2) est une base de $\text{Ker } f$.

2. $\text{Ker } f \neq \{0\}$, donc f est non injectif.
Or f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie.
On en déduit que f est non surjectif.
3. Par la formule du rang, $\text{rg } f = 2$.
On pose $M_3 = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
 M_3 et M_4 sont non colinéaires, donc (M_3, M_4) est une famille libre de $\text{Im } f$.
Comme $\text{rg } f = 2$, (M_3, M_4) est une base de $\text{Im } f$.
4. On a $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$. (1)

Prouvons que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.

Soit $M \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$.

D'après 1. et 3., $\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aM_1 + bM_2$ et $M = cM_3 + dM_4$.

$$\text{On a donc } \begin{cases} -2a = c \\ -2b = 2d \\ a = 2c \\ b = 4d \end{cases}.$$

On en déduit que $a = b = c = d = 0$.

Donc $M = 0$.

Donc $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ (2)

Donc, d'après (1) et (2), $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

EXERCICE 62 algèbre

Énoncé exercice 62

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:
 (a) ~~en utilisant le lemme des noyaux~~
 (b) ~~sans utiliser le lemme des noyaux~~
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
 Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Corrigé exercice 62

1. f est linéaire donc :
 $f^2 - f - 2\text{Id} = 0 \iff f \circ (f - \text{Id}) = (f - \text{Id}) \circ f = 2\text{Id} \iff f \circ (\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\text{Id}) = (\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\text{Id}) \circ f = \text{Id}.$

On en déduit que f est inversible, donc bijectif, et que $f^{-1} = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\text{Id}$.

2. (a) ~~On pose $E = K_1^2 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_n$ avec $K_i = (X+1)(X-2)$.
 $E_1 = K_1 + 1 + E_2 = K_2 + 2 + \dots + E_n$
 $E = K_1 + 1 + K_2 + 2 + \dots + K_n$
 $E = K_1 + K_2 + \dots + K_n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f)$.
 $\text{Ker}(f)$ est annulateur de f , donc $\text{Ker}(f) = \{0\}$.
 $E = \{0\} \oplus \{0\} \oplus \dots \oplus \{0\} = \{0\}$.~~

(b) Analyse (unicité) :

Soit $x \in E$. Supposons que $x = a + b$ avec $a \in \text{Ker}(f + \text{Id})$ et $b \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Alors par linéarité de f , $f(x) = f(a) + f(b) = -a + 2b$.

On en déduit que $a = \frac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \frac{x + f(x)}{3}$.

Synthèse (existence) :

Soit $x \in E$. On pose $a = \frac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \frac{x + f(x)}{3}$.

On a bien $x = a + b$. (*)

$(f + \text{Id})(a) = \frac{1}{3}(2f(x) - f^2(x) + 2x - f(x)) = \frac{1}{3}(-f^2(x) + f(x) + 2x) = 0$ car $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

Donc $a \in \text{Ker}(f + \text{Id})$. (**)

$(f - 2\text{Id})(b) = \frac{1}{3}(f(x) + f^2(x) - 2x - 2f(x)) = \frac{1}{3}(f^2(x) - f(x) - 2x) = 0$ car $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

Donc $b \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. (***)

D'après (*), (**), et (***), $x = a + b$ avec $a \in \text{Ker}(f + \text{Id})$ et $b \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Conclusion : $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

3. Prouvons que $\text{Im}(f + \text{Id}) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Soit $y \in \text{Im}(f + \text{Id})$.

$\exists x \in E / y = f(x) + x$.

Alors $(f - 2\text{Id})(y) = f(y) - 2y = f^2(x) + f(x) - 2f(x) - 2x = f^2(x) - f(x) - 2x = 0$ car $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

Donc $y \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Donc $\text{Im}(f + \text{Id}) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. (*)

Posons $\dim E = n$.

D'après 2., $n = \dim \text{Ker}(f + \text{Id}) + \dim \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim \text{Ker}(f + \text{Id}) + \dim \text{Im}(f + \text{Id})$.

On en déduit que $\dim \text{Im}(f + \text{Id}) = \dim \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. (**)

Donc, d'après (*) et (**), $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

EXERCICE 64 algèbre

Énoncé exercice 64

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que : $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f \implies \text{Im} f = \text{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\text{Im} f = \text{Im} f^2 \iff \text{Ker} f = \text{Ker} f^2$.
- (b) Démontrer que : $\text{Im} f = \text{Im} f^2 \implies E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$.

Corrigé exercice 64

1. Supposons $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$.
 Indépendamment de l'hypothèse, on peut affirmer que $\text{Im} f^2 \subset \text{Im} f$ (*)
 Montrons que $\text{Im} f \subset \text{Im} f^2$.
 Soit $y \in \text{Im} f$.
 Alors, $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$.
 Or $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$, donc $\exists (a, b) \in E \times \text{Ker} f$ tel que $x = f(a) + b$.
 On a alors $y = f^2(a) \in \text{Im} f^2$.
 Ainsi $\text{Im} f \subset \text{Im} f^2$ (**)
 D'après (*) et (**), $\text{Im} f = \text{Im} f^2$.
2. (a) On a $\text{Im} f^2 \subset \text{Im} f$ et $\text{Ker} f \subset \text{Ker} f^2$.
 On en déduit que $\text{Im} f^2 = \text{Im} f \iff \text{rg} f^2 = \text{rg} f$ et $\text{Ker} f = \text{Ker} f^2 \iff \dim \text{Ker} f = \dim \text{Ker} f^2$.
 Alors, en utilisant le théorème du rang,
 $\text{Im} f = \text{Im} f^2 \iff \text{rg} f = \text{rg} f^2 \iff \dim \text{Ker} f = \dim \text{Ker} f^2 \iff \text{Ker} f = \text{Ker} f^2$.
- (b) Supposons $\text{Im} f = \text{Im} f^2$.
 Soit $x \in \text{Im} f \cap \text{Ker} f$.
 $\exists a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0_E$.
 On en déduit que $f^2(a) = 0_E$ c'est-à-dire $a \in \text{Ker} f^2$.
 Or, d'après l'hypothèse et 2.(a), $\text{Ker} f^2 = \text{Ker} f$ donc $a \in \text{Ker} f$ c'est-à-dire $f(a) = 0_E$.
 C'est-à-dire $x = 0$.
 Ainsi $\text{Im} f \cap \text{Ker} f = \{0_E\}$. (***)
 De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f = \dim E$. (****)
 Donc, d'après (***) et (****), $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$.

EXERCICE 71 algèbre

Énoncé exercice 71

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D .
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Corrigé exercice 71

1. $D = \text{Vect}((1, 2, 3))$.
 $(1, 2, 3) \notin P$ car les coordonnées du vecteur $(1, 2, 3)$ ne vérifient pas l'équation de P .
Donc $D \cap P = \{0\}$. (*)
De plus, $\dim D + \dim P = 1 + 2 = \dim \mathbb{R}^3$. (**)
D'après (*) et (**), $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Par définition d'une projection, $p(u) \in P$ et $u - p(u) \in D$.
 $u - p(u) \in D$ signifie que $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u - p(u) = \alpha(1, 2, 3)$.
On en déduit que $p(u) = (x - \alpha, y - 2\alpha, z - 3\alpha)$. (***)
Or $p(u) \in P$ donc $(x - \alpha) + (y - 2\alpha) + (z - 3\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{1}{6}(x + y + z)$.
Et donc, d'après (***), $p(u) = \frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z)$.
Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit A la matrice de p dans la base e . On a $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
3. On pose $e'_1 = (1, 2, 3)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$ et $e'_3 = (0, 1, -1)$.
 e'_1 est une base de D et (e'_2, e'_3) est une base de P .
Or $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ donc $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
De plus $e'_1 \in D$ donc $p(e'_1) = 0$. $e'_2 \in P$ et $e'_3 \in P$ donc $p(e'_2) = e'_2$ et $p(e'_3) = e'_3$.
Ainsi, $M(p, e') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 76 algèbre

Énoncé exercice 76

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\mid)$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

- (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(b) Dans quel cas a-t-on égalité? Le démontrer.

- Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

Corrigé exercice 76

- (a) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\mid)$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x, y) \in E^2, |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$

Preuve :

Soit $(x, y) \in E^2$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2$.

On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) \geq 0$.

De plus, $P(\lambda) = (x + \lambda y | x + \lambda y)$.

Donc, par bilinéarité et symétrie de $(\mid)$, $P(\lambda) = \|y\|^2 \lambda^2 + 2\lambda (x|y) + \|x\|^2$.

On remarque que $P(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $\|y\|^2 \neq 0$.

Premier cas : si $y = 0$

Alors $|(x|y)| = 0$ et $\|x\| \|y\| = 0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.

Deuxième cas : $y \neq 0$

Alors $\|y\| = \sqrt{(y|y)} \neq 0$ car $y \neq 0$ et $(\mid)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.

On en déduit que le discriminant réduit Δ est négatif ou nul.

Or $\Delta = (x|y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2$ donc $(x|y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$.

Et donc, $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$.

- (b) On reprend les notations de 1. .

Prouvons que $\forall (x, y) \in E^2, |(x|y)| = \|x\| \|y\| \iff x$ et y sont colinéaires.

Supposons que $|(x|y)| = \|x\| \|y\|$.

Premier cas : si $y = 0$

Alors x et y sont colinéaires.

Deuxième cas : si $y \neq 0$

Alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0 .

C'est-à-dire $P(\lambda_0) = 0$ et comme $(\mid)$ est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.

Donc x et y sont colinéaires.

Supposons que x et y soient colinéaires.

Alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.

Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).

$|(x|y)| = |\alpha| \cdot (y|y) = |\alpha| \|y\|^2$ et $\|x\| \|y\| = \sqrt{(x|x)} \|y\| = \sqrt{\alpha^2 (y|y)} \|y\| = |\alpha| \cdot \|y\|^2$.

Donc, on a bien l'égalité.

- On considère le produit scalaire classique sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ défini par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), (f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

$$\text{On pose } A = \left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in E \right\}.$$

$A \subset \mathbb{R}$.

$A \neq \emptyset$ car $(b-a)^2 \in A$ (valeur obtenue pour la fonction $t \mapsto 1$ de E).

De plus, $\forall f \in E, \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq 0$ donc A est minorée par 0.

On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf A$.

Soit $f \in E$.

On considère la quantité $\left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2$.

D'une part, $\left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 = \left(\int_a^b 1 dt \right)^2 = (b-a)^2$.

D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(|)$ on obtient :

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 \leq \int_a^b f(t) dt \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt.$$

On en déduit que $\forall f \in E, \int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq (b-a)^2$.

Donc $m \geq (b-a)^2$.

Et, si on considère la fonction $f : t \mapsto 1$ de E , alors $\int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt = (b-a)^2$.

Donc $m = (b-a)^2$.

EXERCICE 77 algèbre

Énoncé exercice 77

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E .
Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
 - (a) Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
 - (b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Corrigé exercice 77

1. On a $A \subset (A^\perp)^\perp$. (*)
En effet, $\forall x \in A, \forall y \in A^\perp, (x | y) = 0$.
C'est-à-dire, $\forall x \in A, x \in (A^\perp)^\perp$.

Comme E est un espace euclidien, $E = A \oplus A^\perp$ donc $\dim A = n - \dim A^\perp$.

De même, $E = A^\perp \oplus (A^\perp)^\perp$ donc $\dim (A^\perp)^\perp = n - \dim A^\perp$.

Donc $\dim (A^\perp)^\perp = \dim A$. (**)

D'après (*) et (**), $(A^\perp)^\perp = A$.

2. (a) Procédons par double inclusion.

Prouvons que $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$.

Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$.

Soit $y \in F + G$.

Alors $\exists (f, g) \in F \times G$ tel que $y = f + g$.

$$(x | y) = \underbrace{(x | f)}_{=0} + \underbrace{(x | g)}_{=0} = 0.$$

car $f \in F$ et $x \in F^\perp$ car $g \in G$ et $x \in G^\perp$

Donc $\forall y \in (F + G), (x | y) = 0$.

Donc $x \in (F + G)^\perp$.

Prouvons que $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

Soit $x \in (F + G)^\perp$.

$\forall y \in F$, on a $(x | y) = 0$ car $y \in F \subset F + G$.

Donc $x \in F^\perp$.

De même, $\forall z \in G$, on a $(x | z) = 0$ car $z \in G \subset F + G$.

Donc $x \in G^\perp$.

On en déduit que $x \in F^\perp \cap G^\perp$.

Finalement, par double inclusion, $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

- (b) D'après 2.(a), appliquée à $F^\perp$ et à $G^\perp$, on a $(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp$.

Donc, d'après 1., $(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G$.

Donc $((F^\perp + G^\perp)^\perp)^\perp = (F \cap G)^\perp$.

C'est-à-dire, en utilisant 1. à nouveau, $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

EXERCICE 79 algèbre

Énoncé exercice 79

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que $\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0$.

2. Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Corrigé exercice 79

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_a^b h(x)dx = 0$.

On pose $\forall x \in [a, b], F(x) = \int_a^x h(t)dt$.

h est continue sur $[a, b]$ donc F est dérivable sur $[a, b]$.

De plus, $\forall x \in [a, b], F'(x) = h(x)$.

Or h est positive sur $[a, b]$ donc F est croissante sur $[a, b]$. (*)

Or $F(a) = 0$ et, par hypothèse, $F(b) = 0$. C'est-à-dire $F(a) = F(b)$. (**)

D'après (*) et (**), F est constante sur $[a, b]$.

Donc $\forall x \in [a, b], F'(x) = 0$.

C'est-à-dire, $\forall x \in [a, b], h(x) = 0$.

2. On pose $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Par linéarité de l'intégrale, $(|)$ est linéaire par rapport à sa première variable.

Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(|)$ est symétrique.

On en déduit que $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)

Soit $f \in E$. $(f|f) = \int_a^b f^2(x)dx$.

Or $x \mapsto f^2(x)$ est positive sur $[a, b]$ et $a < b$ donc $(f|f) \geq 0$.

Donc $(|)$ est positive. (**)

Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.

Alors $\int_a^b f^2(x)dx = 0$.

Or $x \mapsto f^2(x)$ est positive et continue sur $[a, b]$.

Donc, d'après 1., f est nulle sur $[a, b]$.

Donc $(|)$ est définie. (***)

D'après (*), (**), et (***), $(|)$ est un produit scalaire sur E .

3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx \leq \sqrt{\int_0^1 x dx} \sqrt{\int_0^1 e^{-2x} dx} = \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{2}$.

EXERCICE 80 algèbre

Énoncé exercice 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Corrigé exercice 80

1. On pose $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

Par linéarité de l'intégrale, $(|)$ est linéaire par rapport à sa première variable.

Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(|)$ est symétrique.

On en déduit que $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)

Soit $f \in E$. $(f|f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t)dt$.

Or $t \mapsto f^2(t)$ est positive sur $[0, 2\pi]$ et $0 < 2\pi$, donc $(f|f) \geq 0$.

Donc $(|)$ est positive. (**)

Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.

Alors $\int_0^{2\pi} f^2(t)dt = 0$.

Or $t \mapsto f^2(t)$ est positive et continue sur $[0, 2\pi]$.

Donc, f est nulle sur $[0, 2\pi]$.

Or f est 2π -périodique donc $f = 0$.

Donc $(|)$ est définie. (***)

D'après (*), (**) et (***), $(|)$ est un produit scalaire sur E .

2. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$.

$x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(2x) \in F$.

De plus, si on note h l'application $x \mapsto \frac{1}{2}$,

$(h|f) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$ et $(h|g) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2x) dx = 0$ donc $h \in F^\perp$ (car $F = \text{Vect}(f, g)$).

On en déduit que le projeté orthogonal de u sur F est $x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(2x)$.

EXERCICE 81 algèbre

Énoncé exercice 81

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$, où $\text{tr}(A^T A')$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A' .

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Corrigé exercice 81

1. On a immédiatement $\mathcal{F} = \text{Vect}(\text{I}_2, K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut donc affirmer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\mathcal{F} = \text{Vect}(\text{I}_2, K)$ donc (I_2, K) est une famille génératrice de $\mathcal{F}$.

De plus, I_2 et K sont non colinéaires donc la famille (I_2, K) est libre.

On en déduit que (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Comme (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$,

$M \in \mathcal{F}^\perp \iff \varphi(M, \text{I}_2) = 0$ et $\varphi(M, K) = 0$.

C'est-à-dire, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff a + d = 0$ et $b - c = 0$.

Ou encore, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff d = -a$ et $c = b$.

On en déduit que $\mathcal{F}^\perp = \text{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(A, B) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{F}^\perp$ donc (A, B) est une base de $\mathcal{F}^\perp$.

3. On peut écrire $J = \text{I}_2 + B$ avec $\text{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.

Donc le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}^\perp$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. On note $d(J, \mathcal{F})$ la distance de J à $\mathcal{F}$.

D'après le cours, $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\|$ où $p_{\mathcal{F}}(J)$ désigne le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}$.

On peut écrire à nouveau que $J = \text{I}_2 + B$ avec $\text{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.

Donc $p_{\mathcal{F}}(J) = \text{I}_2$.

On en déduit que $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\| = \|J - \text{I}_2\| = \|B\| = \sqrt{2}$.

EXERCICE 82 algèbre

Énoncé exercice 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(. | .)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Corrigé exercice 82

1. On pose $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, on pose $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, $B = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(A + A' | B) = \left(\begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) = (a + a')a'' + (b + b')b'' + (c + c')c'' + (d + d')d''.$$

$$\text{Donc } (A + A' | B) = (aa'' + bb'' + cc'' + dd'') + (a'a'' + b'b'' + c'c'' + d'd'') = (A | B) + (A' | B).$$

$$(\alpha A | B) = \left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) = \alpha aa'' + \alpha bb'' + \alpha cc'' + \alpha dd'' = \alpha (A | B).$$

On en déduit que $(. | .)$ est linéaire par rapport à sa première variable.

De plus, par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(. | .)$ est symétrique.

Donc $(. | .)$ est une forme bilinéaire et symétrique. (*)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.

$$(A | A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0. \text{ Donc } (. | .) \text{ est positive. (**)}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ telle que $(A | A) = 0$.

$$\text{Alors } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0.$$

Comme il s'agit d'une somme de termes tous positifs, on en déduit que $a = b = c = d = 0$ donc $A = 0$.

Donc $(. | .)$ est définie. (***)

D'après (*), (**) et (***), $(. | .)$ est un produit scalaire sur E .

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in F \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in F^\perp \text{ car } \forall (a, b, d) \in \mathbb{R}^3, \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

On en déduit que le projeté orthogonal, noté $p_F(A)$, de A sur F est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Ainsi, } d(A, F) = \|A - p_F(A)\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = 1.$$

EXERCICE 84 algèbre

Énoncé exercice 84

- Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
- En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Corrigé exercice 84

- Soit z un complexe non nul. Posons $z = x + iy$ avec x et y réels.
Un argument de z est un réel θ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ avec $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $z = 0$ n'est pas solution de l'équation $z^n = 1$.
Les complexes solutions s'écriront donc sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On a $z^n = 1 \iff \begin{cases} r^n = 1 \\ \text{et} \\ n\theta = 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \text{et} \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
Les réels $\frac{2k\pi}{n}$, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, sont deux à deux distincts et $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi[$.
Or $\begin{matrix} [0, 2\pi[& \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{matrix}$ est injective.
Donc, $\left\{ e^{\frac{i2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$ est constitué de n solutions distinctes de l'équation $z^n = 1$.
Les solutions de l'équation $z^n = 1$ étant également racines du polynôme $X^n - 1$, il ne peut y en avoir d'autres.
Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$ est $S = \left\{ e^{\frac{i2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.
- $z = i$ n'étant pas solution de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$,
$$(z + i)^n = (z - i)^n \iff \left(\frac{z + i}{z - i} \right)^n = 1$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ tel que } \frac{z + i}{z - i} = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ tel que } z \left(1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}} \right) = -i \left(1 + e^{\frac{i2k\pi}{n}} \right)$$

En remarquant que $z \left(1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}} \right) = -i \left(1 + e^{\frac{i2k\pi}{n}} \right)$ n'admet pas de solution pour $k = 0$, on en déduit que :

$$(z + i)^n = (z - i)^n \iff \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \text{ tel que } z = i \frac{e^{\frac{i2k\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{i2k\pi}{n}} - 1}$$

En écrivant $i \frac{e^{\frac{i2k\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{i2k\pi}{n}} - 1} = i \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}}} - \frac{e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{e^{-\frac{ik\pi}{n}}}} = i \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$, on voit que les solutions sont des réels.

On pouvait aussi voir que si z est solution de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ alors $|z + i| = |z - i|$ et donc le point d'affixe z appartient à la médiatrice de $[A, B]$, A et B étant les points d'affixes respectives i et $-i$, c'est-à-dire à la droite des réels.

EXERCICE 85 algèbre

Énoncé exercice 85

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
 - Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$.
 - Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
 a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, $P^{(k)}(a) = 0$.
- Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Corrigé exercice 85

$$1. (a) \quad P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

(b)

$$\begin{aligned} a \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de } P &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_{n-r}[X] \text{ tel que } Q(a) \neq 0 \text{ et } P = (X - a)^r Q \\ &\iff \exists (q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = (X - a)^r \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X - a)^i \\ &\iff \exists (q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X - a)^{r+i} \\ &\iff \exists (q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{k=r}^n q_{k-r} (X - a)^k \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor (rappelée ci-dessus) et l'unicité de la décomposition de P dans la base $(1, (X - a), \dots, (X - a)^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ il vient enfin :

$$a \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de } P \iff \forall k \in \{0, \dots, r-1\} \quad P^{(k)}(a) = 0 \text{ et } P^{(r)}(a) \neq 0$$

- D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} 1 \text{ est racine double de } P = X^5 + aX^2 + bX &\iff P(1) = P'(1) = 0 \text{ et } P''(1) \neq 0 \\ &\iff \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 5 + 2a + b = 0 \\ 20 + 2a \neq 0 \end{cases} \\ &\iff a = -4 \text{ et } b = 3 \end{aligned}$$

On obtient $X^5 - 4X^2 + 3X = X(X - 1)^2(X^2 + 2X + 3)$ et c'est la factorisation cherchée car le discriminant de $X^2 + 2X + 3$ est strictement négatif.

EXERCICE 86 algèbre

Énoncé exercice 86

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
 - (a) Prouver que $\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
 - (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n \pmod{p}$.
Indication : procéder par récurrence.
 - (c) En déduire, pour tout entier naturel n , que : p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Corrigé exercice 86

1. On suppose $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$.
 D'après le théorème de Bézout,
 $\exists (u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_1 p + v_1 a = 1$. (1)
 $\exists (u_2, v_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_2 p + v_2 b = 1$. (2)
 En multipliant les équations (1) et (2), on obtient :

$$\underbrace{(u_1 u_2 p + u_1 v_2 b + u_2 v_1 a)}_{\in \mathbb{Z}} p + \underbrace{(v_1 v_2)}_{\in \mathbb{Z}} (ab) = 1.$$
 Donc, d'après le théorème de Bézout, $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
 - (a) Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$.
 Donc $\binom{p}{k} k! = p(p-1)\dots(p-k+1)$.
 donc $p \mid \binom{p}{k} k!$. (3)
 Or, $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $p \wedge i = 1$ (car p est premier) donc, d'après 1., $p \wedge k! = 1$.
 Donc, d'après le lemme de Gauss, (3) $\implies p \mid \binom{p}{k}$.
 - (b) Procédons par récurrence sur n .
 Pour $n = 0$ et pour $n = 1$, la propriété est vérifiée.
 Soit $n \in \mathbb{N}$.
 Supposons que la propriété $(P_n) : n^p \equiv n \pmod{p}$ soit vérifiée.
 Alors, d'après la formule du binôme de Newton, $(n+1)^p = n^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k + 1$. (4)
 Or $\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $p \mid \binom{p}{k}$ donc $p \mid \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k$.
 Donc d'après (4) et (P_n) , $(n+1)^p \equiv n^p + 1 \pmod{p}$ et (P_{n+1}) est vraie.
 - (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que p ne divise pas n .
 Comme p est premier, alors $p \wedge n = 1$.
 La question précédente donne p divise $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$.
 Or comme p est premier avec n , on en déduit, d'après le lemme de Gauss, que p divise $n^{p-1} - 1$.
 Ce qui signifie que $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. (petit théorème de Fermat).

EXERCICE 87 algèbre

Énoncé exercice 87

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_k , lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

Corrigé exercice 87

1. L'application $u : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{matrix}$ est linéaire.

Montrons que $\text{Ker } u = \{0\}$.

Si $P \in \text{Ker } u$, alors $P(a_0) = P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$ et le polynôme P , de degré inférieur ou égal à n , admet $n+1$ racines distinctes.

Donc $P = 0$.

Ainsi u est injective et comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, u est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Enfin les conditions recherchées sont équivalentes à : $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u(P) = (b_0, \dots, b_n)$.

La bijectivité de u dit que ce problème admet une unique solution P et on a $P = u^{-1}((b_0, \dots, b_n))$.

2. Pour ce choix de $b_0, b_1, \dots, b_n$ le polynôme L_k vérifie les conditions :

$$\deg L_k \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Comme $a_0, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$ sont n racines distinctes de L_k qui est de degré $\leq n$, il existe nécessairement $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$L_k = \lambda \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (X - a_i)$$

La condition supplémentaire $L_k(a_k) = 1$ donne $\lambda = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (a_k - a_i)}$ et finalement :

$$L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

3. Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Les polynômes $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k$ et X^p vérifient les mêmes conditions d'interpolation :

$$\deg P \leq n \quad \text{et} \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \quad P(a_i) = a_i^p$$

Par l'unicité vue en première question, on a $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

EXERCICE 89 algèbre

Énoncé exercice 89

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{i \frac{2\pi}{n}}$.

- On suppose $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
- On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Corrigé exercice 89

- On pose $Z = z^k - 1$.

$$Z = e^{i \frac{k2\pi}{n}} - 1 = e^{i \frac{k\pi}{n}} \left(e^{i \frac{k\pi}{n}} - e^{-i \frac{k\pi}{n}} \right) = e^{i \frac{k\pi}{n}} 2i \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right)$$

c'est-à-dire $Z = 2 \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) e^{i \left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2} \right)}$

Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$, donc $\sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) > 0$.

Donc le module de Z est $2 \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right)$ et un argument de Z est $\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}$.
- On remarque que pour $k = 0$, $|z^k - 1| = 0$ et $\sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = 0$.

Donc d'après la question précédente, on a $S = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right)$.

S est donc la partie imaginaire de $T = 2 \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{k\pi}{n}}$.

Or, comme $e^{i \frac{\pi}{n}} \neq 1$, on a $T = 2 \frac{1 - e^{i\pi}}{1 - e^{i \frac{\pi}{n}}} = \frac{4}{1 - e^{i \frac{\pi}{n}}}$.

Or $1 - e^{i \frac{\pi}{n}} = e^{i \frac{\pi}{2n}} \left(e^{-i \frac{\pi}{2n}} - e^{i \frac{\pi}{2n}} \right) = -2i e^{i \frac{\pi}{2n}} \sin \left(\frac{\pi}{2n} \right)$.

On en déduit que $T = \frac{4 e^{-i \frac{\pi}{2n}}}{-2i \sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{2n}} i e^{-i \frac{\pi}{2n}}$.

En isolant la partie imaginaire de T , et comme $\cos \left(\frac{\pi}{2n} \right) \neq 0$ ($n \geq 2$), on en déduit que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

EXERCICE 90 algèbre

Énoncé exercice 90

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
 (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
 (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .
4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.
 Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

Corrigé exercice 90

1. Par linéarité de l'évaluation $P \mapsto P(a)$ (où a est un scalaire fixé), Φ est linéaire.

Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$.

Alors $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0$, donc P admet trois racines distinctes.

Or P est de degré inférieur ou égal à 2 ; donc P est nul.

Ainsi, $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$ i.e. Φ est injective.

Enfin, $\dim(\mathbb{K}_2[X]) = \dim(\mathbb{K}^3) = 3$ donc Φ est bijective.

Par conséquent, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.

2. (a) Φ est un isomorphisme donc l'image réciproque d'une base est une base.

Ainsi, (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

- (b) $L_1 \in \mathbb{K}_2[X]$ et vérifie $\Phi(L_1) = (1, 0, 0)$ i.e. $(L_1(a_1), L_1(a_2), L_1(a_3)) = (1, 0, 0)$.

Donc, comme a_2 et a_3 sont distincts, $(X - a_2)(X - a_3) \mid L_1$.

Or $\deg L_1 \leq 2$, donc $\exists k \in \mathbb{K}$ tel que $L_1 = k(X - a_2)(X - a_3)$.

La valeur $L_1(a_1) = 1$ donne $k = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$.

Donc $L_1 = \frac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$.

Un raisonnement analogue donne $L_2 = \frac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}$ et $L_3 = \frac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$.

3. (L_1, L_2, L_3) base de $\mathbb{K}_2[X]$ donc $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$.

Par construction, $\forall(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, L_i(a_j) = \delta_{ij}$ donc $P(a_j) = \lambda_j$.

Ainsi, $P = P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3$.

4. On pose $a_1 = 0, a_2 = 1$ et $a_3 = 2$. Ces trois réels sont bien distincts.

On cherche $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $(P(a_1), P(a_2), P(a_3)) = (1, 3, 1)$.

Par bijectivité de Φ et d'après 3., l'unique solution est le polynôme $P = 1.L_1 + 3.L_2 + 1.L_3$.

On a $L_1 = \frac{(X - 1)(X - 2)}{2}, L_2 = \frac{X(X - 2)}{-1}$ et $L_3 = \frac{X(X - 1)}{2}$.

Donc $P = -2X^2 + 4X + 1$.

EXERCICE 92 algèbre

Énoncé exercice 92

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A .

1. Prouver que $\langle, \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E .
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.
On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E .
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
(a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
(b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E .
Déterminer $F^\perp$.

Corrigé exercice 92

1. $\langle, \rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable par linéarité de la trace, de la transposition et par distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans E .
De plus, une matrice et sa transposée ayant la même trace, on a :
 $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \text{tr}((A^T B)^T) = \text{tr}(B^T A) = \langle B, A \rangle$.
Donc $\langle, \rangle$ est symétrique.
On en déduit que $\langle, \rangle$ est bilinéaire et symétrique. (1)

Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$.

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n (A^T A)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (A^T)_{i,k} A_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{k,i}^2 \text{ donc } \langle A, A \rangle \geq 0.$$

Donc $\langle, \rangle$ est positive. (2)

Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$ telle que $\langle A, A \rangle = 0$.

Alors $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{k,i}^2 = 0$. Or, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_{k,i}^2 \geq 0$.

Donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_{k,i} = 0$. Donc $A = 0$.

Donc $\langle, \rangle$ est définie. (3)

D'après (1), (2) et (3), $\langle, \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Remarque importante : Soit $(A, B) \in E^2$.

On pose $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

$$\text{Alors } \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^n (A^T B)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (A^T)_{i,k} B_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{k,i} B_{k,i}.$$

Donc $\langle, \rangle$ est le produit scalaire canonique sur E .

2. (a) Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$.
alors $M^T = M$ et $M^T = -M$ donc $M = -M$ et $M = 0$.
Donc $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. (1)

Soit $M \in E$.

Posons $S = \frac{M + M^T}{2}$ et $A = \frac{M - M^T}{2}$.

On a $M = S + A$.

$$S^T = \left(\frac{M + M^T}{2} \right)^T = \frac{1}{2} (M^T + (M^T)^T) = \frac{1}{2} (M^T + M) = S, \text{ donc } S \in S_n(\mathbb{R}).$$

$$A^T = \left(\frac{M - M^T}{2} \right)^T = \frac{1}{2} (M^T - (M^T)^T) = \frac{1}{2} (M^T - M) = -A, \text{ donc } A \in A_n(\mathbb{R}).$$

On en déduit que $E = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$. (2)

D'après (1) et (2), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

Remarque : on pouvait également procéder par analyse et synthèse pour prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

(b) Prouvons que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^\perp$.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.

Prouvons que $\forall A \in A_n(\mathbb{R}), \langle S, A \rangle = 0$.

Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$.

$$\langle S, A \rangle = \text{tr}(S^T A) = \text{tr}(SA) = \text{tr}(AS) = \text{tr}(-A^T S) = -\text{tr}(A^T S) = -\langle A, S \rangle = -\langle S, A \rangle.$$

Donc $2\langle S, A \rangle = 0$ soit $\langle S, A \rangle = 0$.

On en déduit que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^\perp$ (1)

De plus, $\dim A_n(\mathbb{R})^\perp = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.

Or, d'après 2.(a), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ donc $\dim S_n(\mathbb{R}) = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.

On en déduit que $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim A_n(\mathbb{R})^\perp$. (2)

D'après (1) et (2), $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^\perp$.

3. On introduit la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_{i,j} = (e_{k,l})_{1 \leq k, l \leq n} \text{ avec } e_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors $F = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n})$.

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in E$.

Alors, en utilisant la remarque importante de la question 1.,

$$M \in F^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle M, E_{i,i} \rangle = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,i} = 0.$$

Donc $F^\perp = \text{Vect}(E_{i,j} \text{ telles que } (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \text{ et } i \neq j)$.

En d'autres termes, $F^\perp$ est l'ensemble des matrices comprenant des zéros sur la diagonale.

EXERCICE 94 algèbre

Énoncé exercice 94

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
Soit $c \in \mathbb{N}$.
Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.
3. On considère le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
(a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
(b) Dédurre des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S) .

Corrigé exercice 94

1. Théorème de Bézout :
Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
 $a \wedge b = 1 \iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $a \wedge b = 1$.
Soit $c \in \mathbb{N}$.
Prouvons que $ab|c \implies a|c \text{ et } b|c$.
Si $ab|c$ alors $\exists k \in \mathbb{Z} / c = kab$.
Alors, $c = (kb)a$ donc $a|c$ et $c = (ka)b$ donc $b|c$.

Prouvons que $(a|c \text{ et } b|c) \implies ab|c$.
 $a \wedge b = 1$ donc $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$. (1)
De plus $a|c$ donc $\exists k_1 \in \mathbb{Z} / c = k_1a$. (2)
De même, $b|c$ donc $\exists k_2 \in \mathbb{Z} / c = k_2b$. (3)
On multiplie (1) par c et on obtient $cau + cbv = c$.
Alors, d'après (2) et (3), $(k_2b)au + (k_1a)bv = c$, donc $(k_2u + k_1v)(ab) = c$ et donc $ab|c$.

On a donc prouvé que $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.
3. (a) **Première méthode** (méthode générale) :
Soit $x \in \mathbb{Z}$.
$$x \text{ solution de } (S) \iff \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = 6 + 17k \\ x = 4 + 15k' \end{cases}$$
$$\iff \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = 6 + 17k \\ 6 + 17k = 4 + 15k' \end{cases}$$

Or $6 + 17k = 4 + 15k' \iff 15k' - 17k = 2$.
Pour déterminer une solution particulière x_0 de (S) , il suffit donc de trouver une solution particulière (k_0, k'_0) de l'équation $15k' - 17k = 2$.
Pour cela, cherchons d'abord, une solution de l'équation $15u + 17v = 1$.
17 et 15 sont premiers entre eux.
Déterminons alors un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs tel que $15u_0 + 17v_0 = 1$.
On a : $17 = 15 \times 1 + 2$ puis $15 = 7 \times 2 + 1$.
Alors $1 = 15 - 7 \times 2 = 15 - 7 \times (17 - 15 \times 1) = 15 - 17 \times 7 + 15 \times 7 = 15 \times 8 - 17 \times 7$
Donc $8 \times 15 + (-7) \times 17 = 1$
Ainsi, $16 \times 15 + (-14) \times 17 = 2$.
On peut prendre alors $k'_0 = 16$ et $k_0 = 14$.
Ainsi, $x_0 = 6 + 17 \times k_0 = 6 + 17 \times 14 = 244$ est une solution particulière de (S) .

Deuxième méthode :
En observant le système (S) , on peut remarquer que $x_0 = -11$ est une solution particulière.
Cette méthode est évidemment plus rapide mais ne fonctionne pas toujours.

(b) x_0 solution particulière de (S) donc $\begin{cases} x_0 &= 6 & [17] \\ x_0 &= 4 & [15] \end{cases}$.

On en déduit que x solution de (S) si et seulement si $\begin{cases} x - x_0 &= 0 & [17] \\ x - x_0 &= 0 & [15] \end{cases}$

c'est-à-dire x solution de $(S) \iff (17|x - x_0 \text{ et } 15|x - x_0)$.

Or $17 \wedge 15 = 1$ donc d'après 2., x solution de $(S) \iff (17 \times 15)|x - x_0$.

Donc l'ensemble des solutions de (S) est $\{x_0 + 17 \times 15k, k \in \mathbb{Z}\} = \{244 + 255k, k \in \mathbb{Z}\}$.

BANQUE PROBABILITÉS

EXERCICE 95 probabilités

Énoncé exercice 95

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

- Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
 - Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
 - Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
- Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
 - Déterminer la loi de X .
 - Déterminer la loi de Y .

Corrigé exercice 95

- (a) L'expérience est la suivante : l'épreuve "le tirage d'une boule dans l'urne" est répétée 5 fois.
Comme les tirages se font avec remise, ces 5 épreuves sont indépendantes.
Chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le joueur tire une boule blanche (succès avec la probabilité $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$) ou le joueur tire une boule noire (échec avec la probabilité $\frac{4}{5}$).
La variable X considérée représente donc le nombre de succès au cours de l'expérience et suit donc une loi binomiale de paramètre $(5, \frac{1}{5})$.

C'est-à-dire $X(\Omega) = \llbracket 0, 5 \rrbracket$ et : $\forall k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket, P(X = k) = \binom{5}{k} (\frac{1}{5})^k (\frac{4}{5})^{5-k}$.

Donc, d'après le cours, $E(X) = 5 \times \frac{1}{5} = 1$ et $V(X) = 5 \times \frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5} = 0,8$.

- D'après les hypothèses, on a $Y = 2X - 3(5 - X)$, c'est-à-dire $Y = 5X - 15$.
On en déduit que $Y(\Omega) = \{5k - 15 \text{ avec } k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket\}$.

Et on a $\forall k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket, P(Y = 5k - 15) = P(X = k) = \binom{5}{k} (\frac{1}{5})^k (\frac{4}{5})^{5-k}$.

$Y = 5X - 15$, donc $E(Y) = 5E(X) - 15 = 5 - 15 = -10$.

De même, $Y = 5X - 15$, donc $V(Y) = 25V(X) = 25 \times \frac{4}{5} = 20$.

- Dans cette question, le joueur tire successivement, sans remise, 5 boules dans cette urne.
 - Comme les tirages se font sans remise, on peut supposer que le joueur tire les 5 boules dans l'urne en une seule fois au lieu de les tirer successivement. Cette supposition ne change pas la loi de X .
 $X(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$.
Notons A l'ensemble dont les éléments sont les 10 boules initialement dans l'urne.
L'univers Ω correspond à l'ensemble des tirages possibles dans A .
Il est constitué de toutes les parties à 5 éléments de A .
Donc $\text{card } \Omega = \binom{10}{5}$.
Soit $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$.
L'événement $(X = k)$ est réalisé lorsque le joueur tire k boules blanches et $(5 - k)$ boules noires dans l'urne.
Notons A_k l'ensemble des parties à 5 éléments de A contenant k boules blanches et $(5 - k)$ boules noires.

Il y a $\binom{2}{k}$ possibilités pour le choix des boules blanches et $\binom{8}{5-k}$ possibilités pour le choix des boules noires.

C'est-à-dire, $\text{card}A_k = \binom{2}{k} \binom{8}{5-k}$.

Donc, comme tous les tirages sont équiprobables, $\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, $P(X = k) = \frac{\text{card}A_k}{\text{card}\Omega} = \frac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$.

(b) On a toujours $Y = 5X - 15$.

On en déduit que $Y(\Omega) = \{5k - 15 \text{ avec } k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket\}$.

Et on a $\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, $P(Y = 5k - 15) = P(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$.

EXERCICE 98 probabilités

Énoncé exercice 98

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$).

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X . Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
 - (a) Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
 - (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}$.

- (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z .

Corrigé exercice 98

1. L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée n fois et ces n épreuves sont indépendantes.
De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1 - p$ (échec).
La variable X considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binomiale de paramètres (n, p) .

C'est-à-dire $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

2. (a) Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
Sous la condition $(X = i)$, la secrétaire rappelle $n - i$ correspondants lors de la seconde série d'appels.
Comme cette nouvelle série d'appels se fait dans les mêmes conditions que pour la question 1., sauf pour le nombre de répétitions qui est maintenant égal à $n - i$, alors on se retrouve dans le schéma d'une loi binomiale de paramètre $(n - i, p)$.

$$\text{Donc } P(Y = k | X = i) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \in \llbracket 0, n-i \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(b) \quad Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(Z = k) = \sum_{i=0}^k P(X = i \cap Y = k - i) = \sum_{i=0}^k P(Y = k - i | X = i) P(X = i).$$

$$\text{Soit } k \in \llbracket 0, n \rrbracket. \text{ D'après les questions précédentes, } P(Z = k) = \sum_{i=0}^k \binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} p^k (1-p)^{2n-k-i}.$$

$$\text{Or, d'après l'indication, } \binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}.$$

$$\text{Donc } P(Z = k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p} \right)^i.$$

Donc d'après le binôme de Newton,

$$P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(\frac{2-p}{1-p} \right)^k = \binom{n}{k} (p(2-p))^k ((1-p)^2)^{n-k}.$$

On vérifie que $1 - p(2-p) = (1-p)^2$ et donc on peut conclure que :

Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$.

Remarque : preuve (non demandée dans l'exercice) de l'égalité proposée dans l'indication :

$$\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \frac{(n-i)!}{(n-k)! (k-i)!} \frac{n!}{i! (n-i)!} = \frac{n!}{(k-i)! (n-k)! i!} = \frac{k!}{(k-i)! i!} \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}.$$

(c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$, alors :

$$E(Z) = np(2-p) \text{ et } V(Z) = np(2-p)(1-p(2-p)) = np(2-p)(p-1)^2.$$

EXERCICE 99 probabilités

Énoncé exercice 99

- Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi $\left(\begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, Y_n \in L^2$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

Prouver que : $\forall a \in]0, +\infty[, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$.

- Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Corrigé exercice 99

- Soit $a \in]0, +\infty[$. Pour toute variable aléatoire X telle que $X \in L^2$, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

- On pose $X = \frac{S_n}{n}$.

Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables Y_i ont la même espérance, on a $E(X) = E(Y_1)$.

De plus, comme les variables sont indépendantes, on a $V(X) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{1}{n} V(Y_1)$.

Alors, en appliquant 1. à X , on obtient le résultat souhaité.

- $\forall i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_i valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon.

Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p = \frac{2}{5} = 0,4$.

Les variables Y_i suivent la même loi, sont indépendantes et $\forall i \in \mathbb{N}^*, Y_i \in L^2$.

On a d'après le cours, $\forall i \in \mathbb{N}^*, E(Y_i) = 0,4$ et $V(Y_i) = 0,4(1 - 0,4) = 0,24$.

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. S_n représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.

Alors $T_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de n tirages.

On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) > 0,95$.

$$\begin{aligned} \text{Or } P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) &= P\left(0,35 \leq \frac{S_n}{n} \leq 0,45\right) = P\left(-0,05 \leq \frac{S_n}{n} - E(Y_1) \leq 0,05\right) \\ &= P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leq 0,05\right) = 1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right). \end{aligned}$$

On a donc $P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) = 1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.

Or, d'après la question précédente, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq 0,05\right) \leq \frac{0,24}{n(0,05)^2}$.

Donc $P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) \geq 1 - \frac{0,24}{n(0,05)^2}$.

Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang n , on a $1 - \frac{0,24}{n(0,05)^2} \geq 0,95$.

La résolution de cette inéquation donne $n \geq \frac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n \geq 1920$.

EXERCICE 104 probabilités

Énoncé exercice 104

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X .
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X .
3. (a) Calculer $E(X)$.
(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Corrigé exercice 104

1. $X(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$.
2. (a) Pour que l'événement $(X = 2)$ se réalise, on a $\binom{3}{2}$ possibilités pour choisir les 2 compartiments restant vides. Les deux compartiments restant vides étant choisis, chacune des n boules viendra se placer dans le troisième compartiment avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
De plus les placements des différentes boules dans les trois compartiments sont indépendants.
Donc $P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.
- (b) Déterminons $P(X = 1)$.
Pour que l'événement $(X = 1)$ se réalise, on a $\binom{3}{1}$ possibilités pour choisir le compartiment restant vide. Le compartiment restant vide étant choisi, on note A l'événement : «les n boules doivent se placer dans les deux compartiments restants (que nous appellerons compartiment a et compartiment b) sans laisser l'un d'eux vide».

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

On note A_k l'événement : « k boules se placent dans le compartiment a et les $(n-k)$ boules restantes dans le compartiment b ».

On a alors $A = \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$.

On a $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $P(A_k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Donc $P(X = 1) = \binom{3}{1} P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) = 3 \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k)$ car $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ sont deux à deux incompatibles.

Donc

$$P(X = 1) = 3 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 2\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2).$$

$$\text{Donc } P(X = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2).$$

Enfin, $P(X = 0) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1)$ donc $P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2)$.

$$\text{Donc } P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 1).$$

Autre méthode :

Une épreuve peut être assimilée à une application de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (ensemble des numéros des boules) dans $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ (ensemble des numéros des cases).

Notons Ω l'ensemble de ces applications.

On a donc : $\text{card } \Omega = 3^n$.

Les boules vont se "ranger aléatoirement dans les trois compartiments", donc il y a équiprobabilité sur Ω .

(a) L'événement $(X = 2)$ correspond aux applications dont les images se concentrent sur le même élément de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$, c'est-à-dire aux applications constantes.

$$\text{Donc } P(X = 2) = \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

(b) Comptons à présent le nombre d'applications correspondant à l'événement $(X = 1)$, c'est-à-dire le nombre d'applications dont l'ensemble des images est constitué de deux éléments exactement.

On a 3 possibilités pour choisir l'élément de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ qui n'a pas d'antécédent et ensuite, chaque fois, il faut compter le nombre d'applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers les deux éléments restants de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$, en excluant bien sûr les deux applications constantes.

On obtient donc $2^n - 2$ applications.

$$\text{D'où } P(X = 1) = \frac{3 \times (2^n - 2)}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}} (2^n - 2).$$

Enfin, comme dans la méthode précédente, $P(X = 0) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1)$ donc

$$P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2).$$

$$3. (a) E(X) = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) + 2P(X = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2) + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

$$\text{Donc } E(X) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

$$(b) \text{ D'après 3.(a), } \lim_{n \rightarrow +\infty} E(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Quand le nombre de boules tend vers $+\infty$, en moyenne aucun des trois compartiments ne restera vide.

EXERCICE 105 probabilités

Énoncé exercice 105

- Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
- On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
(a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
(c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Corrigé exercice 105

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit B un événement de probabilité non nulle et $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.

$$\text{Alors, } \forall i_0 \in I, P_B(A_{i_0}) = \frac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\sum_{i \in I} P(A_i)P_{A_i}(B)}.$$

$$\text{Preuve : } P_B(A_{i_0}) = \frac{P(A_{i_0} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{P(B)}. \quad (1)$$

$$\text{Or } (A_i)_{i \in I} \text{ un système complet d'événements donc } P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B).$$

$$\text{Donc } P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i)P_{A_i}(B). \quad (2).$$

(1) et (2) donnent le résultat souhaité.

- (a) On tire au hasard un dé parmi les 100 dés.
Notons T l'événement : «le dé choisi est pipé».
Notons A l'événement : « On obtient le chiffre 6 lors du lancer ».
On demande de calculer $P_A(T)$.
Le système $(T, \bar{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.

$$\text{On a d'ailleurs, } P(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \text{ et donc } P(\bar{T}) = \frac{3}{4}.$$

Alors, d'après la formule de Bayes, on a :

$$P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\bar{T}}(A)P(\bar{T})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On choisit au hasard un dé parmi les 100 dés.
 $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_k l'événement « on obtient le chiffre 6 au $k^{\text{ième}}$ lancer ».

$$\text{On pose } A = \bigcap_{k=1}^n A_k.$$

On nous demande de calculer $p_n = P_A(T)$.

Le système $(T, \bar{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.

$$\text{On a d'ailleurs, } P(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \text{ et donc } P(\bar{T}) = \frac{3}{4}.$$

Alors d'après la formule de Bayes, on a :

$$p_n = P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P(\overline{T})}$$

$$\text{Donc } p_n = \frac{\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

$$(c) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}} \quad \text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1.$$

Ce qui signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a de fortes chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

EXERCICE 107 probabilités

Énoncé exercice 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.

L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.

On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 .

Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1 .
2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n .

Corrigé exercice 107

1. Notons U_1 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_1 .
Notons U_2 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_2 .
 (U_1, U_2) est un système complet d'événements.
Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
Donc $p_1 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}$.
On a donc $p_1 = \frac{17}{35}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.
Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$.
Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n)$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
Donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
On résout l'équation $l = -\frac{6}{35}l + \frac{4}{7}$ et on trouve $l = \frac{20}{41}$.
On considère alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = p_n - l$.
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\frac{6}{35}$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.
Or $u_1 = p_1 - l = \frac{17}{35} - \frac{20}{41} = -\frac{3}{1435}$.
On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = u_n + l$, c'est-à-dire $p_n = -\frac{3}{1435} \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} + \frac{20}{41}$.

EXERCICE 109 probabilités

Énoncé exercice 109

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer la loi de Y .

Corrigé exercice 109

1. $X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note B_i la $i^{\text{ème}}$ boule blanche.

$\forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$, on note N_i la $i^{\text{ème}}$ boule noire.

On pose $E = \{B_1, B_2, \dots, B_n, N_1, N_2\}$.

Alors Ω est l'ensemble des permutations de E et donc $\text{card}(\Omega) = (n+2)!$.

$(X = 1)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est blanche.

On a donc n possibilités pour le choix de la première boule blanche et donc $(n+1)!$ possibilités pour les tirages restants.

$$\text{Donc } P(X = 1) = \frac{n \times (n+1)!}{(n+2)!} = \frac{n}{n+2}.$$

$(X = 2)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est noire et la seconde est blanche.

On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis n possibilités pour la seconde boule et enfin $n!$ possibilités pour les tirages restants.

$$\text{Donc } P(X = 2) = \frac{2 \times n \times (n)!}{(n+2)!} = \frac{2n}{(n+1)(n+2)}.$$

$(X = 3)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule et la seconde boule sont noires.

On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis une seule possibilité pour la seconde et enfin $n!$ possibilités pour les boules restantes.

$$\text{Donc } P(X = 3) = \frac{2 \times 1 \times (n)!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Autre méthode :

Dans cette méthode, on ne s'intéresse qu'aux "premières" boules tirées, les autres étant sans importance.

$X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

$(X = 1)$ est l'événement : "obtenir une boule blanche au premier tirage".

$$\text{Donc } P(X = 1) = \frac{\text{nombre de boules blanches}}{\text{nombre de boules de l'urne}} = \frac{n}{n+2}.$$

$(X = 2)$ est l'événement : "obtenir une boule noire au premier tirage puis une boule blanche au second tirage".

$$\text{D'où } P(X = 2) = \frac{2}{n+2} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{(n+2)(n+1)}, \text{ les tirages se faisant sans remise.}$$

$(X = 3)$ est l'événement : "obtenir une boule noire lors de chacun des deux premiers tirages puis une boule blanche au troisième tirage".

$$\text{D'où } P(X = 3) = \frac{2}{n+2} \times \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}, \text{ les tirages se faisant sans remise.}$$

2. $Y(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.
Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

L'événement $(Y = k)$ correspond aux tirages des $(n + 2)$ boules où les $(k - 1)$ premières boules tirées ne sont ni B_1 ni N_1 et la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est B_1 ou N_1 .

On a donc, pour les $(k - 1)$ premières boules tirées, $\binom{n}{k-1}$ choix possibles de ces boules et $(k - 1)!$

possibilités pour leur rang de tirage sur les $(k - 1)$ premiers tirages, puis 2 possibilités pour le choix de la $k^{\text{ième}}$ boule et enfin $(n + 2 - k)!$ possibilités pour les rangs de tirage des boules restantes.

$$\text{Donc } P(Y = k) = \frac{\binom{n}{k-1} \times (k-1)! \times 2 \times (n+2-k)!}{(n+2)!} = \frac{2 \frac{n!}{(n-k+1)!} \times (n+2-k)!}{(n+2)!}$$

$$\text{Donc } P(Y = k) = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}.$$

Autre méthode :

$$Y(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket.$$

On note A_k l'événement " une boule ne portant pas le numéro 1 est tirée au rang k ".

Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

$$\text{On a : } (Y = k) = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}.$$

Alors, d'après la formule des probabilités composées,

$$P(Y = k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-2}}(A_{k-1})P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1}}(\overline{A_k}).$$

$$P(Y = k) = \frac{n}{n+2} \times \frac{n-1}{(n+2)-1} \times \frac{n-2}{(n+2)-2} \times \dots \times \frac{n-(k-2)}{(n+2)-(k-2)} \times \frac{2}{(n+2)-(k-1)}$$

$$P(Y = k) = \frac{n}{n+2} \times \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{n-k+2}{n-k+4} \times \frac{2}{n-k+3}.$$

$$P(Y = k) = 2 \frac{n!}{(n-k+1)!} \times \frac{(n-k+2)!}{(n+2)!}.$$

$$P(Y = k) = \frac{2(n-k+2)}{(n+2)(n+1)}.$$

EXERCICE 112 probabilités

Énoncé exercice 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Corrigé exercice 112

1. On note $F = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset B\}$.

Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On pose $F_p = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset B \text{ et } \text{card} B = p\}$.

Pour une partie B à p éléments donnée, le nombre de parties A de E telles que $A \subset B$ est $\text{card } \mathcal{P}(B) = 2^p$. De plus, on a $\binom{n}{p}$ possibilités pour choisir une partie B de E à p éléments.

On en déduit que : $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{card } F_p = \binom{n}{p} 2^p$.

Or $F = \bigcup_{p=0}^n F_p$ avec $F_0, F_1, \dots, F_n$ deux à deux disjoints.

Donc $a = \text{card } F = \sum_{p=0}^n \text{card } F_p = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p = 3^n$, d'après le binôme de Newton.

Conclusion : $a = 3^n$.

Autre méthode :

Le raisonnement suivant (corrigé non détaillé) permet également de répondre à la question 1.

Notons encore $F = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset B\}$.

À tout couple (A, B) de F , on peut associer l'application $\varphi_{A,B}$ définie par :

$$\varphi_{A,B} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{1, 2, 3\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 2 & \text{si } x \notin A \text{ et } x \in B \\ 3 & \text{si } x \notin B \end{cases} \end{array}$$

On note $\mathcal{A}(E, \{1, 2, 3\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{1, 2, 3\}$.

Alors l'application $\Theta : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathcal{A}(E, \{1, 2, 3\}) \\ (A, B) & \longmapsto & \varphi_{A,B} \end{array}$ est bijective.

Le résultat en découle.

2. $\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \cap B = \emptyset\} = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset \overline{B}\}$.

$$\begin{aligned} \text{Or } \text{card } \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset \overline{B}\} &= \text{card } \{(A, \overline{B}) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset \overline{B}\} \\ &= \text{card } \{(A, C) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset C\} \\ &= a. \end{aligned}$$

Donc $b = a$.

3. Compter tous les triplets (A, B, C) tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et tels que $A \cup B \cup C = E$ revient à compter tous les couples (A, B) tels que $A \cap B = \emptyset$ car, alors, C est obligatoirement égal à $\overline{A \cup B}$.

En d'autres termes, $c = \text{card } \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \cap B = \emptyset\} = b = 3^n$.

Ex 1 : [Mines]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique P_n dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall \theta \in]0, \pi/2[, P_n \left(\frac{1}{\tan^2 \theta} \right) = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1} \theta}.$$

2. Préciser le degré et les racines de P_n . Étudier la somme des racines.

3. Montrer que : $\forall \theta \in]0, \pi/2[, \frac{1}{\tan^2 \theta} \leq \frac{1}{\theta^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}$.

4. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Correction :

1. Nous avons $\sin(2n+1)\theta = \text{Im}(e^{i(2n+1)\theta}) = \text{Im}((\cos \theta + i \sin \theta)^{2n+1}) =$

$$\text{Im} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \sin^k \theta \cos^{2n+1-k} \theta \right) = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p \sin^{2p+1} \theta \cos^{2n+1-2p-1} \theta, \text{ car on ne}$$

garde que les puissances impaires de i dans la somme pour avoir la partie imaginaire.

$$\text{On a donc : } \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1} \theta} = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p \frac{\cos^{2(n-p)} \theta}{\sin^{2(n-p)} \theta} = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p \frac{1}{\tan^{2(n-p)} \theta}.$$

Ainsi

$$P_n = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{n-p}$$

Montrons l'unicité : soit $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant la même propriété.

On a donc : $\forall \theta \in]0, \pi/2[, P_n \left(\frac{1}{\tan^2 \theta} \right) = Q_n \left(\frac{1}{\tan^2 \theta} \right)$. Or $\left\{ \frac{1}{\tan^2 \theta}, \theta \in]0, \pi/2[\right\} = \mathbb{R}_+^*$. Ainsi P_n et Q_n coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est infini, donc

$$P_n = Q_n$$

2. $d^\circ P_n = n$

On constate que pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $P_n \left(\frac{1}{\tan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} \right) = 0$ et que $\left\{ \frac{k\pi}{2n+1}, 1 \leq k \leq n \right\}$ est inclus dans $]0, \pi/2[$.

De plus $\theta \mapsto \frac{1}{\tan^2 \theta}$ est strictement décroissante sur $]0, \pi/2[$. Ainsi les $\frac{1}{\tan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)}$, pour $1 \leq k \leq n$ sont des racines deux à deux distinctes de P_n et comme P_n est de degré n ,

$$\text{l'ensemble des racines de } P_n \text{ est } \left\{ \frac{1}{\tan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)}, 1 \leq k \leq n \right\}$$

Le coefficient de degré n de P_n est $\binom{2n+1}{1} = 2n+1$ et celui de degré $n-1$ est $-\binom{2n+1}{3}$ et donc la somme des racines est

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} = \frac{\binom{2n+1}{3}}{2n+1}$$

3. La fonction $\tan$ est convexe sur $[0, \pi/2[$, car $\tan' = 1 + \tan^2$ qui est croissante sur $[0, \pi/2[$. Ainsi : $\forall \theta \in [0, \pi/2[$, $\tan(\theta) \geq (\theta - 0)\tan'(0) + \tan(0) = \theta$, puis comme tout est strictement positif, alors par décroissance de $x \mapsto 1/x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{\forall \theta \in]0, \pi/2[, \frac{1}{\tan^2 \theta} \leq \frac{1}{\theta^2}}$$

On pose $\phi : \theta \mapsto \theta - \tan(\theta) \cdot \cos(\theta)$. On calcule : $\forall \theta \in [0, \pi/2[$, $\phi'(\theta) = 1 - \cos(\theta) \geq 0$. Ainsi ϕ est croissante sur $[0, \pi/2[$. Comme $\phi(0) = 0$, alors ϕ est positive sur $[0, \pi/2[$ et donc : $\forall \theta \in]0, \pi/2[$, $0 \leq \tan(\theta) \cdot \cos(\theta) \leq \theta \Rightarrow \tan^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta) = \frac{\tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)} \leq \theta^2$ et donc :

$$\boxed{\forall \theta \in]0, \pi/2[, \frac{1}{\theta^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}}$$

4. Les deux questions précédentes nous donnent :

$$\frac{\binom{2n+1}{3}}{2n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{(2n+1)^2}{k^2 \pi^2} \leq \frac{\binom{2n+1}{3}}{2n+1} + n. \text{ Or } \frac{\binom{2n+1}{3}}{2n+1} = \frac{2n(2n-1)}{3!} \sim \frac{2n^2}{3}.$$

Ainsi $\sum_{k=1}^n \frac{(2n+1)^2}{k^2 \pi^2} \sim \frac{2n^2}{3}$ et comme $(2n+1)^2 \sim 4n^2$, alors

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Ex 2 : [Mines] On veut déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(*) : \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2i\pi P(n)} = 1$.

On pose $B_0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$.

1. Soit P vérifiant $(*)$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(B_0, \dots, B_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.
3. Montrer que P dans $\mathbb{R}[X]$ vérifie $(*)$ si et seulement si P est une combinaison linéaire à coefficients entiers des B_k .

Dans les questions 1 et 3, on pourra raisonner par récurrence en regardant $P(X+1) - P(X)$ pour les diverses hérédités.

Correction :

1. On exclut $P = 0$ qui est un cas évident.

Montrons le résultat par récurrence sur le degré de p . On pose $\mathcal{P}(p)$: pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré p tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2i\pi P(n)} = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$.

• $\mathcal{P}(0)$. Soit $P = c$ une constante non nulle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2i\pi c} = 1$. Cela revient à dire que $e^{2i\pi c} = 1$, puis $2\pi c \equiv 0[2\pi]$, soit $c \equiv 0[1]$, donc c est dans $\mathbb{Z}$.

• Soit $p \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(p)$. Soit $P = \sum_{k=0}^{p+1} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ de degré $p+1$. On pose

$Q(X) = P(X+1) - P(X)$ qui est donc de degré p (en effet :

$$Q(X) = a_{p+1}[(X+1)^{p+1} - X^{p+1}] + \sum_{k=0}^p a_k \underbrace{[(X+1)^k - X^k]}_{d^\circ < k} = a_{p+1}pX^p + \underbrace{\dots}_{d^\circ < k} \text{ en développant}$$

$$(X+1)^{p+1} - X^{p+1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{2i\pi Q(n)} = \frac{e^{2i\pi P(n+1)}}{e^{2i\pi P(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1}$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n) \in \mathbb{Z}$.

On a par ailleurs $P(n) = \sum_{k=0}^{n-1} Q(k) + P(0)$. Ainsi $e^{2i\pi P(n)} = e^{2i\pi P(0)}$, puis :

$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2i\pi P(n)} = e^{2i\pi P(0)}$ et donc grâce à l'initialisation $P(0)$ est dans $\mathbb{Z}$. La relation

$P(n) = \sum_{k=0}^{n-1} Q(k) + P(0)$ permet de conclure que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$, ce qui permet d'achever la récurrence.

2. Famille de degré échelonné, donc libre, à $N + 1$ éléments dans un espace vectoriel de dimension $N + 1$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Remarquons tout d'abord que pour $n \in \llbracket 0, k - 1 \rrbracket$, on a $B_k(n) = 0$.

Pour $n \geq k$, on a : $B_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. Ainsi : $\forall k, n \in \mathbb{N}$, $B_k(n) \in \mathbb{Z}$. Ainsi si P est une combinaison linéaire à coefficients entiers des B_k , alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$, puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{2i\pi P(n)} = 1$, d'où la propriété (*).

Réciproquement, on suppose que P vérifie (*). Grâce à la première question, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$.

Montrons par récurrence que P est une combinaison linéaire à coefficients entiers des B_k .

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(k)$: tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré k tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers de $B_0, \dots, B_k$.

$\mathcal{P}(0)$: soit $P = c$ un polynôme constant vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$, alors c est dans $\mathbb{Z}$ et $P = cB_0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(k)$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $k + 1$. On pose

$\Delta : Q \mapsto Q(X + 1) - Q(X)$ qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. On remarque que pour $l \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \text{on a : } \Delta(B_l) &= \frac{(X+1)(X)\dots(X-l+2)}{l!} - \frac{X(X-1)\dots(X-l+1)}{l!} = \\ &= \frac{X(X-1)\dots(X-l+2)[X+1-(X-l+1)]}{l!} = \frac{X(X-1)\dots(X-l+2) \times l}{l!} = \\ &= \frac{X(X-1)\dots(X-l+2)}{(l-1)!} = B_{l-1}. \end{aligned}$$

En reprenant le raisonnement de la première question, on constate que $\Delta(P)$ est de degré k et on a aussi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta(P)(n) \in \mathbb{Z}$. Grâce à $\mathcal{P}(k)$, il

existe $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\Delta(P) = \sum_{l=0}^k a_l B_l = \Delta(\sum_{l=0}^k a_l B_{l+1})$ et donc $P - \sum_{l=0}^k a_l B_{l+1}$ est dans

$\text{Ker}(\Delta)$. Déterminons ce dernier ensemble.

Soit $Q \in \text{Ker} \varphi$. On a donc : $Q(X + 1) = Q(X)$. Par récurrence, on montre que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(X + n) = Q(X)$. Ainsi en remplaçant X par 0, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n) - Q(0) = 0$.

Ainsi le polynôme $Q(X) - Q(0)$ admet pour racine tous les n dans $\mathbb{N}$, qui est infini. Ainsi $Q(X) - Q(0) = 0$, puis $Q(X) = Q(0)$. Donc Q est constant.

Ainsi $P - \sum_{l=0}^k a_l B_{l+1}$ est constant que l'on note c . On a : $c = P(0) - \sum_{l=0}^k a_l B_{l+1}(0)$ qui est dans

$\mathbb{Z}$, donc $P = cB_0 + \sum_{l=0}^k a_l B_{l+1}$, d'où $\mathcal{P}(k + 1)$, ce qui achève la récurrence et donne le sens direct de l'équivalence à démontrer.

Ex 3 : [Mines] Quel est le chiffre des unités de $2022^{2022^{2022}}$?

Correction : On a bien entendu $2022 \equiv 2 \pmod{10}$. Les puissances successives (en regardant les congruences) donnent $2022^2 \equiv 4 \pmod{10}$, $2022^3 \equiv 8 \pmod{10}$, $2022^4 \equiv 6 \pmod{10}$ et $2022^5 \equiv 2 \pmod{10}$, donc on a une période de 5 sur les puissances de 2022. Ainsi il serait intéressant d'avoir la congruence modulo 5 de 2022^{2022} . Les calculs précédents donnent : $2022^4 \equiv 1 \pmod{5}$ et donc $2022^{2022} = 2022^{404 \times 5 + 2} \equiv 2022^2 \pmod{5} \equiv 2^2 \pmod{5} \equiv 4 \pmod{5}$.

En conclusion, $2022^{2022^{2022}} \equiv 2022^4 \pmod{10} \equiv 6 \pmod{10}$. Le chiffre des unités de $2022^{2022^{2022}}$ est 6.

Ex 4 : [Mines] Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriel de dimension finie.

1. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $uvu = u$ et $vuv = v$. Montrer que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(v)$.
2. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E_1 un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E , F_1 un supplémentaire de $\text{Im}(u)$ dans F . Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $\text{Ker}(v) = F_1$, $\text{Im}(v) = E_1$, $uvu = u$ et $vuv = v$.

Correction :

1. Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $x \in E$.

Analyse : Soit $x = y + z$ une éventuelle décomposition, avec $y \in \text{Ker}(u)$ et $z \in \text{Im}(u)$. Il existe $t \in F$ tel que $z = v(t)$. On compose par vu , ce qui donne $vuv(t) = vu(x)$ et par hypothèse, $vuv(t) = v(t)$, d'où $z = v(t) = vu(x)$ et $y = x - vu(x)$.

Examen : on pose $z = vu(x)$ et $y = x - vu(x)$. On a bien $y + z = x$.

On a aussi : $u(y) = u(x) - uvu(x) = 0$ par hypothèse, et $vu(x) \in \text{Im}(v)$ par définition.

L'analyse-synthèse prouve l'existence et l'unicité de la décomposition, donc $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(v)$.

2. On raisonne par analyse-synthèse pour construire v .

Soit v une éventuelle solution.

On rappelle que par lemme d'isomorphisme utilisé dans la preuve du théorème du rang, l'endomorphisme u induit un isomorphisme de E_1 sur $\text{Im}(u)$, que l'on note $\tilde{u}$. Par construction, v est nul sur F_1 , on cherche donc à construire v sur $\text{Im}(u)$. Si $y \in \text{Im}(u)$, d'après le rappel précédente, il existe un unique $t \in E_1$ tel que $y = u(t)$. On veut donc $uvu(t) = u(t) = y$ c'est-à-dire $uv(y) = y$, soit $\tilde{u}(v(y)) = y$. Comme on veut que $v(y)$ soit dans E_1 , alors $v(y) = \tilde{u}^{-1}(y)$, ce qui définit v sur $\text{Im}(u)$. Cela achève la construction de v car une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée de ses restrictions sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de l'espace sur lequel elle est définie.

Procédons maintenant à la synthèse, on pose v tel que :

$v|_{F_1} = 0$ et $v|_{\text{Im}(u)} = \tilde{u}^{-1}$, ce qui définit parfaitement v sur F , car $F_1 \oplus \text{Im}(u) = F$.

On a alors on a : $\forall (a, b) \in F_1 \times \text{Im}(u)$, $0 = v(a + b) = v(b) = \tilde{u}^{-1}(b) \Leftrightarrow b = 0$, car $\tilde{u}$ est un isomorphisme, donc $\text{Ker}(v) = F_1$.

On a aussi $v(F) = v(F_1 \oplus \text{Im}(u)) = v(\text{Im}(u)) = \tilde{u}^{-1}(\text{Im}(u)) = E_1$, car $\tilde{u}$ est un isomorphisme de E_1 dans $\text{Im}(u)$.

Par ailleurs :

- $vuv(y) = v(y)$ si $y \in F_1$, car dans ce cas $v(y) = 0$ et si y est dans $\text{Im}(u)$, on a $vuv(y) = vu\tilde{u}^{-1}(y) = v(\tilde{u}(\tilde{u}^{-1}(y))) = v(y)$. Par linéarité, on a $vuv = v$ sur F .
- si $x \in \text{Ker}(u)$, on a : $uvu(x) = u(x)$, puis si x est dans E_1 , on a $uvu(x) = uv\tilde{u}(x) = u\tilde{u}^{-1}\tilde{u}(x) = u(x)$. Comme $E_1 \oplus \text{Ker}(u) = E$, alors par linéarité, on a : $uvu = u$ sur E .

Cela achève la preuve de l'existence et l'unicité d'un tel endomorphisme v .

Ex 5 : [Mines] Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note u l'endomorphisme de E vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u(e_n) = e_{n+1}$ et on pose $\Phi : v \mapsto u \circ v - v \circ u$ qui est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que Φ n'est pas injective.
2. Montrer que $\text{Ker } \Phi$ est de dimension infinie.
3. Montrer que, pour tout $x_0 \in E$ et $w \in \mathcal{L}(E)$, il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\Phi(v) = w$ et $v(e_0) = x_0$.

Correction :

1. On note que Φ est linéaire. Il suffit de constater que $\Phi(u) = 0$ et $u \neq 0$ pour conclure à la non-injectivité de Φ .
2. On constate directement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n \in \text{Ker } \Phi$. Il reste à prouver que la famille $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre pour conclure. On choisit une sous-famille finie $(u_i)_{i \in I}$ et $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^I$ tels que

$\sum_{i \in I} \lambda_i u^i = 0$. Posons $A = \{i \in I, \lambda_i \neq 0\}$ qui est une partie de $\mathbb{N}$ et supposons $A \neq \emptyset$. On choisit

$i_0 = \min(A)$. Il suffit d'évaluer $v = \sum_{i \in I} \lambda_i u^i$ en e_0 . On a : $v(e_0) = \sum_{i \in I} \lambda_i u^i(e_0) = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$. Dans

cette combinaison, la coordonnée en e_{i_0} est λ_{i_0} , ainsi par liberté des $(e_i)_{i \in I}$ cela donne $\lambda_{i_0} = 0$ ce qui fournit la contradiction recherchée. Pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre, donc la famille $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$. En conclusion, $\text{Ker } \Phi$ est de dimension infinie.

- 3.** On raisonne par analyse synthèse. Supposons l'existence d'un tel v . On aurait alors par définition, $v(e_0) = x_0$, puis en évaluant $u \circ v - v \circ u = w$ en e_n , on obtient $v(e_{n+1}) = u(v(e_n)) - w(e_n)$. Par récurrence, cela donne une unique possibilité pour $v(e_n)$. Cela permet de définir un unique endomorphisme de E par l'image de la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Réciproquement, notons v l'endomorphisme de E défini comme dans l'analyse précédente. On a alors par construction pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi(v)(e_n) = w(e_n)$, ce qui prouve bien que $\Phi(v) = w$, et de plus, $v(e_0) = x_0$, ce qui termine la preuve par unicité de la définition d'un endomorphisme par l'image d'une base donnée.

Ex 6 : [Mines] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = g(x)v$.

Correction : $f^2 = 0$ implique que : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. Grâce au théorème du rang, on a :

$3 = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) \geq 2 \dim(\text{Im}(f))$, donc $\dim(\text{Im}(f)) \leq 3/2$ et donc $\dim(\text{Im}(f))$ vaut 0 ou 1. Ainsi il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Im}(f) = \text{vect}(v)$ (avec éventuellement $v = 0$, si $f = 0$).

Si v est nul (cas où $f = 0$), toute forme linéaire g convient.

Si v est non nul, alors pour tout x dans $\mathbb{R}^3$, il existe un scalaire $g(x) \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = g(x)v$, car $f(x)$ est dans $\text{vect}(v)$.

Il faut montrer que g est linéaire. Soient $x, y \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a : $f(\alpha x + y) = g(\alpha x + y)v$. Par linéarité de f , on a : $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y) = \alpha g(x)v + g(y)v$ ainsi : $g(\alpha x + y)v = (\alpha g(x) + g(y))v$, soit $0 = (\alpha g(x) + g(y) - g(\alpha x + y))v$. Comme v est non nul, alors $\alpha g(x) + g(y) - g(\alpha x + y)$, soit $\alpha g(x) + g(y) = g(\alpha x + y)$, ce qui prouve la linéarité de g .

Ex 7 : [Mines]

- 1.** Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et A un sous-espace de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. On suppose que $\bigcap_{l \in A} \text{Ker}(l) = \{0\}$. Montrer que $A = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
- 2.** Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que la matrice $[f_i(x_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$ soit inversible. Pour le sens direct, on pourra utiliser la question précédente avec les formes linéaires $e_a : f \mapsto f(a)$ définies sur $E = \text{vect}(f_1, \dots, f_n)$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Correction :

- 1.** Soit $p = \dim(A)$. Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de A . On pose $\Psi : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R}^p \\ x & \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{cases}$.

Soit $x \in \text{Ker}(\Psi)$. Soit $l \in A$. Il existe donc $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $l = \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i$ et donc x

est dans $\text{Ker}(l)$. Ainsi x est dans $\bigcap_{l \in A} \text{Ker}(l) = \{0\}$, donc $x = 0$. Ainsi Ψ est injective. On

a donc : $\dim(E) \leq \dim(\mathbb{R}^p) = p = \dim(A)$. Or $\dim(A) \leq \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = \dim(E)$. Ainsi $\dim(A) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R}))$ et donc $A = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

- 2.** Si $(f_1, \dots, f_n)$ est liée, les lignes de la matrice $M = [f_i(x_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$ le sont aussi, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et donc M n'est pas inversible. Par contraposée, s'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

tel que la matrice $[f_i(x_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$ soit inversible, alors $(f_1, \dots, f_n)$ est libre. Supposons $(f_1, \dots, f_n)$ libre. On note $E = \text{vect}(f_1, \dots, f_n)$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $e_a : f \mapsto f(a)$ qui définit une forme linéaire sur F . On pose $A = \text{vect}((e_a)_{a \in \mathbb{R}})$. Soit $u \in \bigcap_{l \in A} \text{Ker}(l)$ et donc u est dans $\bigcap_{a \in \mathbb{R}} \text{Ker}(e_a)$. Ainsi : $\forall a \in \mathbb{R}, 0 = e_a(u) = u(a)$. Ainsi $u = 0$ et donc $\bigcap_{l \in A} \text{Ker}(l) = \{0\}$. Grâce à la question précédente : $\text{vect}((e_a)_{a \in \mathbb{R}}) = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Comme $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est de dimension finie, alors de la famille génératrice $(e_a)_{a \in \mathbb{R}}$, on peut en extraire une base $(e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Soit $M = [f_i(x_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrons que les lignes $L_1, \dots, L_n$ de cette matrice forment une famille libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0$. On a alors : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_j) = 0$, soit $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_{x_j} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right) = 0$. La famille $(e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$ étant une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, alors : $\forall h \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), h \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right) = 0$. En particulier : $\forall a \in \mathbb{R}, e_a \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right) = 0$, soit : $\forall a \in \mathbb{R}, \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right)(a) = 0$ et donc : $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$. Comme $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Ainsi M possède n lignes indépendantes, puis $\text{rg}(M) \geq n$ et donc $\text{rg}(M) = n$ et donc M est inversible.

Ex 8 : [Mines] Soient $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_n < y_n$ des réels et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1. On suppose que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \int_{x_i}^{y_i} P(t)dt = 0$. Montrer que $P = 0$.
2. Montrer que l'on peut trouver $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \int_{x_i}^{y_i} P(t)dt = 0$.

Correction :

1. Soit $Q(x) = \int_0^x P(t)dt$, pour $x \in \mathbb{R}$. On a : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Q(y_i) - Q(x_i) = 0$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La fonction Q est continue sur $[x_i, y_i]$, dérivable sur $]x_i, y_i[$ et $Q(y_i) = Q(x_i)$. Grâce au théorème de Rolle, il existe $z_i \in]x_i, y_i[$ tel que $Q'(z_i) = 0$. Or $Q' = P$ et donc $z_1 < \dots < z_n$ constituent n racines distinctes de P . Comme $d^\circ(P) \leq n - 1$, alors $P = 0$.
2. Soit $\psi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto \left(\int_{x_1}^{y_1} P(t)dt, \dots, \int_{x_n}^{y_n} P(t)dt \right) \end{cases}$ C'est une application linéaire et grâce au théorème du rang :
 $\dim(\text{Ker}(\psi)) = \dim(\mathbb{R}_{n+1}[X]) - \dim(\text{Im}(\psi)) = n + 1 - \dim(\text{Im}(\psi)) \geq n + 1 - \dim(\mathbb{R}^n) = 1$,
car : $\text{Im}(\psi) \subset \mathbb{R}^n$. Ainsi $\text{Ker}(\psi) \neq \{0\}$, donc il existe P dans $\text{Ker}(\psi)$ non nul qui donne donc :
 $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \int_{x_i}^{y_i} P(t)dt = 0$.

Ex 9 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n , $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$.

1. Calculer le déterminant de la matrice $[P^{(i)}(\alpha_j)]_{0 \leq i, j \leq n}$.
2. Montrer que $(P(X + \alpha_j))_{0 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Correction :

1. On pose $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

$$\text{On a : } \forall i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P^{(i)}(\alpha_j) = \sum_{k=i}^n \frac{k!}{(k-i)!} a_k \alpha_j^{k-i}.$$

$$\text{On pose } D = \det([P^{(i)}(\alpha_j)]_{0 \leq i, j \leq n}) = \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^n a_k \alpha_0^k & \sum_{k=0}^n a_k \alpha_1^k & \dots & \sum_{k=0}^n a_k \alpha_n^k \\ \sum_{k=1}^n k a_k \alpha_0^{k-1} & \sum_{k=1}^n k a_k \alpha_1^{k-1} & \dots & \sum_{k=1}^n k a_k \alpha_n^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ n! a_n & n! a_n & \dots & n! a_n \end{vmatrix} =$$

$$n! a_n \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^n a_k \alpha_0^k & \sum_{k=0}^n a_k \alpha_1^k & \dots & \sum_{k=0}^n a_k \alpha_n^k \\ \sum_{k=1}^n k a_k \alpha_0^{k-1} & \sum_{k=1}^n k a_k \alpha_1^{k-1} & \dots & \sum_{k=1}^n k a_k \alpha_n^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}. \text{ On effectue les opérations } L_i \leftarrow i! a_i L_n \text{ avec}$$

$0 \leq i \leq n-1$ pour obtenir (enlève les termes constants de $P^{(i)}$) :

$$D = n! a_n \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_k \alpha_0^k & \sum_{k=1}^n a_k \alpha_1^k & \dots & \sum_{k=1}^n a_k \alpha_n^k \\ \sum_{k=2}^n k a_k \alpha_0^{k-1} & \sum_{k=2}^n k a_k \alpha_1^{k-1} & \dots & \sum_{k=2}^n k a_k \alpha_n^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{n!}{1!} a_n \alpha_0 & \frac{n!}{1!} a_n \alpha_1 & \dots & \frac{n!}{1!} a_n \alpha_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$n! \times \frac{n!}{1!} a_n^2 \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_k \alpha_0^k & \sum_{k=1}^n a_k \alpha_1^k & \dots & \sum_{k=1}^n a_k \alpha_n^k \\ \sum_{k=2}^n k a_k \alpha_0^{k-1} & \sum_{k=2}^n k a_k \alpha_1^{k-1} & \dots & \sum_{k=2}^n k a_k \alpha_n^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

On effectue les opérations $L_i \leftarrow \frac{(i+1)!}{1!} a_{i+1} L_{n-1}$ avec $0 \leq i \leq n-2$ pour obtenir (enlève les termes de degré 1 de $P^{(i)}$) :

$$D = n! \times \frac{n!}{1!} a_n^2 \begin{vmatrix} \sum_{k=2}^n a_k \alpha_0^k & \sum_{k=2}^n a_k \alpha_1^k & \dots & \sum_{k=2}^n a_k \alpha_n^k \\ \sum_{k=3}^n k a_k \alpha_0^{k-1} & \sum_{k=3}^n k a_k \alpha_1^{k-1} & \dots & \sum_{k=3}^n k a_k \alpha_n^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{n!}{2!} a_n \alpha_0^2 & \frac{n!}{2!} a_n \alpha_1^2 & \dots & \frac{n!}{2!} a_n \alpha_n^2 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$n! \times \frac{n!}{1!} \times \frac{n!}{2!} \times a_n^3 \begin{vmatrix} \sum_{k=2}^n a_k \alpha_0^k & \sum_{k=2}^n a_k \alpha_1^k & \dots & \sum_{k=2}^n a_k \alpha_n^k \\ \sum_{k=3}^n k a_k \alpha_0^{k-1} & \sum_{k=3}^n k a_k \alpha_1^{k-1} & \dots & \sum_{k=3}^n k a_k \alpha_n^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}. \text{ On effectue ensuite les opéra-}$$

tions $L_i \leftarrow \frac{(i+2)!}{2!} a_{i+2} L_{n-2}$ avec $0 \leq i \leq n-3$ pour obtenir (enlève les termes de degré 2 de

$$P^{(i)}). \text{ On poursuit ce procédé pour obtenir : } D = a_n^{n+1} \prod_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \begin{vmatrix} \alpha_0^n & \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n \\ \alpha_0^{n-1} & \alpha_1^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}. \text{ On effectue}$$

$L_n \leftrightarrow L_0, L_{n-1} \leftrightarrow L_1, \dots$ pour avoir une matrice de Vandermonde classique. Si n est pair, cela fait $n/2$ échanges, sinon on a $(n-1)/2$ échanges, donc dans tous les cas on a $\lfloor n/2 \rfloor$ échanges.

$$\text{Ainsi } D = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n! a_n)^{n+1}}{\prod_{k=0}^n k!} \prod_{0 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

2. Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a grâce à la formule de Taylor : $P(X + \alpha_j) = \sum_{i=0}^n P^{(i)}(\alpha_j) \frac{X^i}{i!}$.

On se place dans la base $\left(\frac{X^0}{0!}, \frac{X^1}{1!}, \dots, \frac{X^n}{n!} \right)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ (libre car de degré échelonné et ayant $n+1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ éléments). La matrice de la famille $(P(X + \alpha_j))_{0 \leq j \leq n}$ dans cette base est exactement la matrice de la question précédente, qui est donc inversible, car les α_k sont deux à deux distincts. Ainsi $(P(X + \alpha_j))_{0 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Ex 10 : [Centrale]

- Rappeler la formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. En déduire, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une relation entre $\text{Com}(A)$, A et $\det(A)$.
- Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $a_{i,i} = 2$, pour i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $a_{i,j} = -1$ si $|i-j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. Calculer $\det(A)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, dont les autres sont négatifs et tels que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} > 0$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
 - Montrer que A est inversible.
 - Montrer que les coefficients de A^{-1} sont positifs.

Correction :

- Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\text{On note } \Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad (\text{on a retiré la } i\text{-ème ligne et la } j\text{-ème colonne}).$$

Alors :

(a) Pour tout $j_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} (-1)^{i+j_0} \Delta_{i,j_0}$ (développement par rapport à la j_0 -ème colonne).

(b) Pour tout $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} (-1)^{i_0+j} \Delta_{i_0,j}$ (développement par rapport à la i_0 -ème ligne).

On rappelle que $Com(A)$ est la matrice $[(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$.

Soit $B = A(Com(A))^T$. Soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a : $[B]_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} (-1)^{k+j} \Delta_{j,k}$.

Grâce à la formule du développement d'un déterminant par rapport à la j -ème ligne, ceci correspond au déterminant de la matrice A à laquelle on a remplacé la ligne j par la ligne i .

Si $i = j$, on retombe sur A , donc $[B]_{i,i} = \det(A)$.

Si $i \neq j$, alors dans le déterminant que l'on calcule, on a la ligne i qui apparaît deux fois (aux lignes i et j), donc ce déterminant est nul, puis $[B]_{i,j} = 0$.

Ainsi $B = [\det(A) \delta_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} = \det(A) I_n$.

On a donc : $A(Com(A))^T = \det(A) I_n$.

de la même manière, en considérant des développements selon une colonne d'un déterminant, on trouve : $(Com(A))^T A = \det(A) I_n$.

2. On note $D_n = \det(A)$, lorsque A est de taille n .

Soit $n \geq 2$.

Si on développe par rapport à la première ligne, on trouve :

$$D_{n+2} = 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots \\ (0) & \ddots & \ddots & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & (0) \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & -1 & 2 \end{vmatrix}, \text{ ces détermi-}$$

nants étant de taille $n+1$. En développant le second déterminant par rapport à la première colonne, on trouve : $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

On a $D_2 = 3$ et en reprenant les calculs précédents : $D_3 = 4$.

$(D_n)_{n \geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1.$$

Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $D_n = \lambda n(1)^n + \mu(1)^n = \lambda n + \mu$. Or $D_2 = 3$ et $D_3 = 4$, donc $\lambda = \mu = 1$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = n + 1$.

3. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $AX = 0$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La i -ème ligne du vecteur colonne AX est $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, donc : $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0$,

$$\text{puis } a_{ii} x_i = - \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} a_{ij} x_j, \text{ donc : } |a_{ii}| |x_i| \leq \left| \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} |a_{ij}| |x_j|, \text{ soit}$$

$$a_{ii} |x_i| \leq \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (-a_{ij}) |x_j|.$$

On suppose $X \neq 0$. Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. On a donc : $|x_{i_0}| \neq 0$ (sinon : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_i| \leq 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_i| = 0 \Rightarrow X = 0$).

En prenant l'inégalité précédente pour $i = i_0$, on a :

$$a_{i_0 i_0} |x_{i_0}| \leq \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}} \underbrace{(-a_{i_0 j})}_{\geq 0} |x_j| \leq \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}} (-a_{i_0 j}) |x_{i_0}|.$$

Comme $|x_{i_0}| > 0$, alors : $a_{i_0 i_0} \leq - \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}} a_{i_0 j}$, puis $\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} \leq 0$. Ceci est contradictoire

avec les hypothèses de l'énoncé. Ainsi $X = 0$.

Par suite comme A est une matrice carrée et que $\text{Ker}(A) = \{0\}$, alors A est inversible.

- (b) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrons que si AX a tous ses coefficients positifs, il en est de même pour X .

On suppose donc que AX a tous ses coefficients positifs.

Soit $k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_{k_0} = \min_{1 \leq k \leq n} (x_k)$.

Le coefficient de la ligne k_0 de AX vaut $\sum_{j=1}^n a_{k_0 j} x_j$ et donc :

$$0 \leq a_{k_0 k_0} x_{k_0} + \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k_0\}} \underbrace{a_{k_0 j} x_j}_{\leq 0} \leq a_{k_0 k_0} x_{k_0} + \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k_0\}} a_{k_0 j} x_{k_0} = x_{k_0} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n a_{k_0 j} \right)}_{>0}, \text{ donc}$$

$x_{k_0} \geq 0$, puis X est à coefficients positifs.

Soit E_i le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec $1 \leq i \leq n$. La matrice $AA^{-1}E_i = E_i$ est à coefficients positifs, donc grâce à ce que l'on vient de prouver, $A^{-1}E_i$ est à coefficients positifs. Or $A^{-1}E_i$ est la i -ème colonne de A^{-1} , donc toutes les colonnes de A^{-1} sont à coefficients positifs, donc A^{-1} aussi.

Ex 11 : [Mines] Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M = [(i+j+\alpha)^2]_{1 \leq i, j \leq n}$. Déterminer le rang de M .

Correction : On suppose d'abord $n \geq 3$. On note C_j la j -ème colonne de M . Soit $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$

et $C = \begin{pmatrix} 1^2 \\ 2^2 \\ \vdots \\ n^2 \end{pmatrix}$. Comme $M = [i^2 + 2(j+\alpha)i + (j+\alpha)^2]_{1 \leq i, j \leq n}$, on a : $C_j = C + 2(j+\alpha)B + (j+\alpha)^2A$.

On a $\text{Im}(M) = \text{vect}(C_1, C_2, \dots, C_n) = \text{vect}(C_1, C_2 - C_1, \dots, C_n - C_1) = \text{vect}(C_1, 2B + (2+2\alpha)A, 4B + 2(4+2\alpha)A, \dots, 2(n-1)B + (n-1)(n+1+2\alpha)A) = \text{vect}(C_1, 2B + (2+2\alpha)A, 2B + (4+2\alpha)A, \dots, 2B + (n+1+2\alpha)A) = \text{vect}(C_1, 2B + (2+2\alpha)A, 2A, \dots, (n-1)A)$, en retranchant aux vecteurs 3 à n le deuxième vecteur. Ainsi $\text{Im}(M) = \text{vect}(C_1, 2B + (2+2\alpha)A, A) = \text{vect}(C_1, 2B, A) = \text{vect}(C + 2(1+\alpha)B + (1+\alpha)^2A, B, A) = \text{vect}(C, B, A)$. Ces trois matrices sont indépendantes, car la matrice $[A, B, C]$ a pour déterminant

extrait 3×3 sur les trois premières lignes : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix}$ qui est un déterminant de Vandermonde non

nul. Ainsi $\text{rg}(M) = 3$.

Si $n = 1$, on a : $M = [(2+\alpha)^2]$ qui est de rang 1 si $\alpha \neq -2$ et 0 sinon.

Si $n = 2$, alors $M = \begin{pmatrix} (2+\alpha)^2 & (3+\alpha)^2 \\ (3+\alpha)^2 & (4+\alpha)^2 \end{pmatrix}$. Cette matrice n'est pas nulle (tous les coefficients ne peuvent pas être nuls en même temps), donc elle est de rang au moins 1. On a $\det(M) = (2+\alpha)^2(4+\alpha)^2 - (3+\alpha)^4 = [(2+\alpha)(4+\alpha) - (3+\alpha)^2][(2+\alpha)(4+\alpha) + (3+\alpha)^2] = -(2\alpha^2 + 12\alpha + 17)$, ce qui donne deux valeurs de α qui annulent le déterminant. Dans ce cas $\text{rg}(M) = 1$ et sinon $\text{rg}(M) = 2$.

Ex 12 : [Mines] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ vérifiant : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f = a\text{Tr}$.

Correction : Si $n = 1$, le résultat est immédiat. On suppose $n \geq 2$.

Soit f une telle forme linéaire.

Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que l'on ait $i \neq j$.

On a $E_{i,j}E_{i,i} = 0$. On a $0 = f(E_{i,j}E_{i,i}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j})$.

On a aussi $f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j})$, donc $f(E_{i,i}) = f(E_{j,j})$.

On note α la valeur commune de $f(E_{1,1}), \dots, f(E_{n,n})$.

Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$. On a : $A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j} E_{i,j}$, puis :

$$f(A) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j} f(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} f(E_{i,i}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \alpha = \alpha \text{Tr}(A).$$

Réciproquement αTr est une forme linéaire telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \alpha \text{Tr}(AB) = \alpha \text{Tr}(BA)$.

Ex 13 : [Mines] Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. Un hyperplan de E est défini comme supplémentaire d'une droite vectoriel.

1. Montrer qu'un espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle l telle que : $H = \text{Ker}(l)$.
2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note Φ_A la forme linéaire $M \mapsto \text{Tr}(AM)$. Montrer que l'application $\Phi : A \mapsto \Phi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des formes linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Montrer que $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible. Calculer $\text{Tr}(J_r C)$, avec

$$J_r = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, 0, \dots, 0).$$

4. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Correction :

1. Si on a $E = H \oplus \text{vect}(a)$, avec $a \in E \setminus \{0\}$, alors pour $x = h + \lambda a$, avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $l(x) = \lambda$. On vérifie que l est une forme linéaire et $H = \text{Ker}(l)$.

On suppose maintenant que $H = \text{Ker}(l)$, avec l une forme linéaire non nulle. Il existe donc $a \in E$ tel que $l(a) \neq 0$.

Montrons par analyse-synthèse que tout élément x de E se décompose de façon unique sous la forme $x = \lambda a + h$ avec λ dans $\mathbb{K}$ et h dans H .

Soit $x \in E$.

Analyse : Soit $x = \lambda a + h$ avec λ dans $\mathbb{K}$ et h dans H , une éventuelle décomposition. On a donc :

$l(x) = \lambda l(a) + \varphi(h) = \lambda l(a)$. Comme $l(a)$ est un scalaire non nul, on a : $\lambda = \frac{l(x)}{l(a)}$. Ainsi on a

$$h = x - \frac{l(x)}{l(a)} a.$$

Construction : On pose $\lambda = \frac{l(x)}{l(a)}$ et $h = x - \frac{l(x)}{l(a)} a$.

Examen : On a bien λ dans $\mathbb{K}$ et par linéarité de l , on a :

$$l(h) = l(x) - \frac{l(x)}{l(a)} l(a) = l(x) - l(x) = 0. \text{ Ainsi on a } h \text{ dans } \text{Ker}(l) = H.$$

Enfin nous avons $h + \lambda a = x$.

On a donc bien : $\text{vect}(a) \oplus H = E$, avec a non nul.

2. Φ est une application linéaire qui va de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$. Ces deux espaces étant de dimension finie, il suffit de montrer que Φ est injective.

Soit $A \in \text{Ker}(\Phi)$. On a $\Phi_A = 0$ et donc : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(AM) = 0$. On note $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$.

Pour $M = E_{k,l}$, on a :

$$0 = \text{Tr}(AE_{k,l}) = \text{Tr}\left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} E_{i,j} E_{k,l}\right) = \text{Tr}\left(\sum_{i=1}^n a_{i,k} E_{i,l}\right) = \sum_{i=1}^n a_{i,k} \text{Tr}(E_{i,l}) = a_{l,k}, \text{ car } E_{i,l} \text{ n'a}$$

que des coefficients diagonaux nuls si $i \neq l$. Ainsi : $\forall l, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{l,k} = 0$, donc $A = 0$. Ainsi $\text{Ker } \Phi = \{0\}$ et Φ est injective.

3. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à C et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique. On a $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_{n-1}), f(e_n)) = (e_2, e_3, \dots, e_n, e_1)$ et donc f envoie une base en une base, donc f est bijective, puis C est inversible.

Si $r = n$, $J_r = I_n$ et $\text{Tr}(J_r C) = \text{Tr}(C) = 0$.

Si $r < n$. On constate d'abord que $\text{Tr}(J_r C) = \text{Tr}(C J_r)$. Soit g l'endomorphisme canoniquement associé à J_r . On a donc : $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $g(e_i) = e_i$ et $g(e_i) = 0$, pour $i > r$.

On a : $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $f \circ g(e_i) = e_{i+1}$ et pour $i > r$, on a : $f \circ g(e_i) = 0$. Ainsi

$$C J_r = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & (0) & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \text{ et donc } \text{Tr}(J_r C) = \text{Tr}(C J_r) = 0.$$

4. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est donc le noyau d'une forme linéaire non nulle. Grâce à la question 2., il existe un unique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $H = \text{Ker}(\Phi_A)$. Le but de la question est donc de trouver une matrice B inversible telle que $\text{Tr}(AB) = 0$.

Soit $r = \text{rg}(A)$ et on peut écrire $A = P J_r Q$, avec P, Q inversible.

On a $0 = \text{Tr}(J_r C) = \text{Tr}(P^{-1} A Q^{-1} C) = \text{Tr}(A Q^{-1} C P^{-1})$ et donc $B = Q^{-1} C P^{-1}$, convient (en tant que produit de trois matrices inversibles).

Ex 14 : [Mines] Soit $n \geq 2$. Calculer le déterminant de l'endomorphisme $\Phi : A \mapsto A^T$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Correction : On a : $\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(M) = M$ et $\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(M) = -M$. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_a, \underbrace{-1, \dots, -1}_b)$, avec $a = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$

et $b = \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$. Ainsi $\det(\Phi) = 1^a (-1)^b = (-1)^{n(n-1)/2}$.

Ex 15 : [Mines] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant :

$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $i - j \equiv 1[2] \Rightarrow m_{i,j} = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est une sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par multiplication.
2. Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que : $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \text{Com}(M) \in \mathcal{D}$.

Correction :

1. Par définition, $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $(M, N) \in \mathcal{D}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, il est évident que $M + N$ et λM restent dans $\mathcal{D}$. Reste à prouver la stabilité par produit : si $P = MN$, le coefficient (i, j) de P vaut $\sum_{k=0}^n m_{ik} n_{kj}$. Supposons $i - j \equiv 1[2]$, on peut par exemple supposer sans perte de généralité i pair et j impair. Dans ce cas, dans chaque terme $m_{ik} n_{kj}$, si k est pair alors $n_{kj} = 0$ et si k est impair alors $m_{ik} = 0$, donc le produit est toujours nul, et par conséquent, $MN \in \mathcal{D}$.
2. Supposons $M \in \mathcal{D}$ inversible. Dans ce cas, soit Φ l'application de $\mathcal{D}$ définie par $\Phi(A) = AM$. D'après la question précédente, Φ est bien définie par stabilité de $\mathcal{D}$ par produit, et Φ est injective par inversibilité de M . Ainsi, Φ est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension

finie (ici $\mathcal{D}$), donc c'est isomorphisme de $\mathcal{D}$. Comme I_n est dans $\mathcal{D}$, il existe $N \in \mathcal{D}$ tel que : $\Phi(N) = I_n$, donc $NM = I_n$, donc $M^{-1} = N \in \mathcal{D}$. Or, $\text{Com}(M) = \det(M)(M^{-1})^T$, et $\mathcal{D}$ est invariant par transposition, donc $\text{Com}(M) \in \mathcal{D}$.

Réciproquement, si $\text{Com}(M) \in \mathcal{D}$, alors grâce au sens direct de l'implication :

$\text{Com}(\text{Com}(M)) \in \mathcal{D}$. Or, si M est inversible nous allons établir la formule

$\text{Com}(\text{Com}(M)) = (\det(M))^{n-2}M$ qui suffira à terminer l'exercice.

On a $U^T \text{Com}(U) = \det(U)I_n$ donc $(\text{Com}A)^T \text{Com}(\text{Com}(A)) = \det(\text{Com}(A))I_n$ d'où

$\text{Com}(\text{Com}(A)) = \det(\text{Com}(A)) (\text{Com}(A)^T)^{-1}$. En effet on a $A \text{Com}(A)^T = \det(A)I_n$, donc par inversibilité de A , $\text{Com}(A)^T$ est bien inversible et $(\text{Com}(A)^T)^{-1} = \frac{1}{\det A}A$. Il reste à passer

l'égalité $A \text{Com}(A)^T = \det(A)I_n$ au déterminant pour en déduire que $\det(\text{Com}(A)) = (\det A)^{n-1}$ et en déduire l'égalité souhaitée, ce qui termine l'exercice.

Ex 16 : [Mines] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est antisymétrique si et seulement si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M X = 0$.

Correction : On rappelle que pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, si on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors $(x | y) = X^T Y$.

Le sens direct est trivial en transposant l'égalité proposée $((X^T M X)^T = X^T M X$, car on transpose un réel).

Réciproquement, supposons : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M X = 0$.

Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à M , on a donc : $\forall z \in \mathbb{R}^n, (u(z) | z) = 0$.

L'égalité : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, (u(x+y) | x+y) = 0$, avec $(u(x) | x) = (u(y) | y) = 0$ donne

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, (u(x) | y) = -(x | u(y))$$

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La i -ème coordonnée de $u(e_j)$ dans $\mathcal{B}$ qui est ortho-normale est :

$$m_{i,j} = (e_i | u(e_j))$$

donc par la relation précédente $m_{i,j} = -m_{j,i}$ et la matrice M est antisymétrique.

Ex 17 : [ENS SR] Soient $n \in \mathbb{N}$ et w une fonction continue positive non identiquement nulle de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$, une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall k, l \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_0^1 f_k f_l w = \delta_{k,l}. \text{ Montrer que } (f_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est libre.}$$

2. Montrer qu'il existe une unique suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall k, l \in \mathbb{N}, \int_0^1 p_k p_l w = \delta_{k,l}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, p_k soit polynomiale de degré k à coefficients dominant positif.

3. Montrer que si n est dans $\mathbb{N}^*$, alors p_n a n racines simples dans $]0, 1[$ que l'on note $x_{1,n} < \dots < x_{n,n}$.

On pourra poser $Q_n = \prod_{i=1}^r (X - \beta_i)$, où $\beta_1, \dots, \beta_r$ sont les racines deux à deux distinctes de p_n dans $]0, 1[$ de multiplicité impaire. S'il n'y a pas de telles racines, on posera $Q_n = 1$.

4. Montrer que pour n dans $\mathbb{N}^*$, il existe un unique $(\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{n,n}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall p \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \int_0^1 pw = \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} p(x_{k,n}).$$

Correction :

1. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k = 0$.

Soit $l \in [0, n]$. On a : $\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k f_l w = 0$, par multiplication par $f_l w$, puis par linéarité de l'intégrale :

$$0 = \sum_{k=0}^n \lambda_k \int_0^1 f_k f_l w = \sum_{k=0}^n \lambda_k \delta_{k,l} = \lambda_l. \text{ Ainsi } (f_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est libre.}$$

2. Remarquons tout d'abord que $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Il est clair que cette application est symétrique, bilinéaire et positive. Pour la séparation, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\int_0^1 P^2(t)w(t)dt = 0$. La fonction $P^2 w$ est continue et positive sur $[0, 1]$, donc : $\forall t \in [0, 1], P^2(t)w(t) = 0$. Soit $t_0 \in [0, 1]$ tel que $w(t_0) \neq 0$. Comme $w(t_0) > 0$, alors par continuité de w , il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \cap [0, 1], w(t) > 0$. On a donc : $\forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \cap [0, 1], P(t) = 0$, puis P est un polynôme qui s'annule sur un ensemble infini, donc $P = 0$.

Montrons le résultat par récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $\mathcal{P}(n)$: il existe une unique famille orthonormée $(p_0, \dots, p_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que : $\forall k \in [0, n], d^\circ(p_k) = k$ et les $p_0, \dots, p_n$ sont à coefficients dominant strictement positifs.

$\mathcal{P}(0)$. Soit $p_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons qu'il n'y a qu'un choix pour avoir $1 = (p_0|p_0) = p_0^2 \int_0^1 w$. Comme

$$\int_0^1 w > 0 \text{ (fonction continue positive non nulle), alors } p_0 = \sqrt{\frac{1}{\int_0^1 w}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$. On veut construire p_{n+1} de degré $n+1$, unitaire, dont le coefficient dominant est strictement positif et vérifiant $p_{n+1} \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$.

On peut écrire $p_{n+1} = \alpha X^{n+1} + q_n$, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $q_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

Dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, la dimension de $(\mathbb{R}_n[X])^\perp$ vaut 1, c'est donc une droite vectorielle engendré par un polynôme U . Quitte à diviser U par son coefficient dominant on impose à U d'être de coefficient dominant 1. Cette condition rend U unique, car $(\mathbb{R}_n[X])^\perp$ est une droite vectorielle ici. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p_{n+1} = \lambda U$. En regardant les coefficients dominants, on a $\lambda = \alpha$, puis pour avoir $\|p_{n+1}\|^2 = 1$, on a : $\alpha^2 \|U\|^2 = 1$, puis $\alpha = \frac{1}{\|U\|}$, car on veut α strictement positif. Ainsi p_{n+1} est unique. On a donc le résultat pour $n+1$, ce qui achève la récurrence.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $Q_n = \prod_{i=1}^r (X - \beta_i)$, où $\beta_1, \dots, \beta_r$ sont les racines deux à deux distinctes de p_n dans $]0, 1[$ de multiplicité impaire. S'il n'y a pas de telles racines, on pose $Q_n = 1$.

On a une factorisation de p_n de la forme : $p_n = \prod_{i=1}^r (X - \beta_i)^{2s_i+1} \prod_{i=1}^p (X - \gamma_i)^{2t_i} S(X)$ où S est un polynôme sans racines dans $]0, 1[$ (les γ_i sont les racines de multiplicité paire de p_n dans $]0, 1[$). Comme S est peut être considéré comme une fonction polynôme sur $]0, 1[$, alors S est continue sur cet intervalle et ne s'y annule jamais. Ainsi S garde un signe constant sur $]0, 1[$ (si S change de signe sur $]0, 1[$, alors grâce au théorème des valeurs intermédiaires, S s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$).

On a donc : $Q_n p_n = \prod_{i=1}^r (X - \beta_i)^{2(s_i+1)} \prod_{i=1}^p (X - \gamma_i)^{2t_i} S = \left(\prod_{i=1}^r (X - \beta_i)^{s_i+1} \prod_{i=1}^p (X - \gamma_i)^{t_i} \right)^2 S$ et donc $p_n Q_n$ est de signe constant sur $]0, 1[$. Par continuité de la fonction polynôme $p_n Q_n$, celle-ci est de signe constant sur $[0, 1]$.

On suppose $d^\circ Q_n < n$. Comme Q_n est dans $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{vect}(p_0, \dots, p_{n-1})$, alors $(p_n | Q_n) = 0$, car p_n est orthogonal à $p_0, \dots, p_{n-1}$. Ainsi $0 = \int_0^1 p_n Q_n w$. Or la fonction $x \mapsto p_n(x) Q_n(x) \omega(x)$ est continue et de signe constant sur $[0, 1]$, donc elle est nulle sur $[0, 1]$. Comme ω ne s'annule pas sur un sous-intervalle $[a, b]$ non trivial de $[0, 1]$ (voir le début de la question), alors $p_n Q_n$ est nulle $[a, b]$. Ainsi le polynôme $p_n Q_n$ a une infinité de racines, donc : $d^\circ Q_n < n \Rightarrow p_n Q_n = 0$ et cela est impossible car aucun de ces deux polynômes n'est nul ($\mathbb{R}[X]$ est un anneau intègre).

Par construction, le degré de Q_n ne peut dépasser n , donc on a : $d^\circ Q_n = n$.

Ainsi on a $r = n$, donc $\beta_1, \dots, \beta_n$ sont n racines distinctes de p_n qui est de degré n . Ainsi $\beta_1, \dots, \beta_n$ constitue la liste complète des racines de p_n avec multiplicité. Ainsi toutes ces racines sont de multiplicité un, sinon on dépasse le degré de p_n .

On en conclut que p_n a n racines simples dans $]0, 1[$ que l'on note $x_{1,n} < \dots < x_{n,n}$.

4. Soit $p \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Effectuons la division euclidienne de p par p_n . Il existe donc $r \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $p = p_n q + r_n$. On a : $\int_0^1 p w = \int_0^1 p_n q w + \int_0^1 r w = (p_n | q) + \int_0^1 r w = \int_0^1 r w$, car $q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $p_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$.

On note $l_1, \dots, l_n$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $x_{1,n} < \dots < x_{n,n}$.

On a : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p(x_{k,n}) = r(x_{k,n})$, grâce à la division euclidienne, puis :

$$r = \sum_{k=1}^n r(x_{k,n}) l_k = \sum_{k=1}^n p(x_{k,n}) l_k.$$

Par conséquent, on a : $\int_0^1 p w = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n p(x_{k,n}) l_k \right) w = \sum_{k=1}^n p(x_{k,n}) \underbrace{\int_0^1 l_k w}_{:= \lambda_{k,n}}$. Cela assure l'existence de $(\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{n,n}) \in \mathbb{R}^n$.

Pour l'unicité, pour $s \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a : $\int_0^1 l_s w = \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} l_s(x_{k,n}) = \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} \delta_{k,s} = \lambda_{s,n}$.

Ex 18 : [Centrale] Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p \leq n$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Sur $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, on définit le produit scalaire $(U|V) = U^T V$ et on note $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

1. Montrer que la fonction $X \mapsto \|AX - B\|_2$ admet un minimum sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et qu'il est atteint en un unique point X_0 .
2. Montrer que X_0 est l'unique solution de $A^T A X = A^T B$.
3. Calculer $\inf \{(x + y - 1)^2 + (x - y)^2 + (2x + y + 2)^2, x, y \in \mathbb{R}\}$.

Correction :

1. $\{\|AX - B\|_2, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\} = \{\|Y - B\|_2, Y \in \text{Im}(A)\}$.

Ainsi : $\min\{\|Y - B\|_2, Y \in \text{Im}(A)\} = d(B, \text{Im}(A))$ existe et il existe un unique $Y_0 \in \text{Im}(A)$ tel que $\min\{\|Y - B\|_2, Y \in \text{Im}(A)\} = \|Y_0 - B\|_2$. Ainsi Y_0 est LA projection orthogonale de B sur $\text{Im}(A)$. Comme Y_0 est dans $\text{Im}(A)$, alors il existe $X_0 \in \mathbb{R}^p$ tel que $Y_0 = AX_0$. Ainsi $\|AX_0 - B\|_2 = \min\{\|AX - B\|_2, X \in \mathbb{R}^p\}$.

Par ailleurs si ce minimum est atteint en un autre X_1 , alors par unicité de Y_0 , on a :

$AX_0 = Y_0 = AX_1$. Mais grâce au théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) = p - \text{rg}(A) = 0$, donc $X \mapsto AX$ est injective, puis $X_0 = X_1$ et donc X_0 est unique.

2. $Y_0 = AX_0$ est la projection orthogonale de B sur $\text{Im}(A)$ si et seulement si $B - Y_0 = B - AX_0$ est dans $(\text{Im}(A))^\perp$, soit : $\forall Y \in \text{Im}(A)$, $(Y|B - AX_0) = 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $(AX|B - AX_0) = 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $(AX)^T (B - AX_0) = 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $X^T A^T (B - AX_0) = 0 \Leftrightarrow A^T (B - AX_0) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}))^\perp = \{0\} \Leftrightarrow A^T A X_0 = A^T B$.

Ce système admet bien une unique solution, car $A^T A$ est inversible. C'est une matrice carrée de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et pour $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on a :

$A^T A X = 0 \Rightarrow X^T A^T A X = 0 \Rightarrow (A X)^T (A X) = 0 \Rightarrow \|A X\|^2 = 0 \Rightarrow A X = 0 \Rightarrow X = 0$, car nous avons vu dans la question précédente que $\text{Ker}(A) = \{0\}$. Ainsi $\text{Ker}(A^T A) = \{0\}$, donc $A^T A$ est inversible.

On constate donc que $X_0 = (A^T A)^{-1} A^T B$.

3. On a : $\inf\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2, x, y \in \mathbb{R}\} = \inf\left\{\|A X - B\|_2^2, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\right\}$,

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Grâce à la conclusion de la question précédente, ce minimum est atteint en $X_0 = (A^T A)^{-1} A^T B$.

On a $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et donc $(A^T A)^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

On a $A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, puis $X_0 = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a donc : $\inf\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2, x, y \in \mathbb{R}\} = (-1/2+0-1)^2 + (-1/2-0)^2 + (2 \cdot (-1/2)+0+2)^2 = (-3/2)^2 + (-1/2)^2 + (1)^2 = 9/4 + 1/4 + 1 = 7/2$.

Ex 19 : [Mines] Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle < 0$. On pose $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ et $y = \sum_{i=1}^p |\lambda_i| x_i$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

1. Comparer $\|x\|$ et $\|y\|$.
2. Montrer que si $x = 0$, alors les λ_i sont tous nuls ou tous non nuls.
3. Montrer que toute sous-famille à $p-1$ vecteurs des x_i est libre.
4. Donner un exemple d'une telle famille dans $\mathbb{R}^2$, avec $p = 3$.
5. Montrer qu'il existe une famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses.

Correction :

1. On a $\|x\|^2 = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \mid \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j \right) = \sum_{k=1}^p \lambda_k^2 \|x_k\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} \lambda_i \lambda_j (x_i \mid x_j)$.

De même $\|y\|^2 = \sum_{k=1}^p \lambda_k^2 \|x_k\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} |\lambda_i| \cdot |\lambda_j| (x_i \mid x_j)$.

Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, avec $i \neq j$, on a : $\lambda_i \lambda_j \leq |\lambda_i \lambda_j|$, puis comme $(x_i \mid x_j) < 0$, alors $\lambda_i \lambda_j (x_i \mid x_j) \geq |\lambda_i| \cdot |\lambda_j| (x_i \mid x_j)$, puis $\|x\|^2 \geq \|y\|^2$ et donc $\|x\| \geq \|y\|$.

2. Si $x = 0$, alors grâce à la question précédente, $0 \leq \|y\| \leq \|x\| = 0$, donc $\|y\| = 0$, puis $y = 0$.

Soit $i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $\lambda_{i_0} = 0$. On a $0 = (y \mid x_{i_0}) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq i_0}} |\lambda_i| (x_i \mid x_{i_0}) \leq 0$. Ainsi on a :

$\sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq i_0}} |\lambda_i| (x_i \mid x_{i_0}) = 0$, et c'est une somme de réels négatifs, donc :

$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{i_0\}, |\lambda_i| (x_i \mid x_{i_0}) = 0$, puis : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{i_0\}, \lambda_i = 0$, car $(x_i \mid x_{i_0}) \neq 0$. Ainsi tous les λ_i sont nuls si au moins un des λ_i est nul.

Dans le cas contraire, tous les λ_i sont non nuls.

3. Soit $I \subset \llbracket 1, p \rrbracket$, avec $|I| \leq p-1$.

Soient $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de réels telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$. En rajoutant des λ_j nuls, on pose

$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$. On a : $x = 0$, et comme $|I| < p$, au moins un des coefficients λ_i est nul.

Grâce à la question précédente, $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ et donc $\forall i \in I, \lambda_i = 0$. Ainsi $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

4. On considère $x_1 = (1, 0)$. On pose $x_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ l'image de x_1 par la rotation vectorielle d'angle $2\pi/3$ et $x_3 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$ l'image de x_1 par la rotation vectorielle d'angle $4\pi/3$. On a $(x_1|x_2) = (x_1|x_3) = -1/2 < 0$ et $(x_2|x_3) = 1/4 - 3/4 = -1/2 < 0$.

5. On appellera famille ébouriffée une famille vérifiant l'hypothèse de l'énoncé.

Montrons cela par récurrence sur $\dim(E)$, avec E un espace euclidien qui n'est pas forcément $\mathbb{R}^n$. Nous généralisons cela à un tel espace pour la rédaction de l'hérédité.

Si $\dim(E) = 1$; soit (u) une base orthonormée de E . Alors $(u, -u)$ convient.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et on suppose la propriété vraie si $\dim(E) = p$.

Soit E un espace euclidien de dimension $p + 1$. Soit x_{p+2} un vecteur de E de norme 1. On pose $E' = (x_{p+2})^\perp$ qui est de dimension p (car $x_{p+2} \neq 0$). Grâce à l'hypothèse de récurrence, il existe une famille ébouriffée $(y_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ de E' . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et on pose $x_i = y_i + \lambda x_{p+2}$, pour $i \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket$. Reste à choisir λ pour avoir $(x_i)_{1 \leq i \leq p+2}$ une famille ébouriffée de E . Pour $i, j \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket$, on a : $(x_i|x_j) = (y_i|y_j) + \lambda^2 \|x_{p+2}\|^2 = (y_i|y_j) + \lambda^2$ et $(x_i|x_{p+2}) = \lambda$. Il faut choisir λ strictement négatif

tel que : $\forall i, j \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket, \lambda^2 < -(y_i|y_j)$. On prend $\lambda = -\frac{\min\{\sqrt{-(y_i|y_j)}, i, j \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket\}}{2}$ (cela définit bien un réel strictement négatif, car on a un nombre fini de termes strictement positifs dans le min). On a le résultat si $\dim(E) = n + 1$, ce qui achève la récurrence.

Ex 20 : [Mines]

1. Montrer que $P_n(X) = X^n - nX + 1$ admet une unique racine x_n dans $[0, 1]$.
2. Déterminer la limite de (x_n) puis donner un équivalent de x_n et un développement asymptotique à deux termes.

Correction :

1. La fonction $x \mapsto P_n(x)$ est strictement décroissante sur $[0; 1]$ car

$$P'_n(x) = n(x^{n-1} - 1)$$

est strictement négatif sauf pour $x = 1$. La fonction continue P_n réalise donc une bijection strictement décroissante de $[0; 1]$ vers $[P_n(1); P_n(0)] = [2 - n; 1]$. On en déduit l'existence et l'unicité de la solution x_n à l'équation $P_n(x) = 0$.

2. Puisque $x_n \in [0; 1]$, on a $x_n^{n+1} \leq x_n^n$ puis

$$P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 \leq P_n(x_n) = 0$$

Ainsi $P_{n+1}(x_n) \leq P_{n+1}(x_{n+1})$ et donc $x_{n+1} \leq x_n$ car la fonction P_{n+1} est strictement décroissante. La suite (x_n) est décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel $\ell \in [0; 1]$. Si $\ell > 0$ alors

$$P_n(x_n) = x_n^n - nx_n + 1 \rightarrow -\infty$$

ce qui est absurde. On conclut $\ell = 0$

On a

$$\frac{x_n^n}{nx_n} = \frac{1}{n} x_n^{n-1} \rightarrow 0$$

et donc $x_n^n = o(nx_n)$

Sachant $x_n^n - nx_n + 1 = 0$, on obtient $nx_n \sim 1$ puis

$$x_n \sim \frac{1}{n}$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nx_n - 1) = 0$ et
écrivons ensuite

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ avec } \varepsilon_n = nx_n - 1 \rightarrow 0$$

Puisque $x_n^n = nx_n - 1$, on a

$$\varepsilon_n = x_n^n = \frac{(1 + \varepsilon_n)^n}{n^n} \geq 0$$

Nous allons montrer

$$\lim (1 + \varepsilon_n)^n = 1$$

ce qui permettra de déterminer un équivalent de ε_n puis de conclure. Puisque $\varepsilon_n \rightarrow 0$, pour n assez grand, on a $|1 + \varepsilon_n| \leq 2$ et alors

$$\varepsilon_n = \frac{(1 + \varepsilon_n)^n}{n^n} \leq \frac{2^n}{n^n}$$

On en déduit

$$1 \leq (1 + \varepsilon_n)^n \leq \left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right)\right)$$

Or

$$n \ln\left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right) \sim \frac{2^n}{n^{n-1}} \rightarrow 0,$$

car pour $n \geq 3$, on a : $0 \leq \frac{2^n}{n^{n-1}} \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Par encadrement :

$$(1 + \varepsilon_n)^n \rightarrow 1$$

On peut conclure $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^n}$ et finalement

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right).$$

Ex 21 : [Mines]

1. Déterminer l'ensemble F des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que :
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$.
2. Même question avec f continue de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$ dérivable en 0 et telle que :
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + f^2(x)}$.

Correction :

1. Notons tout d'abord que $f(0) = 0$. Soit f une telle fonction. On renverse la relation : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2f(x/2)$ et donc par itération de la relation, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(x) = 2^n f(x/2^n)$. Le réel $x \in \mathbb{R}^*$ étant fixé, on fait tendre n vers plus l'infini en utilisant $f(x/2^n) = f'(0)\frac{x}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$, puis $f(x) = xf'(0) + o(1)$, ce qui donne finalement $f(x) = xf'(0)$, par passage à la limite. Ceci prouve que f est linéaire de la forme $x \mapsto ax$, avec $a \in \mathbb{R}$. Réciproquement, toute fonction linéaire est évidemment dans F , ce qui prouve que F est l'ensemble des fonctions linéaires.
2. On vérifie que la fonction th réalise une bijection $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$ puisque sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Cela nous permet donc de poser $f = \text{th} \circ g$. On vérifie rapidement, en repassant par les exponentielles, que : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}(2x) = \frac{2\text{th}(x)}{1 + \text{th}^2(x)}$, donc l'équation fonctionnelle considérée s'écrit $\text{th} \circ g(2x) = \text{th}(2g(x))$, ce qui signifie que la fonction continue g vérifie l'équation fonctionnelle de la question précédente (en composant par th^{-1}), et prouve donc que g est linéaire. Enfin, toutes les $x \rightarrow \text{th}(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}$ sont solutions de l'équation fonctionnelle proposée, ce qui prouve que l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions de la forme $x \rightarrow \text{th}(ax)$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Ex 22 : [Mines] Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, a et b deux fonctions continues et T -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer les solutions T -périodiques de $x' = ax + b$.

Correction : Commençons par résoudre l'équation différentielle $x' = ax + b$.

On note $F : t \mapsto \int_0^t a(u)du$. Les solutions homogènes sont de la forme λe^F , avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour une solution particulière, on cherche une solution de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{F(t)}$ et donc :

$\lambda'(t)e^{F(t)} = b(t)$, puis $\lambda'(t) = b(t)e^{-F(t)}$, puis $\lambda : t \mapsto \int_0^t b(u)e^{-F(u)}du$ convient.

On note $G : t \mapsto \int_0^t b(u)e^{-F(u)}du$.

L'ensemble des solutions est donc $\{e^F(\lambda + G), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Soit x une solution. On note $z : t \mapsto x(t + T)$. Comme a et b sont T -périodiques, alors z est aussi solution de l'équation différentielle.

Grâce au th de Cauchy-Lipschitz pour l'ordre un (l'équation est linéaire, normalisée à coefficients continus), $x = z$ ssi $x(0) = z(0)$. Ainsi x est T périodique ssi $x(0) = x(T)$.

Si on reprend la forme des solutions trouvée avant x est T périodique ssi

$e^{F(0)}(\lambda + G(0)) = e^{F(T)}(\lambda + G(T))$ ce qui équivaut à $\lambda = e^{\int_0^T a}(\lambda + G(T))$, soit $(1 - e^{\int_0^T a})\lambda = e^{\int_0^T a}G(T)$.

Ici commence une discussion.

- Si $\int_0^T a \neq 0$, alors $\lambda = \frac{e^{\int_0^T a}G(T)}{1 - e^{\int_0^T a}}$ et il n'y a qu'une seule solution T -périodique.
- Si $\int_0^T a \neq 0$ et $G(T) = \int_0^T b(u)e^{-F(u)}du \neq 0$, il n'y a aucune solution T -périodique.
- Si $\int_0^T a \neq 0$ et $G(T) = \int_0^T b(u)e^{-F(u)}du = 0$, toutes les solutions sont T -périodiques.

Ex 23 : [Mines] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right)$. Déterminer un équivalent de u_n .

Correction : La fonction $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et $|\sin^{(3)}| = |-\cos| \leq 1$. Ainsi grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\left| \sin\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right) - \frac{\sqrt{k}}{n} \right| \leq \frac{k^{3/2}}{6n^3} \leq \frac{n^{3/2}}{6n^3} \leq \frac{1}{6n^{3/2}}$.

On a donc $\left| u_n - \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \sin\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right) - \frac{\sqrt{k}}{n} \right| \leq n \times \frac{1}{6n^{3/2}} \leq \frac{1}{6n^{1/2}}$.

Ainsi $u_n - \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Déterminons un équivalent de $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue, croissante et positive sur

$\mathbb{R}_+$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\int_{k-1}^k \sqrt{t} dt \leq \sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{t} dt$, puis $\int_0^n \sqrt{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{t} dt$, puis

$\frac{2}{3}n^{3/2} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \frac{2}{3}(n+1)^{3/2} - 1$. Par suite $0 \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \frac{2}{3}n^{3/2} \leq \frac{2}{3}[(n+1)^{3/2} - n^{3/2}] - 1 =$

$\frac{2n^{3/2}}{3} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} - 1 \right] - 1 = \frac{2n^{3/2}}{3} \left[\frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] - 1 = O(\sqrt{n})$. Ainsi $\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n} = \frac{2}{3}\sqrt{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

puis $u_n = \frac{2}{3}\sqrt{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, donc $u_n \sim \frac{2}{3}\sqrt{n}$.

Ex 24 : [Centrale] Soit $f : x \mapsto \frac{2x}{1+e^x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Étudier les variations de f . Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ le point en lequel f atteint son maximum.
2. Montrer que, pour tout $x \in]0, \alpha[$, il existe un unique $y \in [\alpha, +\infty[$ tel que $f(x) = f(y)$.

On pose $y = \phi(x)$.

3. Montrer que ϕ est continue sur $]0, \alpha[$. Déterminer la limite et donner un équivalent de ϕ en 0 par valeurs supérieures.

Correction :

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$, on a directement $f'(x) = 2 \frac{1+e^x(1-x)}{(1+e^x)^2}$. Or,

l'équation $e^x(1-x)+1=0$ est équivalente à $e^{-x}+1-x=0$, et une rapide étude de fonction prouve que cette dernière équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, en un point $\alpha > 0$. Ainsi, par étude de signe de la dérivée, f est strictement croissante sur $I =]0, \alpha[$ et strictement décroissante sur $J =]\alpha, +\infty[$.

2. À ce stade de l'exercice, on recommande vivement au lecteur de tracer la courbe représentative de f pour se faire une idée plus précise de la situation.

D'après l'étude menée à la question précédente, on sait d'après le théorème de la bijection (fonction continue et strictement monotone) que f réalise une bijection de I sur $]0, f(\alpha)[$ et de J sur $] \lim_{+\infty} f, f(\alpha)[=]0, f(\alpha)[$. Cela justifie donc l'existence de y pour tout x de $]0, \alpha[$. On a donc $y = \phi(x) = g^{-1}(f(x))$ où g désigne la bijection induite par f de $] \alpha, +\infty[$ sur $]0, f(\alpha)[$.

3. La fonction g^{-1} est la bijection réciproque d'une fonction continue, elle est donc elle-même continue, et puisque f est continue, ϕ est continue sur $]0, \alpha[$. La fonction g est strictement décroissante, donc par composition, ϕ est strictement décroissante, et admet donc une limite ℓ en $+\infty$. On a même $\lim_{0^+} f = 0$ et $\lim_{0^+} g^{-1} = +\infty$ puisque $\lim_{+\infty} g = 0$, donc $\lim_{0^+} \phi = +\infty$. Enfin, en notant $h = g^{-1}$, on a par définition pour $x > \alpha$, $f(h(x)) = x$ et donc : $x(e^{h(x)} + 1) = 2h(x)$ d'où en passant au logarithme, $\ln(x) + \ln(1 + e^{h(x)}) = \ln(2) + \ln(h(x))$ et on écrit : $\ln(1 + e^{h(x)}) = e^{\ln(h(x))} + \ln(1 + e^{-h(x)}) = h(x) + \ln(1 + e^{-h(x)})$, ce qui permet d'obtenir :

$\ln(x) + h(x) + \ln(1 + e^{-h(x)}) = \ln(2) + \ln(h(x))$. Or, puisque $\lim_{0^+} h = +\infty$, on a

$\ln(1 + e^{-h(x)}) = o(1)$, et $\ln(h(x)) = o(h(x))$ d'où $h(x) = -\ln(x) + o(h(x))$, puis $h(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x)$. Enfin, puisque $\lim_{0^+} f = 0$, on a $\phi(x) = h(f(x)) \sim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(f(x))$.

Comme $\ln(f(x)) = \ln(2) + \ln(x) - \ln(1 + e^x) = \ln(2) + \ln(x) - \underbrace{\ln(e^x)}_{=x} + \ln(1 + e^{-x})$, on trouve

$\ln(f(x)) \sim_{0^+} \ln(x)$ d'où $\phi(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x)$, ce qui est bien cohérent avec la limite précédemment obtenue.

Ex 25 : [Mines]

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls et $b_1 < \dots < b_p$ des réels.

Montrer que $f_p : x \mapsto \sum_{i=1}^p a_i e^{b_i x}$ s'annule au plus $p - 1$ fois.

2. Soient $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ et $\beta_1 < \dots < \beta_n$ des réels. Montrer que $\det([e^{\alpha_j \beta_i}]_{1 \leq i, j \leq n}) > 0$.

Correction :

1. Raisonnons par récurrence, l'hypothèse au rang $p \in \mathbb{N}^*$ est pour $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls et

$b_1 < \dots < b_p$ des réels quelconques, alors $f_p : x \mapsto \sum_{i=1}^p a_i e^{b_i x}$ s'annule au plus $p - 1$ fois.

L'initialisation au rang $p = 1$ est claire car $a_1 \neq 0$.

Supposons la propriété vraie au rang $p - 1$, avec $p \geq 2$ fixé. Soit $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls et $b_1 < \dots < b_p$ des réels.

Supposons que f_p s'annule au moins p fois, notons $z_1 < \dots < z_p$ des points d'annulations distincts

de f_p . Posons $\varphi_p(x) = e^{-b_p x} f_p(x) = \sum_{i=1}^p a_i e^{(b_i - b_p)x} = a_p + \sum_{i=1}^{p-1} a_i e^{(b_i - b_p)x}$. Alors, φ est dérivable sur

$\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $\varphi'_p(x) = \sum_{i=1}^{p-1} a_i (b_i - b_p) e^{(b_i - b_p)x}$. Puisque les $(a_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ sont non tous nuls

(sans quoi $f_p(x) = a_p e^{b_p x}$, ce qui est contraire à notre hypothèse), et $b_1 - b_p < \dots < b_{p-1} - b_p$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à φ'_{p-1} qui s'annule au plus $p - 2$ fois. Or, par théorème de Rolle appliqué à la fonction dérivable φ_p sur les $p - 1$ intervalles $]z_i, z_{i+1}[$ avec $i \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket$, on obtient $p - 1$ points d'annulations distincts de φ'_p , ce qui contredit l'hypothèse de récurrence au rang $p - 1$ et fournit l'absurdité souhaitée.

2. Raisonnons par récurrence une fois de plus, l'hypothèse au rang n étant : pour tout réels $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ et $\beta_1 < \dots < \beta_n$, on a alors $\det([e^{\alpha_j \beta_i}]_{1 \leq i, j \leq n}) > 0$.

Une fois de plus, l'initialisation est évidente par stricte positivité de la fonction exponentielle.

Supposons la propriété vraie au rang $n - 1$ où $n \geq 2$.

On s'inspire de la preuve classique du déterminant de vandermonde en posant pour $x \in \mathbb{R}$,

$f_n(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 \beta_1} & e^{\alpha_2 \beta_1} & e^{\alpha_3 \beta_1} & \dots & e^{\alpha_n \beta_1} \\ e^{\alpha_1 \beta_2} & e^{\alpha_2 \beta_2} & e^{\alpha_3 \beta_2} & \dots & e^{\alpha_n \beta_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{x \alpha_1} & e^{x \alpha_2} & e^{x \alpha_3} & \dots & e^{x \alpha_n} \end{vmatrix}$. En développant par rapport à la dernière ligne, on

obtient une fonction combinaison linéaire de fonctions $x \mapsto e^{\alpha_j x}$ donc le coefficient en $e^{\alpha_n x}$ n'est autre que $\det([e^{\alpha_j \beta_i}]_{1 \leq i, j \leq n-1})$ qui est par hypothèse de récurrence un réel strictement positif.

Ainsi, d'après la première question, f_n s'annule au plus $n - 1$ fois. Or, f_n s'annule en tous les β_i avec $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ par caractère alterné du déterminant, ainsi les seuls points d'annulation de f_n sont $\beta_1 < \dots < \beta_{n-1}$, donc f_n ne s'annule pas sur $]\beta_{n-1}, +\infty[$ donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f_n qui est continue est de signe constant sur $]\beta_{n-1}, +\infty[$ puisqu'elle ne s'annule pas sur cet intervalle.

Pour conclure, on constate que puisque $\beta_1 < \dots < \beta_{n-1} < \beta_n$, on a

$$f_n(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha_n x} \det([e^{\alpha_j \beta_i}]_{1 \leq i, j \leq n-1}) > 0$$

ce qui prouve que f_n est strictement positive sur $]\beta_{n-1}, +\infty[$. Puisque $\beta_n > \beta_{n-1}$, on en déduit bien que $f_n(\beta_n) > 0$, ce qui achève la récurrence.

Ex 26 : [Centrale] Le but de cet exercice est de montrer que π est irrationnel.

1. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent (il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$). Montrer que $v = Id_E + u$ est un automorphisme et déterminer v^{-1} .
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q'' + Q = P$.
Si P est dans $\mathbb{Z}[X]$ et divisible par X^n , montrer que : $Q \in \mathbb{Z}[X]$ et $n!|Q(0)$.
3. On suppose que $\pi = p/q$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = (p - qX)^n X^n$ et Q_n l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q_n'' + Q_n = P_n$. En considérant $\frac{1}{n!} \int_0^\pi P_n \sin$, démontrer le résultat annoncé.

Correction :

1. On pense au DL_0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ pour se forger l'intuition du fait que le candidat naturel pour l'inverse de $Id_E + u$ est $v = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k u^k$. Il suffit ensuite de vérifier que

$$(id_E + u) \circ v = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k u^k + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k u^{k+1} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k u^k + \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} u^k = id_E.$$

On effectue le même calcul pour $v \circ (u + id_E)$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si P est nul, le seul polynôme Q possible est clairement le polynôme nul. Supposons P non nul, notons n son degré. Un polynôme Q solution est nécessairement de degré n . Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\phi(T) = T + T''$. Puisque $D : P \mapsto P''$ est nilpotent sur $\mathbb{R}_n[X]$ ($D^{n+1} = 0$), la question précédente nous assure que ϕ est un automorphisme, d'où l'existence et l'unicité de Q .

Supposons P dans $\mathbb{Z}[X]$ et divisible par X^n . L'écriture $Q = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k P^{(2k)}$ issue de la question précédente nous assure d'emblée que $Q \in \mathbb{Z}[X]$. On a $P = \sum_{k=n}^N a_k X^k$, avec $a_n, a_{n+1}, \dots, a_N \in \mathbb{Z}$.

Comme 0 est une racine de P de multiplicité n , alors $P^{(k)}(0) = 0$, si $k < n$ ou $k > N$. Pour $n \leq k \leq N$, on a : $P^{(k)}(0) = k! a_k$. Comme on a : $n!|k!$, alors on a dans tous les cas $n!|P^{(k)}(0)$. En conclusion, étant donnée l'écriture de Q , $n!$ divise $Q(0)$.

3. On pose $R_n(X) = P_n(X + \pi) = P_n(X + p/q) = (-q)^n X^n (X + p/q)^n = X^n (p - qX)^n$, puis $Q_n(X + \pi) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k R_n^{(2k)}$ et on utilise la même raisonnement que dans la question précédente pour obtenir le fait que $n!$ divise $Q_n(\pi)$.
Enfin, via deux intégrations par parties, on a

$$\int_0^\pi Q_n'' \sin = [Q_n' \sin]_0^\pi - \int_0^\pi Q_n' \cos = -[Q_n \cos]_0^\pi - \int_0^\pi Q_n \sin$$

d'où

$$\frac{1}{n!} \int_0^\pi P_n \sin = \frac{1}{n!} \int_0^\pi (Q_n + Q_n'') \sin = \frac{1}{n!} (Q_n(\pi) + Q_n(0)) \in \mathbb{Z}$$

La seule chose essentielle ici étant de noter que cette quantité est un entier relatif. Enfin, une majoration brutale donne

$$\frac{1}{n!} \left| \int_0^\pi P_n \sin \right| \leq \frac{\pi p^n \pi^n}{n!}$$

donc cette quantité est de limite nulle quand n tend vers plus l'infini (terme générale de la série $\pi e^{p\pi}$ qui converge), donc nulle à partir d'un certain rang n_0 puisque c'est un entier relatif. Enfin, il suffit de remarquer que $P_n \sin$ est positif sur $[0, \pi]$ et que cette fonction est continue positive d'intégrale nulle sur un segment non réduit à un point pour en déduire que $P_n \sin$ est la fonction nulle sur $[0, \pi]$, et donc que P_n est le polynôme nul, ce qui fournit la contradiction recherchée.

Ex 27 : [Mines] Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos(t) - \cos(x)} dt$ (on regardera d'éventuels prolongements par continuité).
2. Trouver une relation de récurrence d'ordre deux vérifiée par (I_n) .
3. Calculer I_n , pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1. Si $x = 0$, on obtient $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)} dt$ qui est l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $]0, \pi[$ qui se prolonge par continuité en 0 et en π , d'où l'existence.

Si $x \in]0, \pi]$, on écrit $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(n(t+x)/2) \sin(n(t-x)/2)}{\sin((t+x)/2) \sin((t-x)/2)} dt$, l'intégrande est une fonction continue de t sur $[0, x] \cup]x, \pi]$ qui se prolonge par continuité en x et est donc on peut intégrer la fonction sur $[0, \pi]$.

Enfin, étant donné que l'intégrande ne dépend que de la valeur de $\cos(x)$ et $\cos(nx)$ et est une fonction paire de x , on peut se restreindre à $x \in [0, \pi]$ pour en déduire l'existence de I_n pour tout x réel.

.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_{n+1} + I_{n-1} = \int_0^\pi \frac{\cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) - (\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x))}{\cos(t) - \cos(x)} dt$$

d'où

$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_{n-1} &= 2 \int_0^\pi \frac{\cos(t) \cos(nt) - \cos(x) \cos(nx)}{\cos(t) - \cos(x)} dt \\ &= 2 \int_0^\pi \frac{(\cos(t) - \cos(x)) \cos(nt)}{\cos(t) - \cos(x)} dt + 2 \int_0^\pi \frac{\cos(x)(\cos(nt) - \cos(nx))}{\cos(t) - \cos(x)} dt \\ &= 2 \cos(x) I_n \end{aligned}$$

car pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \cos(nt) dt = 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} - 2 \cos(x) I_n + I_{n-1} = 0$$

3. L'équation caractéristique s'écrit $r^2 - 2 \cos(x)r + 1 = 0$ qui a pour racines complexes e^{ix}, e^{-ix} qui sont distinctes si et seulement si $x \neq 0[\pi]$.

Si $x \neq 0[\pi]$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = A \cos(nx) + B \sin(nx)$. Les conditions initiales $I_0 = 0$ et $I_1 = \pi$ donnent $A = 0$ et $B \frac{\pi}{\sin x}$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \pi \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$.

Si $x = 0[2\pi]$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = An + B$. Les conditions initiales sont conservées et donnent $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = n\pi$.

Si $x = \pi[2\pi]$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = (-1)^n(An + B)$. Les conditions initiales sont conservées et donnent $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = (-1)^{n+1}n\pi$.

Ex 28 : [Mines] Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, strictement croissante telle que $f(0) = 0$.

1. On suppose dans cette questions que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x).$$

2. a. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $x_{i,n} = \frac{ix}{n}$. Montrer que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{i,n}(f(x_{i+1,n}) - f(x_{i,n})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt.$$

b. Montrer l'égalité vue en a).

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et bijective. Montrer que :

$$\int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt \geq ab.$$

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$I_1 = \int_0^x f(t) dt.$$

Pour la deuxième intégrale, nous effectuons un changement de variable dans $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt$. Soit $t = f(u)$. Alors, $dt = f'(u)du$. Par conséquent, la deuxième intégrale devient $(f^{-1}(0) = 0, \text{ car } f(0) = 0)$:

$$I_2 = \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x u f'(u) du,$$

puisque $u = f^{-1}(t)$, et t varie de 0 à $f(x)$ lorsque u varie de 0 à x .

En remplaçant ces deux intégrales dans l'expression donnée, nous avons :

$$I_1 + I_2 = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x u f'(u) du.$$

Par intégration par parties, on a :

$$\int_0^x u f'(u) du = xf(x) - \int_0^x f(u) du.$$

On obtient donc :

$$I_1 + I_2 = \int_0^x f(t) dt + \left(xf(x) - \int_0^x f(t) dt \right).$$

puis :

$$I_1 + I_2 = xf(x),$$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)$.

2. a. Comme f est strictement croissante, alors $f(x_{0,n}) < f(x_{1,n}) < \dots < f(x_{n,n})$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$J_n = \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - \sum_{i=0}^{n-1} x_{i,n}(f(x_{i+1,n}) - f(x_{i,n})) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{f(x_{i,n})}^{f(x_{i+1,n})} (f^{-1}(t) - x_{i,n}) dt.$$

Comme f^{-1} est aussi strictement croissante, alors on a :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{f(x_{i,n})}^{f(x_{i+1,n})} (f^{-1}(f(x_{i,n})) - x_{i,n}) dt \leq J_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{f(x_{i,n})}^{f(x_{i+1,n})} (f^{-1}(f(x_{i+1,n})) - x_{i,n}) dt,$$

puis : $0 \leq J_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{f(x_{i,n})}^{f(x_{i+1,n})} (x_{i+1,n} - x_{i,n}) dt = \frac{x}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{f(x_{i,n})}^{f(x_{i+1,n})} dt = \frac{x}{n} \int_0^{f(x)} dt = \frac{xf(x)}{n},$
grâce à la relation de Chasles.

Ainsi par encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$, puis : $\sum_{i=0}^{n-1} x_{i,n}(f(x_{i+1,n}) - f(x_{i,n})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt.$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\sum_{i=0}^{n-1} x_{i,n}(f(x_{i+1,n}) - f(x_{i,n})) = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i,n}f(x_{i+1,n}) - \sum_{i=0}^{n-1} x_{i,n}f(x_{i,n}) =$
 $\sum_{i=1}^n x_{i-1,n}f(x_{i,n}) - \sum_{i=0}^{n-1} x_{i,n}f(x_{i,n}) = x_{0,n}f(x_{1,n}) + \sum_{i=1}^{n-1} [x_{i-1,n} - x_{i,n}]f(x_{i,n}) - x_{n,n}f(x_{n,n}) =$
 $0 - x \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{ix}{n}\right) + \frac{x}{n} f(x) - xf(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \times \frac{1}{x-0} \int_0^x f(t)dt - xf(x),$ car f est
continue par morceaux sur $[0, x]$ et on utilise les intégrales de Riemann. Grâce à la question
précédente, on a par unicité de la limite : $\int_0^x f(t)dt - xf(x) = \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt.$

3. On fixe $b \in \mathbb{R}_+$ et on pose $\phi : x \mapsto \int_0^x f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt - bx$. Ainsi ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur

$\mathbb{R}_+$, car $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est une primitive d'une fonction continue.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \phi'(x) = f(x) - b$. Par stricte croissance de f , ϕ' est négative sur $[0, f^{-1}(b)]$ et positive sur $[f^{-1}(b), +\infty[$. Ainsi ϕ admet un minimum en $f^{-1}(b)$.

Or $\phi(f^{-1}(b)) = \int_0^{f^{-1}(b)} f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt - bf^{-1}(b) = 0$, grâce au résultat de la question **2.a.**,
pour $x = f^{-1}(b)$.

On a donc : $\phi(a) \geq 0$, puis : $\int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt - ba \geq 0.$

Ex 29 : [Mines] Pour $x \in]1, +\infty[$, on pose $F(x) = \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{e^t}{t} dt$. Déterminer la limite de F en 1^+ .
Montrer que F est injective.

Correction : Pour $x > 1$, on pose $G(x) = \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{dt}{t} = \ln|2\ln(x)| - \ln|\ln(x)| = \ln(2)$. On a :
 $F(x) - \ln(2) = F(x) - G(x) = \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{e^t - 1}{t} dt$. Soit $h : t \mapsto \frac{e^t - 1}{t}$ et on pose $H(X) = \int_1^X h(t)dt$,
pour $X \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction h se prolonge par continuité en 0, car $h(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t}{t} = 1$, et par conséquent H
(qui est une primitive de h) se prolonge aussi par continuité en 0 en posant : $H(0) = \int_1^0 h(t)dt$. On a :

$$F(x) - G(x) = \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} h(t)dt = H(2\ln(x)) - H(\ln(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} H(0) - H(0) = 0. \text{ Ainsi } \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \ln(2).$$

On pose $k : t \mapsto \frac{e^t}{t}$ et on note K une primitive de cette fonction sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$\forall x \in]1, +\infty[$, $F(x) = K(2\ln(x)) - K(\ln(x))$. Ainsi par opérations composition, F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et : $\forall x \in]1, +\infty[$, $F'(x) = \frac{2}{x}K'(2\ln(x)) - \frac{1}{x}K'(\ln(x)) = \frac{2}{x} \times \frac{e^{2\ln(x)}}{2\ln(x)} - \frac{1}{x} \times \frac{e^{\ln(x)}}{\ln(x)} = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{\ln(x)} - \frac{1}{x} \times \frac{x}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)} > 0$. Ainsi F est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et donc elle est injective.

Ex 30 : [Mines] Soit $s \in]1, +\infty[$ et $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Si n est dans $\mathbb{N}^*$, soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s} = (\zeta(s))^2$.

Correction : Dans un premier temps, rappelons que la fonction ζ est bien définie sur $]1, +\infty[$. La famille $\left(\frac{1}{\ell^s m^s}\right)_{(\ell, m) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable : il s'agit en effet d'une famille de réels positifs indexée par $(\mathbb{N}^*)^2$ et à m fixé, $\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell^s} = \zeta(s) \frac{1}{m^s}$, puis en sommant sur m , on trouve une somme qui converge, ce qui prouve que la famille considérée est sommable de somme $\zeta(s)^2$.

De plus, l'égalité suivante donne une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$: $(\mathbb{N}^*)^2 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\{(\ell, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \ell m = n\}}_{=A_n}$, et on a

l'égalité $A_n = \{(\ell, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \ell m = n\} = \left\{\left(d, \frac{n}{d}\right), d \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } d|n\right\}$.

On a $\text{card}(A_n) = d(n)$, car d'après la dernière expression un élément de A_n est entièrement déterminé par $d|n$.

Ainsi, puisque la famille est sommable, le théorème de sommation par paquets donne : $\zeta(s)^2 =$

$$\sum_{(\ell, m) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{\ell^s m^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(\ell, m) \in A_n} \frac{1}{\ell^s m^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(\ell, m) \in A_n} \frac{1}{n^s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{card}(A_n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s}$$

Ex 31 : [Mines] Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - (-1)^n}$?

Correction : Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$ $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$. Une comparaison série intégrale appliquée à la fonction décroissante continue positive $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ donne $2\sqrt{n+1} - 2 = \int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq s_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} = 1 + 2\sqrt{n} - 2$, et donc on obtient $s_n \sim 2\sqrt{n}$. On en déduit donc

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{s_n - (-1)^n} \\ &= \frac{(-1)^n}{s_n} \frac{1}{1 - \frac{(-1)^n}{s_n}} \\ &=_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{s_n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{s_n} + o\left(\frac{1}{s_n}\right)\right) \\ &=_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{s_n} + \frac{1}{s_n^2} + o\left(\frac{1}{s_n^2}\right) \end{aligned}$$

La série de terme général $v_n = \frac{(-1)^n}{s_n}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\frac{1}{s_n}\right)_n$ décroît vers 0, et la série de terme général $\frac{1}{s_n^2}$ diverge car $\frac{1}{s_n^2} \sim \frac{1}{4n}$. On conclut grâce au fait que $u_n - v_n \sim \frac{1}{4n}$ que la série de terme général $u_n - v_n$ diverge, donc que la série de terme général $u_n = v_n + (u_n - v_n)$ diverge en tant que somme d'une série divergente et d'une série convergente.

Ex 32 : [Mines] Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}$.

Pour calculer $S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k$, procédons comme suit :

La somme S_n ne contient que les termes pairs $2k$ de la formule du binôme. Utilisons l'identité générale :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} x^{2k} = \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2}.$$

Dans l'expression considérée $x^2 = -3$, on évalue donc l'identité précédente en $x = i\sqrt{3}$:

$$S_n = \frac{(1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n}{2}.$$

On exprime la forme exponentielle des complexes considérés :

$$1+i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{et} \quad 1-i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Ainsi, par la formule de Moivre :

$$(1 \pm i\sqrt{3})^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} \pm i \sin \frac{n\pi}{3} \right).$$

En combinant les termes :

$$S_n = \frac{2^n}{2} \left[\left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right) + \left(\cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3} \right) \right] = 2^n \cos \left(\frac{n\pi}{3} \right).$$

$$S_n = 2^n \cos \left(\frac{n\pi}{3} \right).$$

Passons au calcul de la somme suivante : soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et $A = (1+1)^n$, $B = (1+j)^n$ et $C = (1+j^2)^n$.

Rappelons les égalités $\bar{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2$ et $1+j+j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$.

On développe A , B et C par la formule du binôme :

$$A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad B = \sum_{k=0}^n j^k \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad C = \sum_{k=0}^n j^{2k} \binom{n}{k}.$$

Or, $1+j^k+j^{2k} = \begin{cases} 3 & \text{si } k \equiv 0 \pmod{3} \\ 0 & \text{si } k \equiv 1 \pmod{3} \\ 0 & \text{si } k \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$ ce qui permet de conclure que $A+B+C = 3T_n$.

Enfin, $1 + j = e^{i\frac{\pi}{3}}$, d'où $B + C = e^{i\frac{n\pi}{3}} + e^{-in\frac{\pi}{3}} = 2 \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$, ce qui permet de conclure que $T_n = \frac{2^n + 2 \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)}{3}$.

Ex 33 : [Mines] On lance simultanément deux pièces équilibrées n fois. Soit E_n l'événement « les deux pièces donnent la même nombre de pile ».

1. a. Pour $a, b, n \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq a + b$, montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.
- b. En déduire $P(E_n)$.

2. Déduire combien de fois en moyenne les pièces sont tombées sur Pile lorsque l'événement E_n est réalisé.

Correction :

1. a. Voici d'abord une preuve combinatoire : soient $a, b, n \in \mathbb{N}$ avec $n \leq a + b$. Montrons que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

Considérons deux ensembles disjoints :

- A avec a éléments
- B avec b éléments

Le terme de droite $\binom{a+b}{n}$ compte le nombre total de façons de choisir n éléments dans $A \cup B$.

Le terme de gauche décompose ce choix selon le nombre k d'éléments pris dans A , la somme provenant du fait que l'on a des situations disjointes :

$$\sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{a}{k}}_{\text{Choix dans } A} \underbrace{\binom{b}{n-k}}_{\text{Choix dans } B}$$

- Si $k > a$, $\binom{a}{k} = 0$
- Si $n - k > b$, $\binom{b}{n-k} = 0$

La somme correspond donc bien à toutes les répartitions possibles.

Donnons maintenant une preuve calculatoire : considérons le développement de $(1+x)^{a+b}$ de deux manières :

D'une part, on a

$$(1+x)^{a+b} = \sum_{n=0}^{a+b} \binom{a+b}{n} x^n$$

et d'autre part,

$$(1+x)^a (1+x)^b = \left(\sum_{k=0}^a \binom{a}{k} x^k \right) \left(\sum_{m=0}^b \binom{b}{m} x^m \right)$$

En identifiant les coefficients de x^n , on retrouve la formule :

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$$

- b.** En déduire $P(E_n)$. Soit $i \in \{1, 2\}$, on note X_i la variable aléatoire qui compte le nombre de piles obtenus pour la pièce i . La va X_i suit la loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{2})$. L'événement E_n s'écrit $\cup_{0 \leq k \leq n} \{X_1 = k\} \cap \{X_2 = 2\}$, où l'union est disjointe. On obtient donc par indépendance des résultats :

$$P(E_n) = \sum_{k=0}^n P(X_1 = k)P(X_2 = k) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2n}} \binom{n}{k} \binom{n}{k}$$

soit d'après la question précédente, en remarquant que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $P(E_n) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$.

- 2.** Il s'agit de calculer l'espérance de X_1 pour la probabilité P_{E_n} , c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^n k P_{E_n}(X_1 = k) = \sum_{k=1}^n k \frac{\binom{n}{k} \binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}$$

on écrit ensuite pour $1 \leq k \leq n$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, d'où

$$\sum_{k=0}^n k P_{E_n}(X_1 = k) = n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{j} \binom{n}{n-1-j}}{\binom{2n}{n}}$$

et on applique à nouveau la question précédente avec $a = n-1$, $b = n$ et n remplacé par $n-1$ pour obtenir

$$\sum_{k=0}^n k P_{E_n}(X_1 = k) = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \binom{2n-1}{n-1} = \frac{n}{2}.$$

Ex 34 : [Mines] Soit E un ensemble. Une application p de E dans E est dite idempotente si $p \circ p = p$.

- 1.** Soit p idempotente sur E .

- a.** Montrer que si p est injective, alors $p = Id_E$.
- b.** Montrer que si p est surjective, alors $p = Id_E$.
- c.** Donner une application idempotente sur un ensemble à deux éléments qui n'est pas l'identité.
- d.** Donner trois applications idempotentes sur un ensemble à deux éléments, et dix sur un ensemble à trois éléments.

- 2.** Montrer qu'une application p est idempotente si et seulement si : $\forall x \in p(E), p(x) = x$.

- 3.** On suppose que E est fini de cardinal n . Déénombrer les application idempotentes sur E .

Correction :

- 1.**
 - a.** Supposons p injective : si $x \in E$ vérifie $p(x) \neq x$, alors $p(p(x)) \neq p(x)$ par injectivité de p , ce qui contredit l'idempotence.
 - b.** Si p est surjective, tout $y \in E$ s'écrit $p(x)$, auquel cas $p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$ et $p = Id_E$.
 - c.** L'application transposition des deux éléments convient.
 - d.** Notons $E = \{a, b\}$. L'identité, et les deux applications constantes sur E conviennent. Si $E = \{a, b, c\}$, l'identité, les trois transpositions et les trois applications constantes conviennent. Les applications définies par $f(a) = a, f(b) = b, f(c) = b, g(a) = a, g(b) = c, g(c) = c, h(a) = a, h(b) = b, h(c) = a$, conviennent également, ce qui donne dix applications idempotentes distinctes sur E .
- 2.** Sens direct : si $y = p(x) \in p(E)$, alors $p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$. Réciproquement, si $x \in E$, $y = p(x) \in p(E)$, donc $p(y) = y$ ce qui donne bien $p \circ p(x) = p(x)$.

3. On commence par choisir l'image de p : si k est son cardinal, cela donne $\binom{n}{k}$ choix possible pour $\text{Im}(p)$. Ensuite, on choisit une application quelconque de $E \setminus \text{Im}(p)$ dans $\text{Im}(p)$, ce qui donne k^{n-k} choix. Chacun de ces choix définit une application idempotente de façon unique, donc l'ensemble recherché est de cardinal $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^{n-k}$, car nous avons des situations disjointes quand k varie.

Ex 35 : [Centrale]

1. On considère une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On effectue des tirages sans remise d'une boule jusqu'à ce que les boules restant dans l'urne soient toutes de la même couleur. Soit X_n le nombre de boules restant après ces tirages. Donner la loi de X_n .
2. On considère maintenant deux urnes contenant chacune n boules. On effectue des tirages sans remise en choisissant à chaque fois l'une des deux urnes de manière équiprobable. On s'arrête si l'urne choisie est vide. Soit Y_n le nombre de boules restant à ce moment dans l'autre urne. Donner la loi de Y_n et un équivalent de son espérance. On pourra vérifier que pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on a : $(2n - k)P(Y_n = k + 1) = 2(n - k)P(Y_n = k)$

Correction :

1. La variable aléatoire X_n prend ses valeurs dans $\{1, \dots, n\}$. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$.

Pour réaliser cet événement, la dernière boule tirée n'est pas de la même couleur que les k boules restantes. S'il reste k boules blanches :

- On a tiré $n - 1$ boules noires et $n - k$ boules blanches aux $2n - k - 1$ premiers tirages et on note A cet événement : $\binom{n}{n-1} \times \binom{n}{n-k}$ cas favorables et $\binom{2n}{2n-k-1}$ cas possibles, donc $P(A) = \frac{\binom{n}{n-1} \times \binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{2n-k-1}} = \frac{n \binom{n}{k}}{\binom{2n}{k+1}}$.
- On note B l'événement tirer une boule noire au tirage $2n - k$ et donc $P(B|A) = \frac{1}{k+1}$.

Ainsi $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{k+1} \frac{n \binom{n}{k}}{\binom{2n}{k+1}}$, qui est la probabilité d'avoir k boules blanches à la fin. On multiplie par 2 pour tenir compte des deux couleurs, cela correspondant à deux situations disjointes, d'où :

$$P(X_n = k) = \frac{2}{k+1} \frac{n \binom{n}{k}}{\binom{2n}{k+1}}$$

2. La variable Y_n prend ses valeurs dans $\{1, \dots, n\}$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $Y_n = k$ lorsque n fois l'urne 1 a été choisie et $n - k$ fois l'urne 2, le dernier choix étant fait dans l'urne 1 ou l'inverse. Cela fait $2n - k + 1$ tirages.

Cela peut aussi se modéliser par une succession indépendante de schéma Bernoulli. Ainsi sur les $2n - k$ tirage, le nombre de tirage dans l'urne 1 se modélise par une loi $\mathcal{B}(2n - k, 1/2)$ et la probabilité d'avoir choisi n fois l'urne 1 est $\binom{2n-k}{n} \times \frac{1}{2^{2n-k}}$. En ajoutant le tirage numéro

$2n - k + 1$ dans l'urne 1, par indépendance des tirages, on a : $\binom{2n-k}{n} \times \frac{1}{2^{2n-k+1}}$.

Comme on a deux situations symétriques et disjointes, on en déduit :

$$P(Y_n = k) = 2 \times \binom{2n-k}{n} \times \frac{1}{2^{2n-k+1}} = \binom{2n-k}{n} \times \frac{1}{2^{2n-k}}.$$

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on vérifie que $(2n - k)P(Y_n = k + 1) = 2(n - k)P(Y_n = k)$. On somme la formule qui précède

$$2n \sum_{k=1}^n P(Y_n = k+1) - \sum_{k=1}^n kP(Y_n = k+1) = 2n \sum_{k=1}^n P(Y_n = k) - 2 \sum_{k=1}^n kP(Y_n = k) = 2n - 2E(Y_n).$$

$$\text{On a donc : } 2n - 2E(Y_n) = 2n \sum_{k=2}^{n+1} P(Y_n = k) - \underbrace{\sum_{k=2}^{n+1} (k-1)P(Y_n = k)}_{= 0 \text{ si } k=1 \text{ ou } k=n+1} =$$

$$2n \sum_{k=1}^n P(Y_n = k) - 2nP(Y_n = 1) - \sum_{k=1}^n (k-1)P(Y_n = k) =$$

$$2n - 2nP(Y_n = 1) - \sum_{k=1}^n kP(Y_n = k) + \sum_{k=1}^n P(Y_n = k) = 2n - 2nP(Y_n = 1) - E(Y_n) + 1 \text{ On conclut}$$

$$E(Y_n) = 2nP(Y_n = 1) - 1 = \frac{2n}{2^{2n-1}} \binom{2n-1}{n} - 1.$$

$$\text{On a par la formule de Stirling : } \binom{2n-1}{n} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \sim \frac{\sqrt{2\pi(2n-1)} \left(\frac{2n-1}{e}\right)^{2n-1}}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \times \sqrt{2\pi(n-1)} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{2n-1}{n}\right)^n \times \left(\frac{2n-1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \times \left(1 + \frac{1}{2(n-1)}\right)^{n-1}. \text{ Or on a quand } x \text{ tend vers } +\infty : (1 + 1/2x)^x = e^{x \ln(1+1/2x)} = e^{x(1/2x + o(1/x))} = e^{1/2 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{1/2} \text{ et de même } (1 - 1/2x)^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-1/2}.$$

$$E(Y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$

Ex 36 : [Mines] Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et centrées (d'espérance nulle).

On pose $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sigma_k = \sigma(X_k)$ et $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$; $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$;

pour $k \geq 2$: $A_k^\varepsilon = \{|S_k| \geq \varepsilon\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \{|S_i| < \varepsilon\}\right)$ avec $\varepsilon > 0$.

1. Exprimer $\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\}$ en fonction des A_i^ε pour $1 \leq i \leq n$.
2. Montrer que $E((S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) = E(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) - E(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon})$ (on pourra considérer $E((S_n - S_k)S_k \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon})$).
3. En déduire que $P(\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2}$.
4. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Correction :

1. Les A_i^ε représente le premier indice i tel que $|S_i| \geq \varepsilon$, donc

$$\boxed{\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\} = \bigcup_{i=1}^n A_i^\varepsilon}$$

2. $E((S_n - S_k)S_k \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) = E\left(\left(\sum_{l=k+1}^n X_l\right)S_k \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}\right)$. Or $\sum_{l=k+1}^n X_l$ dépend uniquement de $X_{k+1}, \dots, X_n$ et $S_k \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}$ dépend de $X_1, \dots, X_k$, comme $(X_l)_{1 \leq l \leq n}$ est une famille indépendante de variables aléatoires,

alors $\sum_{l=k+1}^n X_l$ et $S_k \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}$ sont indépendantes. On a donc $E((S_n - S_k)S_k \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) = E(\sum_{l=k+1}^n X_l)E(S_k \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon})$.

Comme $E(\sum_{l=k+1}^n X_l) = \sum_{l=k+1}^n E(X_l) = 0$, car les variables aléatoires sont centrées, alors :

$$E((S_n - S_k)S_k \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) = 0.$$

Par suite $E(S_n S_k \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) - E(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) = E((S_n - S_k)S_k \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) = 0$ et

$$E((S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) = E(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) - 2E(S_n S_k \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) + E(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) = E(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) - 2E(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) + E(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) \text{ et enfin}$$

$$E((S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) = E(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) - E(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon})$$

3. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a : $S_k^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon} \geq \varepsilon^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}$, car si $\omega \notin A_k^\varepsilon$, alors : $S_k^2(\omega) \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}(\omega) = \varepsilon^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}(\omega) = 0$ et sinon, la fonction indicatrice vaut 1 et $S_k^2(\omega) \geq \varepsilon^2$. Ainsi on a : $E(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) \geq \varepsilon^2 E(\mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) = \varepsilon^2 P(A_k^\varepsilon)$.

Ainsi grâce à la question précédente : $P(A_k^\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon})$.

Ainsi $\sum_{k=1}^n P(A_k^\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left(S_n^2 \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon^2} E(S_n^2 \mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k^\varepsilon}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E(S_n^2)$ (avec $\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon} = \mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k^\varepsilon}$, car les A_k sont deux à deux disjoints).

Mais $V(S_n) = E(S_n^2) - (E(S_n))^2 = E(S_n^2)$. Comme $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = n\sigma^2.$$

Enfin grâce à la première question, on a : $P\left(\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right\}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^\varepsilon\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i^\varepsilon)$

(union disjointe) et donc

$$P(\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

4. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que :

$P(|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2}$ soit : $P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2}$. L'inégalité obtenue (Kolmogorov) est meilleure dans ce cas, car nous avons un sup.

Ex 37 : [Mines] Une puce se trouve sur l'origine de $\mathbb{Z}^2$. À chaque étape, elle saute aléatoirement dans l'une des quatre directions. On note X_n l'abscisse de la puce à l'étape n . Calculer $E(X_n)$ et $E(X_n^2)$.

Correction : Soit Z_n la direction prise par la puce à l'étape n . Ainsi Z_n est une loi uniforme sur $\{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$.

On a $X_n = \sum_{k=1}^n 1_{Z_k=(1,0)} - \sum_{k=1}^n 1_{Z_k=(-1,0)}$, on compte le nombre de déplacements suivant les abscisses positives et on retranche le nombre de déplacements selon les abscisses négatives. Les variables aléatoires $1_{Z_n=(1,0)}$ et $1_{Z_n=(-1,0)}$ suivent une loi $\mathcal{B}(1/4)$. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^n E(1_{Z_k=(1,0)}) - \sum_{k=1}^n E(1_{Z_k=(-1,0)}) = \sum_{k=1}^n 1/4 - \sum_{k=1}^n 1/4 = 0.$$

On a donc $E(X_n^2) = V(X_n)$. On pose $U_n = \sum_{k=1}^n 1_{Z_k=(1,0)}$ et $V_n = \sum_{k=1}^n 1_{Z_k=(-1,0)}$.

On a donc $V(X_n) = V(U_n - V_n) = V(U_n) + V(-V_n) + 2cov(U_n, -V_n) = V(U_n) + V(V_n) - 2cov(U_n, V_n)$. La variable aléatoire U_n est une somme de variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi $\mathcal{B}(1/4)$, donc U_n suit une loi $\mathcal{B}(n, 1/4)$. Il en est de même pour V_n .

Ainsi $V(U_n) = V(V_n) = (1/4)(3/4)n = \frac{3n}{16}$.

Par bilinéarité de la covariance, on a $cov(U_n, V_n) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} cov(1_{Z_k=(1,0)}, 1_{Z_l=(-1,0)})$. Si $k \neq l$, alors

$1_{Z_k=(1,0)}$ et $1_{Z_l=(-1,0)}$ sont indépendantes, car les déplacements sont indépendants entre eux, donc $cov(1_{Z_k=(1,0)}, 1_{Z_l=(-1,0)}) = 0$.

Il reste donc : $cov(U_n, V_n) = \sum_{k=1}^n cov(1_{Z_k=(1,0)}, 1_{Z_k=(-1,0)})$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a : $cov(1_{Z_k=(1,0)}, 1_{Z_k=(-1,0)}) = E(1_{Z_k=(1,0)}1_{Z_k=(-1,0)}) - E(1_{Z_k=(1,0)})E(1_{Z_k=(-1,0)}) = E(1_{Z_k=(1,0)}1_{Z_k=(-1,0)}) - (1/4)^2$.

On a : $1_{Z_k=(1,0)}1_{Z_k=(-1,0)} = 0$, car $Z_k = (1, 0)$ et $Z_k = (-1, 0)$ ne peuvent se réaliser en même temps.

On a donc $cov(U_n, V_n) = -\frac{n}{16}$, puis $E(X_n^2) = 2\frac{3n}{16} - 2\frac{n}{16} = \frac{n}{4}$.

Ex 38 : [Mines] On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient $n \geq 1$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires deux à deux indépendantes, suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Déterminer la loi de la variable (X_1, S_n) .
2. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $(S_n = k)$, où $k \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer la loi conditionnelle de S_n sachant $(X_1 = \varepsilon)$, où $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Correction :

On pose $q = 1 - p$.

1. Soient S_n suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$ en tant que somme de variables aléatoires suivant une loi $\mathcal{B}(p)$.

(X_1, S_n) est à valeurs dans $\{0, 1\} \times \llbracket 0, n \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a : $P((X_1, S_n) = (1, k)) = P((X_1 = 1) \cap (X_1 + X_2 + \dots + X_n = k)) = P((X_1 = 1) \cap (X_2 + \dots + X_n = k - 1)) = P(X_1 = 1)P(X_2 + \dots + X_n = k - 1)$, car X_1 et $X_2 + \dots + X_n$ sont indépendantes. De plus $X_2 + \dots + X_n$ suit une loi $\mathcal{B}(n - 1, p)$. Ainsi :

$$P((X_1, S_n) = (1, k)) = p \times \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

On a aussi : $P((X_1, S_n) = (1, 0)) = 0$, car si $X_1 = 1$, alors $S_n > 0$.

De même pour $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, on a :

$$P((X_1, S_n) = (0, k)) = P((X_1 = 0) \cap (X_1 + X_2 + \dots + X_n = k)) =$$

$$P((X_1 = 0) \cap (X_2 + \dots + X_n = k)) = P(X_1 = 0)P(X_2 + \dots + X_n = k) = q \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k} =$$

$$\binom{n-1}{k} p^k q^{n-k}.$$

On a aussi $P((X_1, S_n) = (0, n)) = 0$, car si $X_1 = 0$, alors $S_n \leq n - 1$.

2. On considère $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ (sinon $P(S_n = k) = 0$ et on ne peut pas définir la probabilité conditionnelle).

$$\text{On a : } P(X_1 = 1 | S_n = k) = \frac{P((X_1 = 1) \cap (S_n = k))}{P(S_n = k)}.$$

Si $k = 0$, alors $P((X_1 = 1) \cap (S_n = k)) = 0$, puis $P(X_1 = 1 | S_n = k) = 0$, sinon grâce à la ques-

$$\text{tion précédente, on a : } P(X_1 = 1 | S_n = k) = \frac{\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k}{n}.$$

Comme $P(\cdot | S_n = k)$ est une probabilité, alors $P(X_1 = 0 | S_n = k) = 1 - P(X_1 = 1 | S_n = k) = 1 - \frac{k}{n}$.

Ainsi pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la loi de X_1 sachant $(S_n = k)$ est une loi $\mathcal{B}\left(\frac{k}{n}\right)$.

3. Commençons par $\varepsilon = 1$.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a $P(S_n = k | X_1 = 1) = \frac{P((X_1 = 1) \cap (S_n = k))}{P(X_1 = 1)}$. Si $k = 0$, alors

$P((X_1 = 1) \cap (S_n = k)) = 0$, puis $P(S_n = k | X_1 = 1) = 0$, sinon grâce à la première question, on a : $P(S_n = k | X_1 = 1) = \frac{\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}}{p} = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k}$.

Pour $\varepsilon = 0$.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a $P(S_n = k | X_1 = 0) = \frac{P((X_1 = 0) \cap (S_n = k))}{P(X_1 = 0)}$. Si $k = n$, alors $P((X_1 = 0) \cap (S_n = k)) = 0$, puis $P(S_n = k | X_1 = 0) = 0$, sinon grâce à la première question, on a : $P(S_n = k | X_1 = 0) = \frac{\binom{n-1}{k} p^k q^{n-k}}{q} = \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k}$.

La loi de S_n sachant $(X_1 = 0)$ est une loi $\mathcal{B}(n-1, p)$.

Ex 39 : [Mines] On note Z une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n -ième de l'unité, suivant une loi uniforme.

1. Calculer $E(\arg(Z))$, $E(\Re(Z))$, $E(\Im(Z))$, $Cov(\Re(Z), \Im(Z))$.
2. $\Re(Z)$ et $\Im(Z)$ sont-elles indépendantes ?

Correction : On exclut le cas $n = 1$ qui est trivial.

1. On a $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$.

Grâce à la formule de transfert, on a :

$$E(\arg(Z)) = \sum_{k=0}^{n-1} \arg(e^{\frac{2ik\pi}{n}}) P(Z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k\pi}{n} = \frac{n(n+1)\pi}{n^2} = \boxed{\frac{(n+1)\pi}{n}}.$$

On a : $\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$ et donc en passant à la partie réelle et imaginaire, $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$ et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$

La formule de transfert nous donne donc : $\boxed{E(\Re(Z)) = E(\Im(Z)) = 0}$.

On a : $Cov(\Re(Z), \Im(Z)) = E(\Re(Z) \cdot \Im(Z)) - E(\Re(Z)) \cdot E(\Im(Z)) = E(\Re(Z) \cdot \Im(Z))$.

La formule de transfert nous dit que : $E(\Re(Z) \cdot \Im(Z)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) =$

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2n} \Im\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{4ik\pi}{n}}\right) = \frac{1}{2n} \Im\left(\frac{1 - e^{\frac{4in\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{4i\pi}{n}}}\right) = 0, \text{ si } n \neq 2.$$

Si $n = 2$, Z est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et $\Re(Z) \cdot \Im(Z) = 0$.

Dans tous les cas, $\boxed{Cov(\Re(Z), \Im(Z)) = 0}$.

2. Pour $n \geq 3$. $P((\Re(Z) = 1) \cap (\Im(Z) > 0)) = 0$, car dans $\mathbb{U}_n$ un élément a une partie réelle qui vaut 1 ou -1 ssi sa partie imaginaire est nulle. Or $P(\Re(Z) = 1) > 0$, car 1 est dans $\mathbb{U}_n$ et $P(\Im(Z) > 0) > 0$, car il y a des éléments de $\mathbb{U}_n$ qui ne sont pas réels. Ainsi $P((\Re(Z) = 1) \cap (\Im(Z) > 0)) \neq P(\Re(Z) = 1) \cdot P(\Im(Z) > 0)$,

$\Re(Z)$ et $\Im(Z)$ ne sont pas indépendantes si $n \geq 3$

Pour $n = 2$, Z suit une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et donc $\Re(Z)$ aussi et $\Im(Z)$ est la variable aléatoire nulle. Pour $\epsilon \in \{-1, 1\}$, on a : $P((\Re(Z) = \epsilon) \cap (\Im(Z) = 0)) = P(\Re(Z) = \epsilon) = P(\Re(Z) = \epsilon) \times 1 = P(\Re(Z) = \epsilon) \times P(\Im(Z) = 0)$.

$\Re(Z)$ et $\Im(Z)$ sont indépendantes si $n = 2$

Ex 40 : [Mines] Une urne contient n boules identiques numérotées de 1 à n . On effectue des tirages. Après chaque tirage, on enlève les boules qui ont un numéro supérieur ou égal à celui de la boule tirée. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

1. Calculer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que $E(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} E(X_k)$.
3. Donner une expression de $E(X_n)$.

Correction :

1. La variable aléatoire X_1 est constante et vaut 1, donc son espérance vaut 1. Pour X_2 , on note que $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$. L'événement $\{X_2 = 1\}$ correspond au tirage de la boule numéro 1 qui a lieu avec probabilité $\frac{1}{2}$, et l'événement contraire correspond au cas où on tire la boule 2 au premier tirage, puis nécessairement la 1 au second.

En conclusion, $E(X_2) = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

2. Soit $n \geq 2$, notons que $X_n(\Omega) = \{1, \dots, n\}$.

On conditionne suivant le tirage de la première boule en notant $\{B_1 = j\}$ l'événement : on tire la boule numéro j au premier tirage. Si $\{B_1 = 1\}$, l'urne est vide après le premier tirage. On écrit ensuite pour $k \in \{1, \dots, n\}$

$$P(X_n = k) = \sum_{j=1}^n P(X_n = k | B_1 = j) P(B_1 = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(X_n = k | B_1 = j)$$

où l'on retrouve bien $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$.

Enfin, si $\{B_1 = j\}$ est réalisé, on se retrouve dans la situation où l'urne contient les boules d'indice inférieur strictement à j au second tirage, ce qui donne $P(X_n = k | B_1 = j) = P(X_{j-1} = k-1)$, en remarquant également que si $j < k$ alors $P(X_n = k | B_1 = j) = 0$ car l'urne sera nécessairement vidée en strictement moins de j tirages, auquel cas la probabilité conditionnelle est nulle.

On calcule maintenant $E(X_n)$: on note X_0 la variable aléatoire correspondant à l'urne vide, qui

est vidée en 0 tirages avec probabilité 1 et d'espérance nulle, ce qui donne

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{k=1}^n kP(X_n = k) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n kP(X_n = k | B_1 = j) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n kP(X_n = k | B_1 = j) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n kP(X_{j-1} = k - 1) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^n kP(X_j = k - 1) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^n (k - 1 + 1)P(X_j = k - 1) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{l=0}^{n-1} lP(X_j = l) + \sum_{k=1}^n P(X_j = k - 1) \right] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[E(X_j) + \sum_{k=1}^n P(X_j = k - 1) \right] \\
&= 1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} E(X_j)
\end{aligned}$$

car $\sum_{k=1}^n P(X_j = k - 1) = 1$, ce qui donne bien la formule attendue.

3. Notons $u_n = E(X_n)$. La relation de la question précédente au rang $n + 1$ s'écrit $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n u_k$. On écrit la relation précédente sous la forme $\sum_{k=1}^{n-1} u_k = n(u_n - 1)$, ce qui donne en réinjectant $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}(u_n + n(u_n - 1))$, ce qui se simplifie en $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$. On montre par récurrence que : $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + u_1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Ex 41 : [Mines] Montrer, en utilisant une variable aléatoire, l'inégalité $\frac{n-1}{n} 2^{4n} \leq \sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k}$.

Correction : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(4n, 1/2)$ On rappelle que $E(X) = 2n$ et $V(X) = 4n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = n$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{1}{t^2} V(X)$ c'est-à-dire pour $t = n$, $P(|X - 2n| \geq n) \leq \frac{1}{n}$. Or, $\{|X - 2n| \geq n\} = \{X \geq 3n\} \cup \{X \leq n\}$ d'où

$$\sum_{k=n+1}^{3n-1} \frac{1}{2^{4n}} \binom{4n}{k} = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{4n}} \binom{4n}{k} - \sum_{k=3n}^{4n} \frac{1}{2^{4n}} \binom{4n}{k} \geq 1 - \frac{1}{n}$$

ce qui donne bien le résultat après division par 2^{4n} .