1 Rappels de sup sur l'analyse asymptotique

1.1 Relations de comparaison

Définition 1.1.1 ($o, O, \sim$) *Soient f et g deux fonctions. On dit que f est :*

1. ***dominée*** *par g au voisinage de a, lorsque le quotient $\dfrac{f}{g}$ est borné sur un voisinage de a ou :*
$\exists K \in \mathbb{R}_+, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I,\ |f(x)| \leq K|g(x)|$ *. On note $f = O_a(g)$;*
2. ***négligeable*** *devant g au voisinage de a, lorsque $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ ou :*
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I,\ |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$*. On note $f = o_a(g)$.*
3. ***équivalente*** *à g au voisinage de a, lorsque $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ ou :*
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I,\ |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$*. On note $f \sim_a g$,*

Remarque 1.1.1
1. *On a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow f = o_a(1)$ car $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ revient à avoir $\lim\limits_{x \to a} f(x)/1 = 0$.*
Plus généralement, on a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow f = \ell + o_a(1)$. En effet on a $f - \ell = o_a(1)$.
2. *Soient f et g deux fonctions réelles. Alors : $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + o_a(g) \Leftrightarrow f - g = o_a(g)$.*
Par conséquent si $f = g + h$ avec $h = o_a(g)$, alors on a : $f \sim_a g$.

Voici quelques relations de comparaisons classiques

Proposition 1.1.1 (Croissance comparée) *Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ et $r > 1$. Alors :*

1. $(\ln x)^\beta = \underset{x \to +\infty}{o}(x^\alpha)$*, soit* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ *;*
2. $|\ln x|^\beta = \underset{x \to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$*, soit* $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$ *;*
3. $x^\alpha = \underset{x \to +\infty}{o}\left(e^{\beta x}\right)$*, soit* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$ *;*
4. $e^{\beta x} = \underset{x \to -\infty}{o}\left(\dfrac{1}{|x|^\alpha}\right)$*, soit* $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0$ *;*
5. $x^\alpha = \underset{x \to +\infty}{o}(x^\beta)$ *si et seulement si : $\alpha < \beta$ et aussi $x^\alpha = o_{0^+}(x^\beta)$ si et seulement si : $\alpha > \beta$.*
6. *Pour $P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + ... + a_d x^d$ avec $p \geq d$, a_d et a_p dans $\mathbb{C}^*$ et $a_{p-1}, ..., a_{d+1}$ dans $\mathbb{C}$, on a $P(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_d x^d$ et $P(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_p x^p$.*
7. *Pour $P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + ... + a_d x^d$ avec $p \geq d$, a_d et a_p dans $\mathbb{C}^*$ et $a_{p-1}, ..., a_{d+1}$ dans $\mathbb{C}$, on a $P(x) = \underset{x \to 0}{o}(|x|^\alpha)$ pour $\alpha < d$,$P(x) = \underset{x \to \pm\infty}{o}(|x|^\alpha)$ pour $\alpha > p$.*

Proposition 1.1.2 (Équivalents classiques) *Soit u une fonction réelle telle que $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$. Alors :*

- $e^{u(x)} - 1 \sim_a u(x)$; • $\ln(1 + u(x)) \sim_a u(x)$; • $(1 + u(x))^\alpha - 1 \sim_a \alpha u(x)$;
- $\sin(u(x)) \sim_a u(x)$; • $\tan(u(x)) \sim_a u(x)$; • $1 - \cos(u(x)) \sim_a \dfrac{u^2(x)}{2}$;
- $\operatorname{sh}(u(x)) \sim_a u(x)$; • $\arcsin(u(x)) \sim_a u(x)$; • $\arctan(u(x)) \sim_a u(x)$.

Proposition 1.1.3 (Opérations sur $o, O, \sim$) *Soient f, g, h et k quatre fonctions complexes et λ un complexe non nul.*

1. $[f(x) = O_a(h(x))$ *et* $g(x) = O_a(h(x))] \Longrightarrow [f(x) + g(x) = O_a(h(x))]$.
2. $f(x) = O_a(g(x)) \Longrightarrow f(x)h(x) = O_a(g(x)h(x))$.
3. $f(x) = O_a(g(x)) \Longleftrightarrow |f(x)| = O_a(|g(x)|)$.
4. $[f(x) = o_a(g(x))$ *et* $g(x) = o_a(h(x))] \Longrightarrow [f(x) + g(x) = o_a(h(x))]$.
5. $f(x) = o_a(g(x)) \Longrightarrow f(x)h(x) = o_a(g(x)h(x))$.
6. $f(x) = o_a(g(x)) \Longleftrightarrow |f(x)| = o_a(|g(x)|)$.
7. $f(x) = o_a(g(x)) \Longrightarrow \lambda f(x) = o_a(\lambda g(x))$.
8. $[f(x) \sim_a h(x)$ *et* $g(x) \sim_a k(x)] \Longrightarrow \left[f(x)g(x) \sim_a h(x)k(x) \text{ et } \dfrac{f(x)}{g(x)} \sim_a \dfrac{h(x)}{k(x)}\right]$.
9. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. On suppose f et g à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ au voisinage de a.*
   Ainsi : $f(x) \sim_a g(x) \Longrightarrow f(x)^\alpha \sim_a g(x)^\alpha$.
10. $f(x) \sim_a g(x) \Longrightarrow |f(x)| \sim_a |g(x)|$.

Remarque 1.1.2
1. *On n'écrit jamais $f \sim_a 0$.*
2. *Vous prendrez garde à ne pas inventer d'autres opérations !*
   (a) *Pour l'élévation d'un équivalent à une puissance α, celle-ci doit être* **CONSTANTE** *: par exemple, $e^x \sim_0 1$ mais on a : $(e^x)^{1/x} \nsim_0 \underbrace{1^{1/x}}_{=1}$ puisque $(e^x)^{1/x} = e$;*
   (b) *De même, on ne peut ni sommer ni soustraire des équivalents. Par exemple $x^3 + x \sim_{+\infty} x^3$ et $-x^3 \sim_{+\infty} -x^3 + x^2$ mais $x = x^3 + x - x^3 \nsim_{+\infty} \underbrace{x^3 - x^3 + x^2}_{=x^2}$;*
   (c) *Enfin, nous ne pouvons pas composer les équivalents par une fonction. Par exemple $x + 1 \sim_{+\infty} x$, mais $e^{x+1} = ee^x \nsim_{+\infty} e^x$ (le quotient tend vers $e \neq 1$).*

Proposition 1.1.4 (Signe de deux fonctions équivalentes) *Soient f et g deux fonctions réelles. Si on a : $f \sim_a g$, alors f et g sont de même signe au voisinage de a.*

Proposition 1.1.5 (Limites et équivalents)
1. *Si $f(x) \sim_a g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$;*
2. *Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ avec $l \neq 0$, alors $f(x) \sim_a l$.*

Exemple 1.1.1
1. $\lfloor x \rfloor \sim_{+\infty} x$, *car*

2. $\operatorname{Arccos}(x) \underset{x \to 1^-}{\sim}$

3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ décroissante, telle que $f(x) + f(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Déterminer un équivalent de f.*

1.2 Développements limités

1.2.1 Généralités

Définition 1.2.1 (Développement limité) *Soit $f : I \mapsto \mathbb{C}$. Soit a dans I ou borne de I. On dit que f a un développement limité en a (en abrégé $DL_n(a)$) s'il existe des nombres complexes $a_0, ..., a_n$ tels que :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o_{x\to a}((x-a)^n) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + o_{x\to a}((x-a)^n).$$

Remarque 1.2.1

1. *(IMPORTANT) Si $f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k(x-a)^k + o_{x\to a}((x-a)^n)$ avec a_p non nul, alors $f(x) \sim_{x\to a} a_p(x-a)^p$.*
2. *Grâce aux opérations sur les o, si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o_{x\to a}((x-a)^n)$, alors pour tout l de $\mathbb{N}$:*
$$(x-a)^l f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^{k+l} + o_{x\to a}((x-a)^{n+l}) \text{ et } \frac{f(x)}{(x-a)^l} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^{k-l} + o_{x\to a}((x-a)^{n-l}).$$
3. *(IMPORTANT) Il y a unicité du développement limité.*

Proposition 1.2.1 (Formule de Taylor-Young) *Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^n$. Alors f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{x\to a}((x-a)^n) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_{x\to a}((x-a)^n);$$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{h\to 0}(h^n) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o_{h\to 0}(h^n).$$

Exemple 1.2.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ positive sur $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $g = \sqrt{f}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.2.2 (Développements limités usuels) *Les développements limités ci-dessous sont à considérer au voisinage de 0 (à connaître !!) :*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^3) = x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^4)$$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Proposition 1.2.3 (Primitivation de développement limité) *Soient $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable et $a \in I$. Si f' admet un développement limité à l'ordre n : $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o_{x\to a}((x-a)^n)$, alors f possède un développement limité à l'ordre $n+1$ et $f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o_{x\to a}((x-a)^{n+1})$.*

Exemple 1.2.2 *Donner le développement limité de $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ en 0 à l'ordre 10.*

1.2.2 Opérations sur les développements limités

Nous illustreront ce paragraphe par des exemples.

Exemple 1.2.3 (Développement limité en dehors de 0) *Déterminer le $DL_2(\pi/4)$ de $x \mapsto \cos(x)$.*

On pose $x = \frac{\pi}{4} + h$. *On a :* $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(h) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(h) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(h) - \sin(h)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{h^2}{2} - h + o(h^2)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{h}{\sqrt{2}} - \frac{h^2}{2\sqrt{2}} + o(h^2) =$

$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$, *ne pas développer* $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$.

Exemple 1.2.4 (Somme et produit) *1.* *Déterminer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^x \cos(x)$.*

$$e^x \cos(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) = 1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'un développement limité en 0 de $x \mapsto (e^x - 1)^m$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}k^j = \begin{cases} 0 & si \quad 1 \leq j \leq m-1 \\ m! & si \quad j = m \end{cases}$.

Remarque 1.2.2 *Attention, si on a un $DL_n(a)$ de f et un $DL_m(a)$ de g, alors on ne peut pas récupérer un $DL_{n+m}(a)$ de fg, il manqerait des termes. Il aurait fallu avoir un $DL_{n+m}(a)$ de f et g pour avoir celui de fg à l'ordre $n+m$. Dans l'exemple précédent, si on avait écrit :*
$e^x\cos(x) = (1 + x + x^2/2 + o(x^2))(1 - x^2/2 + o(x^2))$, *en développant* $(1 + x + x^2/2)(1 - x^2/2) = 1 + x - x^3/2 - x^4/4$, *on voit que l'on a perdu un terme d'ordre trois dans la première parenthèse, ce qui ne donne pas le bon résultat final.*

Exemple 1.2.5 (Composition) *Déterminer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \tan(\sin(x))$.*

On rappelle $\tan(h) = h + h^3/3 + o(h^4)$ et donc :

$$\tan(\sin(x)) = \tan\left(\underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{\text{« petit »}} + o(x^4)\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^4) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{3} + o(x^4) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Exemple 1.2.6 (Inverse) *Déterminer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1 + \operatorname{ch}(2x)}$.*

On rappelle que $\dfrac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + h^4 + o(h^4)$, *donc :* $\dfrac{1}{1+\operatorname{ch}(2x)} = \dfrac{1}{1 + 1 + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4)} = \dfrac{1}{2 + 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\underbrace{1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}_{\text{« 1+ petit »}}} =$

$\dfrac{1}{2}\left(1 - \left(x^2 + \dfrac{x^4}{3}\right) + \left(x^2 + \dfrac{x^4}{3}\right)^2 + o(x^4)\right)$, *pas besoin d'aller plus loin, car sinon on commencerait avec du x^6.*

Ainsi : $\dfrac{1}{1+\operatorname{ch}(2x)} = \dfrac{1}{2}\left(1 - x^2 - \dfrac{x^4}{3} + x^4 + o(x^4)\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 - x^2 + \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4)\right).$

Remarque 1.2.3 *Ne pas écrire* $\dfrac{1}{2+h} = \dfrac{1}{1 + (1+h)} = 1 - (1+h) + (1+h)^2 - (1+h)^3 \ldots$, *quand h tend vers 0, car $1 + h$ n'est pas petit étant donné qu'il est voisin de 1.*

Exemple 1.2.7 (Quotient lorsque le dénominateur s'annule en a) *Déterminer le $DL_3(0)$ de* $f : x \mapsto \dfrac{\sin^3(x)}{\operatorname{sh}(x) - x}$.

Remarque 1.2.4 *Pour chercher le développement limité d'un quotient f/g avec $g(0)=0$, on commence par faire un développement limité de g qui sera de la forme $b_q x^q + b_{q+1}x^{q+1} + ... + o(x^n)$. On écrit ensuite :* $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)}{b_q x^q} \times \dfrac{1}{1+\frac{b_{q+1}}{b_q}x + ... + o(x^{n-q})}$*, puis on effectue le développement limité de* $\dfrac{f(x)}{b_q x^q}$ *et de l'inverse* $\dfrac{1}{1+\frac{b_{q+1}}{b_q}x + ... + o(x^{n-q})}$ *puis on multiplie les résultats.*

1.2.3 Quelques applications des développements limités

« Définition » : un développement asymptotique d'une fonction f au voisinage de a est une relation de la forme : $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_p(x) + o_a(f_p(x))$, avec f_1, f_2 ,...,f_p des fonctions de plus en plus petites au voisinage de a, c'est-à-dire : $\forall i \in [\![1, p-1]\!],\ f_{i+1}(x) = o(f_i(x))$.

Exemple 1.2.8 *Donner un développement asymptotique à la précision $1/n^2$ de* $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$.

Remarque 1.2.5 *Les calculs précédents permettent de montrer que e est irrationnel. En effet, si* $e = \dfrac{p}{q}$*, avec p et q dans $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux, on a :* $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$*, puis :* $pq! = qq!e = \underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{qq!}{k!}}_{\in\mathbb{N}} + q(u_q - 1)$.

Or : $0 < u_q - 1 = \dfrac{1}{q+1} + \dfrac{1}{(q+1)(q+2)} + \dfrac{1}{(q+1)(q+2)^2} = \dfrac{1}{q+1} \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{q+1}\right)^3}{1-\frac{1}{q+1}} < \dfrac{1}{q}$*, puis cela contredit le fait d'avoir $q(u_q - 1)$ dans $\mathbb{Z}$.*

Les développements limités ou asymptotiques permettent aussi de rechercher des équivalents ou des limites, grâce à la remarque 1.2.1 et la proposition 1.1.5

Exemple 1.2.9 *Déterminer un équivalent en 0 par valeurs supérieures de* $f(x) = x^{\operatorname{sh}(x)} - \operatorname{sh}(x)^x$.

2 Intégrales généralisées

2.1 Rappels de sup sur la primitivation d'une fonction continue

Proposition 2.1.1 (Primitive d'une fonction continue) *Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Pour tout $x \in I$, on pose $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Alors, F_a est l'unique primitive ($F_a' = f$) de f s'annulant en a. Ainsi toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.*

Remarque 2.1.1 *1. F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*

2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, pour x dans $\mathbb{R}$. On a : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} =$

Exemple 2.1.1 *1. Étudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\, dt$*

On rappelle que $\operatorname{Arccos} + \operatorname{Arcsin} = \dfrac{\pi}{2}$ (remarquer que $\operatorname{Arccos}' + \operatorname{Arcsin}' = 0$)

*2. **(Lemme de Gronwall)** Soit $c \in \mathbb{R}$, u et v deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, avec u à valeurs dans $\mathbb{R}$ et v à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) \leq c + \displaystyle\int_0^x u(t)v(t)dt$ $(*)$.*

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) \leq c \exp\left(\displaystyle\int_0^x v(t)dt\right)$.

2.2 Définitions et exemples des intégrales généralisées

On notera $\mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Définition 2.2.1 (Intégrales impropres) *1.* ***Cas d'un intervalle semi-ouvert***

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et a et b sont deux réels avec $a<b$. Soit $f\in\mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{K})$.

- *Si $I=[a,+\infty[$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si $x\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Dans ce cas on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ cette limite.*
- *Si $I=[a,b[$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si $x\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers b. Dans ce cas on note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ cette limite.*
- *Si $I=]-\infty,b]$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)dt$ converge si $x\mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$. Dans ce cas on note $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)dt$ cette limite.*
- *Si $I=]a,b]$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si $x\mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers a. Dans ce cas on note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ cette limite.*

2. ***Cas d'un intervalle ouvert***

$I=]a,b[$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et a et b vérifient $-\infty\le a\le b\le+\infty$ (ici on peut éventuellement avoir $a=-\infty$ et $b=+\infty$). Soit $f\in\mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{K})$. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge s'il existe c dans $]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ soient convergentes. Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)dt=\int_a^c f(t)dt+\int_c^b f(t)dt$.

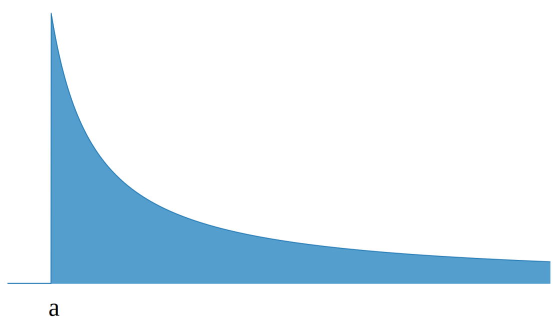
Les intégrales de cette définition sont appelées intégrales généralisées ou impropres.

Dans tous les cas si l'intégrale ne converge pas, elle est dite divergente.

Remarque 2.2.1 *1. Si F est une primitive de f sur $[a,b[$ (respectivement sur $]a,b]$), la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ équivaut à l'existence d'une limite finie pour F en b, avec b dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ (respectivement en a, avec a dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$). Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt=\lim_{x\to b^-}F(x)-F(a)$ (respectivement $\displaystyle\int_a^b f(t)dt=F(b)-\lim_{x\to a^+}F(x)$).*

Si F est une primitive de f sur $]a,b[$, la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ équivaut à l'existence de limites finies pour F en a et en b. Si tel est le cas, on a alors $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$.

2. *Si f est définie sur $]a,b[$ et que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors $\int_x^{x'} f(t)dt$ tend vers $\int_a^b f(t)dt$, quand on fait tendre x vers a puis x' vers b ou l'inverse.*
3. *La formulation « l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge » pose problème (on écrit une intégrale qui ne converge pas) mais on ne fait pas mieux... Evitez absolument l'usage de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ dans tout calcul avant d'avoir justifié son existence. On verra plus tard des théorèmes pour justifier la convergence d'une intégrale.*
4. *Étudier la nature d'une intégrale consiste à déterminer si elle converge ou non. Ceci est à bien différencier du calcul de sa valeur.*
5. *Dans les cas où $I =]a,b[$, il faut bien voir qu'il y a deux difficultés pour la convergence de l'intégrale, une au voisinage de a et l'autre au voisinage de b, d'où la nécessité d'étudier séparément ces deux difficultés en étudiant $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$. Ainsi pour étudier une intégrale impropre, il faudra bien regarder au niveau de quelles bornes il y a une difficulté.*
6. *ATTENTION, contrairement aux séries, la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ n'entraîne pas $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, tout comme la convergence de $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ n'entraîne pas $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Contrexemple : voir l'exemple 3.1.1*
7. *(IMPORTANT) Comme dans le cas de l'intégrale sur un segment, la valeur de l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ (en cas de convergence), avec a réel, peut être vue comme l'aire algébrique du domaine plan situé entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f, à droite de la droite verticale d'équation $x = a$. On peut généraliser cela aux autres cas.*



Exemple 2.2.1 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, décroissante, positive et telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.*

Proposition 2.2.1 (Invariance du problème aux bornes d'un intervalle) • *Soient f définie et continue par morceaux sur un intervalle $I = [a, b[$ et $c \in]a, b[$. Les intégrales $\int_c^b f(t)dt$ et $\int_a^b f(t)dt$ sont alors de même nature. Si elles convergent, alors on a*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

- *Soient f définie et continue par morceaux sur un intervalle $I =]a, b]$ et $c \in]a, b[$. Les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^c f(t)dt$ sont alors de même nature. Si elles convergent, alors on a*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Démonstration : Démontrons uniquement le premier point, le second se fait de la même manière. Pour tout x dans $[a, b[$, la relation de Chasles pour les intégrales sur un segment donne $\int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt$. Il est alors clair que si $x \longmapsto \int_c^x f(t)dt$ a une limite, alors $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ également, et réciproquement. Un passage à la limite quand x tend vers b donne alors directement : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Remarque 2.2.2 *Cette proposition montre par exemple que si f est définie et continue par morceaux sur un intervalle $I = [a, b[$, l'étude de la difficulté se situe au voisinage de b, pas besoin de regarder ce qui se passe au voisinage de a.*

Corollaire 2.2.1 (Invariance du problème pour un intervalle ouvert) *Soient f définie et continue par morceaux sur un intervalle $I =]a, b[$ et $c \in]a, b[$. La nature de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ et sa valeur sont indépendantes du choix de c si on se réfère à la définition 2.2.1 2).*

Démonstration : Soit $c' \in]a, b[$. Nous avons vu dans la proposition précédente que $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_a^{c'} f(t)dt$ sont de même nature tout comme $\int_c^b f(t)dt$ et $\int_{c'}^b f(t)dt$. Ainsi la nature de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est indépendante du choix de c. De plus en cas de convergence, nous avons : $\int_a^c f(t)dt = \int_a^{c'} f(t)dt + \int_{c'}^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt = \int_c^{c'} f(t)dt + \int_{c'}^b f(t)dt$. Par conséquent, nous avons : $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^{c'} f(t)dt + \int_{c'}^c f(t)dt + \int_c^{c'} f(t)dt + \int_{c'}^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$. Ainsi la valeur de $\int_a^b f(t)dt$ est indépendante du choix de c.

Exemple 2.2.2 *Étudier la convergence et calculer les intégrales ci-dessous lorsque cela est possible.*

1. $\int_1^{+\infty} \frac{2t+2}{t^4 + 2t^3 + 2t^2} dt$.

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan(t)}}dt$.

Proposition 2.2.2 (Intégrale impropre d'une fonction prolongeable par continuité) *Soit f définie et continue par morceaux sur un intervalle $I = [a, b[$ avec $a < b$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite finie en b et que $\hat{f}$, le prolongement par continuité de f en b est encore continue par morceaux sur $[a, b]$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge et dans ce cas $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \hat{f}(t)dt$.*
On a le même type de résultats sur $]a, b]$ ou $]a, b[$, lorsqu'il est possible de prolonger f par continuité aux bornes de ces intervalles.

Démonstration : La fonction $\hat{f}$ est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, donc la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x \hat{f}(t)dt$ est alors définie sur $[a, b]$ et admet une limite en b par valeurs inférieures. En effet, si on note $\sigma = (c_j)_{0 \le j \le n}$ une subdivision adaptée à $\hat{f}$, alors pour x dans $[c_{n-1}, b]$, on a par la relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^x \hat{f}(t)dt = \int_a^{c_{n-1}} \hat{f}(t)dt + \int_{c_{n-1}}^x \hat{f}(t)dt$. Comme $\hat{f}$ est continue sur $[c_{n-1}, b]$, nous pouvons passer à la limite quand x tend vers b et donc : $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x \hat{f}(t)dt = \int_a^{c_{n-1}} \hat{f}(t)dt + \int_{c_{n-1}}^b \hat{f}(t)dt$. Le membre de gauche étant la définition de $\displaystyle\int_a^b \hat{f}(t)dt$ et donc : $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x \hat{f}(t)dt = \int_a^b \hat{f}(t)dt$. Maintenant nous avons : $\forall x \in [a, b[$, $\displaystyle\int_a^x \hat{f}(t)dt = \int_a^x f(t)dt$, car f et $\hat{f}$ sont égales sur $[a, b[$ et donc :
$\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt = \int_a^b \hat{f}(t)dt$.

Remarque 2.2.3 1. *Si une fonction continue par morceaux est définie sur $[a, b]$, alors les intégrales de f sur $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$ et $[a, b]$ sont égales.*

2. *Si $\displaystyle\lim_{\pm\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$, parler de prolongement par continuité de f en $\pm\infty$ n'a pas de sens !*

Exemple 2.2.3 *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

Remarque 2.2.4 *Attention à ne pas dire que* $\lim\limits_{x\to 1^+}\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln(t)}=\int_1^1\frac{dt}{\ln(t)}=0$*, car la fonction* $t\mapsto\dfrac{1}{\ln(t)}$ *ne se prolonge pas par continuité en* 1*.*

2.3 Exemples de référence (à connaître par coeur)

Proposition 2.3.1 (Intégrales de référence) *Soit* $\alpha\in\mathbb{R}$*.*

1. ***Intégrales de Riemann sur*** $[1,+\infty[$ *:* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si*
2. ***Intégrales de Riemann sur*** $]0,1]$ *:* $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dt}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si*
3. ***Intégrales de Riemann sur*** $]a,b]$**,** $b\in\mathbb{R}$ *:* $\displaystyle\int_a^{b}\frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ *converge si et seulement si*
4. ***Intégrales de Riemann sur*** $[a,b[$**,** $b\in\mathbb{R}$ *:* $\displaystyle\int_a^{b}\frac{dt}{|t-b|^\alpha}$ *converge si et seulement si*
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}dt$ *converge si et seulement si :*

Démonstration :

3. Si $\alpha\neq 1$. Pour $X\in]a,b[$, on a : $\displaystyle\int_X^b\frac{dt}{(t-a)^\alpha}=\int_X^b(t-a)^{-\alpha}dt=\left[\frac{(t-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_X^b=\frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{(X-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ qui admet une limite finie quand X tend vers a si et seulement si $-\alpha+1>0$.
Pour $\alpha=1$, $\displaystyle\int_X^b\frac{dt}{(t-a)}=\ln|b-a|-\ln|X-a|$, qui n'a pas de limite finie quand X tend vers a.
4. Se traite de la même manière et donne la même conclusion, en remarquant que pour $X\in]a,b[$, on a : $\displaystyle\int_a^X\frac{dt}{|t-b|^\alpha}=\int_a^X\frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ qui vaut : $\left[-\dfrac{(b-t)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^X=-\dfrac{(b-X)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}+\dfrac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ si α est différent de 1 et pour $\alpha=1$, cette intégrale vaut : $-\ln|b-X|+\ln|b-a|$.
5. Le cas $\alpha=0$ correspond à la constante 1 qui a été traité dans le premier cas ($\alpha=0$ aussi) et dans ce cas l'intégrale diverge.
Pour $\alpha\in\mathbb{R}^*$. On a pour $X\in\mathbb{R}_+^*$: $\displaystyle\int_0^X e^{-\alpha t}dt=\left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^X=\frac{1-e^{-\alpha X}}{\alpha}$ qui a une limite finie quand X tend vers $+\infty$ si et seulement si $\alpha>0$.

Remarque 2.3.1 *1.* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ *ne converge jamais ! (à cause du problème en 0 <u>et</u> en $+\infty$)*

2. ATTENTION : si $\lim_{+\infty} f = 0$, cela n'implique pas que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge, contrexemple :

3. ATTENTION : on peut avoir $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ continue avec $\lim_{0^+} f = \pm\infty$ et en même temps avoir la convergence de $\displaystyle\int_0^1 f$, par exemple :

2.4 Extension des propriétés élémentaires

Proposition 2.4.1 (Linéarité) *Soient f et g continues par morceaux sur I (un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b[$, ou $[a,b[$, ou $]a,b]$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) à valeur dans $\mathbb{K}$ telles que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ convergent.*
Pour tous λ, μ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt$ converge, et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda\int_a^b f(t)dt + \mu\int_a^b g(t)dt.$$

Démonstration : Plaçons nous par exemple dans le cas où $I = [a,b[$.
Par linéarité de l'intégrale pour des fonctions continues par morceaux sur un segment, on a :
$\displaystyle\int_a^x (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda\int_a^x f(t)dt + \mu\int_a^x g(t)dt \underset{x\to b^-}{\to} \lambda\int_a^b f(t)dt + \mu\int_a^b g(t)dt.$
Le cas $I =]a,b]$ se traite de la même manière.
Si $I =]a,b[$, d'après les cas précédents, les intégrales $\displaystyle\int_a^c (\lambda f + \mu g)(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b (\lambda f + \mu g)(t)dt$ convergent et $\displaystyle\int_a^c (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda\int_a^c f(t)dt + \mu\int_a^c g(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda\int_c^b f(t)dt + \mu\int_c^b g(t)dt,$
en additionnant ces relations on a : $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda\int_a^b f(t)dt + \mu\int_a^b g(t)dt.$

Remarque 2.4.1 *Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge, alors nécessairement $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt$ diverge (sinon $g = (f+g) - f$ serait combinaison de deux fonctions dont les intégrales convergent)*
Attention, on peut avoir $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt$ convergente sans que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ni $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ convergent.
NE PAS INVENTER DES PROPRIÉTÉS SUR LES INTÉGRALES DIVERGENTES

Voici un exemple pour illustrer cela :

Exemple 2.4.1 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+^*$, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^n a_k = 0$. Étduier la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{t+x_k}\right)dt$.*

Remarque 2.4.2 *Ici, si on sépare les intégrales on tombe sur des intégrales divergentes, car* $\displaystyle\int_0^X \frac{dt}{t+x_k} = \ln(X+x_k) - \ln(x_k)$.

Proposition 2.4.2 (Parties réelles et imaginaires d'intégrales) *Soit f continue par morceaux sur I (un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b[$, ou $[a,b[$, ou $]a,b]$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) à valeur dans $\mathbb{C}$.*
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^b Re(f)(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b Im(f)(t)dt$ convergent.
Si tel est le cas, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Re(f)(t)dt + i\int_a^b Im(f)(t)dt$.
De plus, $\displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}dt$ converge alors et $\displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}dt = \overline{\int_a^b f(t)dt}$.

Démonstration : Plaçons nous par exemple dans le cas où $I = [a,b[$. On a pour tout x de $[a,b[$:

$$(*) \quad \int_a^x f(t)dt = \int_a^x Re(f)(t)dt + i\int_a^x Im(f)(t)dt.$$

La fonction complexe $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ converge quand x tend vers b si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent quand x tend vers b. On nous avons : $Re\left(\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right) = \int_a^x Re(f)(t)dt$ et $Im\left(\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right) = \int_a^x Im(f)(t)dt$, ce qui donne le premier résultat.
Le deuxième résultat vient du passage à la limite dans $(*)$ quand x tend vers b.
Pour le dernier résultat, le passage au conjugué dans $(*)$ donne :
$\displaystyle\overline{\int_a^x f(t)dt} = \int_a^x Re(f)(t)dt - i\int_a^x Im(f)(t)dt = \int_a^x \overline{f(t)}dt$ et ensuite on fait tendre x vers b.

Exemple 2.4.2 *Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{at}\cos(t)dt$ pour a dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 2.4.3 (Relation de Chasles) *Soit f continue par morceaux sur I (un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b[$, ou $[a,b[$, ou $]a,b]$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) à valeur dans $\mathbb{K}$ telles que $\int_a^b f(t)dt$ converge. Soit $c \in]a,b[$. Alors $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent et*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Démonstration : Vient de la démonstration du corollaire 2.2.1 pour un intervalle ouvert et faire intervenir la remarque 2.2.3 si l'intervalle n'est pas ouvert.

Exemple 2.4.3 ***(Intégrale de Frullani)*** *Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{+\infty} f = L \in \mathbb{R}$. Pour $0 < a < b$, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = L \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \int_a^b f$.*

Remarque 2.4.3 *Avec les mêmes hypothèses, on montre que : $\int_0^{+\infty} [f(b+x) - f(a+x)]dx = (b-a)L - \int_a^b f$, en écrivant que $\int_0^X [f(b+x) - f(a+x)]dx = \int_0^X f(b+x)dx - \int_0^X f(a+x)dx = \int_b^{b+X} f - \int_a^{a+X} f = \int_{a+X}^{b+X} f - \int_a^b f$ et en concluant de manière similaire.*

Corollaire 2.4.1 (Primitive de limite nulle en $+\infty$) *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,+\infty[,\mathbb{K})$ telle que $\int_a^{+\infty} f$ converge. La fonction $G : x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et : $\forall x \in [a,+\infty[,\ G'(x) =$*

Démonstration : On a : $\forall x \in [a,+\infty[,\ G(x) = \int_x^a f + \int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f - \int_a^x f$. Or $\int_a^{+\infty} f$ est une constante et $x \mapsto \int_a^x f$ est une primitive de f (qui est continue sur $[a,+\infty[$), donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et donc G aussi par opérations et : $\forall x \in [a,+\infty[,\ G'(x) = -f(x)$.

Remarque 2.4.4
1. *(IMPORTANT) Si* $\int_a^b f(t)dt$ *converge, avec* $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{K})$*, alors* $\lim\limits_{x\to b^-} \int_x^b f(t)dt = \qquad$ *, car :*
$$\int_x^b f(t)dt = \int_x^a f(t)dt + \int_a^b f(t)dt = -\int_a^x f(t)dt + \int_a^b f(t)dt \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} -\int_a^b f(t)dt + \int_a^b f(t)dt = 0.$$
2. *Grâce à ce qui précède :* $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$.
$-G$ *est donc* <u>*la*</u> *primitive de* f *ayant une limite nulle en* $+\infty$*. En effet, si on se donne une autre primitive* F *de* f *de limite nulle en* $+\infty$*, on a :* $(F+G)' = f - f = 0$*, donc il existe* $c \in \mathbb{K}$ *tel que* $F + G = c$ *et donc* $c = \lim\limits_{x\to+\infty} (F(x)+G(x)) = 0$*, donc* $F = -G$.

Proposition 2.4.4 (Positivité et croissance de l'intégrale) *Soient* f *et* g *continues par morceaux sur* I *(un intervalle de* $\mathbb{R}$ *de la forme* $]a,b[$*, ou* $[a,b[$*, ou* $]a,b]$*, avec* $-\infty \le a < b \le +\infty$*) à valeur dans* $\mathbb{R}$ *telles que les intégrales* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b g(t)dt$ *convergent.*

1. *Si* f *est à valeurs positives, alors :* $\int_a^b f(t)dt \ge 0$.
2. *Si on a :* $\forall t \in I,\ g(t) \le f(t)$*, alors :* $\int_a^b g(t)dt \le \int_a^b f(t)dt$.

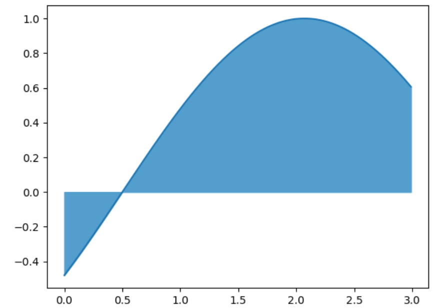
Démonstration :
1. Il suffit de traiter le cas où I est semi-ouvert, par exemple $I =]a,b]$. Soit $x \in]a,b]$. On a : $\int_x^b f(t)dt \ge 0$, car f est positive sur le segment $[x,b]$. Ensuite en passant à la limite quand x tend vers a, on a : $\int_a^b f(t)dt \ge 0$.
2. Par linéarité : $\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt = \int_a^b (f-g)(t)dt \ge 0$, car $f - g$ est positive sur I.

Proposition 2.4.5 (Intégrale nulle d'une fonction positive et continue) *Soit* f *une fonction* I *(un intervalle de* $\mathbb{R}$ *de la forme* $]a,b[$*, ou* $[a,b[$*, ou* $]a,b]$*, avec* $-\infty \le a < b \le +\infty$*) . Si* $\int_a^b f(t)dt$ *converge et* $\int_a^b f(t)dt = 0$*, alors* f *est la fonction nulle sur* I*.*

Démonstration :
Soit $x \in]a,b[$. Il existe c, d dans $\mathbb{R}$ tels que : $x \in [c,d] \subset]a,b[$. Comme f est positive, on a : $0 \le \int_c^d f \le \int_a^b f = 0$. Ainsi f est continue et positive sur le segment $[c,d]$ et on a : $\int_c^d f = 0$ et donc f est nulle sur $[c,d]$ et donc $f(x) = 0$. Ainsi f est nulle sur $]a,b[$. Par continuité f est alors nulle sur I.

Remarque 2.4.5
1. *La contraposée de la proposition précédente nous dit que si* f *est continue, positive et non nulle, alors :* $\int_a^b f(t)dt > 0$.

2. *Attention, si on a* $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$, *on n'a pas forcément* f *positive.*



3. *La proposition précédente est fausse pour une fonction continue par morceaux. En effet pour* f *qui vaut zéro sur* $\mathbb{R} - \{1\}$ *et* $f(1) = 7$, *on a* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$ *et* $f \neq 0$.

4. *On a le même type de résultat pour une fonction négative.*

Exemple 2.4.4 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *continue. Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir* $\displaystyle\int_a^b |f| = \left|\int_a^b f\right|$.

3 Étude de la convergence d'une intégrale et convergence absolue

3.1 Convergence de l'intégrale d'une fonction positive

Nous allons donner des théorèmes qui permettront de déterminer si une intégrale converge ou non, sans avoir besoin d'expliciter de primitives et sans essayer de calculer l'intégrale elle-même.

Proposition 3.1.1 (Intégrabilité d'une fonction positive) 1. *Soit* f *continue par morceaux sur* $[a, b[$, *où* $-\infty < a < b \leq +\infty$ *et à valeurs réelles* *positives.*

La fonction $F : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array} \right.$ *est croissante et l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est alors convergente si et seulement si*

Si tel est le cas : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} F(x)$, *sinon* $\displaystyle\lim_{x \to b^-} F(x) = +\infty$ *et on note* $\displaystyle\int_a^b f = +\infty$.

2. *Soit f continue par morceaux sur $]a,b]$, où $-\infty \leq a < b < +\infty$ et à valeurs réelles positives.*
La fonction $F : \left\{ \begin{array}{ccc}]a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)dt \end{array} \right.$ *est décroissante et l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est alors convergente si et seulement si*
Si tel est le cas : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} F(x)$, *sinon* $\displaystyle\lim_{x \to a^+} F(x) = +\infty$ *et on note* $\displaystyle\int_a^b f = +\infty$.

Démonstration :

Exemple 3.1.1 1. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in \left[n - \dfrac{1}{2n^2}, n + \dfrac{1}{2n^2}\right] \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$. *Montrer que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *converge et déterminer sa valeur. Que dire de* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *?*

2. *Soit $f \in \mathcal{C}(]0,1], \mathbb{R})$ strictement positive telle que* $\displaystyle\int_0^1 f = +\infty$.

   (a) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique réel u_n dans $]0,1]$ tel que* $\displaystyle\int_{u_n}^1 f = n$.

   (b) *Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Proposition 3.1.2 (Critères de comparaison pour les fonctions positives) *1. Soient f et g continues par morceaux sur $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leq +\infty$ à valeurs réelles positives.*

(a) si $f \leq g$ ou $f(x) = O_{x \to b}(g(x))$ ou $f(x) = o_{x \to b}(g(x))$, alors la convergence de $\displaystyle\int_a^b g$ implique celle de $\displaystyle\int_a^b f$.

(b) si $f \leq g$ ou $f(x) = O_{x \to b}(g(x))$ ou $f(x) = o_{x \to b}(g(x))$, alors la divergence de $\displaystyle\int_a^b f$ implique celle de $\displaystyle\int_a^b g$.

(c) si $f(x) \sim_{x \to b} g(x)$, alors la convergence de $\displaystyle\int_a^b g$ est équivalente à celle de $\displaystyle\int_a^b f$.

2. Pour f et g continue par morceaux sur $]a, b]$, où $-\infty \leq a < b < +\infty$ à valeurs réelles positives, on a les mêmes types de résultats par des comparaisons au voisinage de a.

Démonstration : On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de b.

(a) et (b) • Si $f = O_b(g)$, alors $\left|\dfrac{f}{g}\right| = \dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de b. Il existe donc c dans $[a, b[$ et $K \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : $\forall x \in [c, b[,\ \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq K$, donc : $\forall x \in [c, b[,\ f(x) \leq K g(x)$, puis $\displaystyle\int_c^x f \leq K \int_c^x g$. Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors $x \mapsto \displaystyle\int_c^x f$ est majorée par $K \displaystyle\int_c^b g$, donc $\displaystyle\int_c^b f$ converge (on a une fonction positive), puis $\displaystyle\int_a^b f$ aussi. Si $\displaystyle\int_a^b f$ diverge, alors $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_c^x f = +\infty$, puis $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_c^x g = +\infty$, donc $\displaystyle\int_a^b g$ diverge.

• Si $f = o_b(g)$, alors $f = O_b(g)$ et le résultat découle du point précédent.

(c) Si $f \sim_b g$, alors $\displaystyle\lim_{b^-} \frac{f}{g} = \lim_{b^-} \frac{g}{f} = 1$, donc f/g et g/f sont bornées au voisinage de b, donc $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.

Remarque 3.1.1 *1. (IMPORTANT) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue par morceaux et positive.*

(a) S'il existe $k > 0$ tel que $f(t) \sim_{t \to +\infty} \dfrac{k}{t^\alpha}$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$.

(b) S'il existe $\alpha > 1$ telle que $f(t) = o_{t \to +\infty}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$, soit $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

(c) S'il existe $\alpha < 1$ telle que $\dfrac{1}{t^\alpha} = o_{t \to +\infty}(f(t))$, soit $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Ceci s'adapte aux intervalles $[a, b[$ et $]a, b]$ en comparant f respectivement aux fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ au voisinage de b et de a.

2. (IMPORTANT) Les fonctions g avec lesquelles on essaye de comparer f seront en général à prendre parmi les fonctions intervenant dans le paragraphe sur les intégrales de référence.

3. *Cette proposition s'adapte aussi pour les fonctions à valeurs négatives. Plus généralement on a les résultats précédents pour des fonctions de signe constant.*
4. *Pour trouver un équivalent, on pourra se servir d'un développement limité si la fonction f est composée de sommes, car on n'a pas le droit de sommer des équivalents.*
   La recherche d'équivalents est à PRIVILÉGIER.

Exemple 3.1.2 *Étude de la convergence des intégrales suivantes :*

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$, *avec* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$.

2. $\displaystyle\int_0^1 |\ln(t)|^\alpha dt,\ \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}} dx$.

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t^\alpha} dt,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

5. $\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}} dt$, *avec* α *dans* $\mathbb{R}$.

6. *Intégrales de Bertrand au voisinage de* $+\infty$: $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(\ln(x))^\beta}$, *avec* α, β *dans* $\mathbb{R}$.

7. *Intégrales de Bertrand au voisinage de* 0 : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x^\alpha|\ln(x)|^\beta}$, *avec* α, β *dans* $\mathbb{R}$.

Remarque 3.1.2 *(IMPORTANTE) Soit f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ qui est dans $\mathbb{R}^*$. Alors on a : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$.*
En effet, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell$, donc f est de signe constant à partir d'un certain rang c.
Or : $\displaystyle\int_c^X \ell dt = \ell(X-c) \underset{X\to+\infty}{\to} \pm\infty$ (selon le signe de ℓ). Ainsi $\displaystyle\int_c^{+\infty} \ell dt$ diverge, donc $\displaystyle\int_c^{+\infty} f$ aussi, puis $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$.

3.2 Absolue convergence

Définition 3.2.1 (Absolue convergence) *Soit f continue par morceaux sur I (un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b[$, ou $[a,b[$, ou $]a,b]$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) à valeur dans $\mathbb{K}$.*
L'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)dt$ est dite absolument convergente lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(t)|dt$ est convergente.
Dans ce cas, on dit que f est intégrable sur I.

Proposition 3.2.1 (L'absolue convergence implique la convergence et inégalité triangulaire) *Soit f continue par morceaux sur I (un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b[$, ou $[a,b[$, ou $]a,b]$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) à valeur dans $\mathbb{K}$.*
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente, et l'on a : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leq \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$.

Démonstration : La preuve ressemble beaucoup à son analogue pour les séries. Plaçons nous dans le cas $I =]a,b]$.
Dans le cas d'une fonction réelle, on écrit $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = \max(-f,0)$ qui sont encore continues par morceaux (car $f^+ = \dfrac{|f|+f}{2}$ et $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$) et positives. Alors $|f| = f^+ + f^-$ et l'on a $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$. Par comparaison de fonctions positives $\displaystyle\int_a^b f^+$ et $\displaystyle\int_a^b f^-$ convergent. Donc $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge, car on a : $f = f^+ - f^-$ et on utilise la linéarité entre deux fonctions dont l'intégrale existe.
Dans le cas complexe, comme $Re(f)$ et $Im(f)$, vérifient $0 \leq |Re(f)| \leq |f|$ et $0 \leq |Im(f)| \leq |f|$, donc $\displaystyle\int_a^b |Re(f)(t)|dt$ et $\displaystyle\int_a^b |Im(f)(t)|dt$ convergent et donc grâce au premier point que l'on a montré, $\displaystyle\int_a^b Re(f)(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b Im(f)(t)dt$ convergent (absolument). Ainsi $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.
L'inégalité s'obtient alors par passage à la limite quand x tend vers a dans :
$\forall x \in]a,b], \left|\displaystyle\int_x^b f(t)dt\right| \leq \displaystyle\int_x^b |f(t)|dt$.

Proposition 3.2.2 *Soit f <u>continue</u> et intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si* $\displaystyle\int_I |f(t)|dt = 0$, *alors f est nulle sur I.*

Démonstration : $|f|$ est continue et positive et on utilise la proposition 2.4.5.

Proposition 3.2.3 (Critères de comparaison pour l'absolue convergence)

1. *Soient f et g continues par morceaux sur $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leq +\infty$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.*
   (a) *si $|f| \leq |g|$ ou $f(x) = O_{x\to b}(g(x))$ ou $f(x) = o_{x\to b}(g(x))$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique celle de f sur $[a, b[$.*
   (b) *si $|f| \leq |g|$ ou $f(x) = O_{x\to b}(g(x))$ ou $f(x) = o_{x\to b}(g(x))$, alors la non intégrabilité de f sur $[a, b[$ implique celle de g sur $[a, b[$.*
   (c) *si $f(x) \sim_{x\to b} g(x)$, alors l'intégrabilité de f sur $[a, b[$ est équivalente à celle de g sur $[a, b[$.*
2. *Pour f et g continue par morceaux sur $]a, b]$, où $-\infty \leq a < b < +\infty$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, on a le même type de résultats par des comparaisons au voisinage de a.*

Démonstration : Utiliser les critères de comparaison pour les fonctions positives appliqués à $|f|$ et $|g|$.

Remarque 3.2.1

1. *Comme on parle d'intégrabilité, vous pouvez comparer directement $|f|$ et $|g|$ dans la proposition précédente.*
2. *ATTENTION, si f n'est pas intégrable sur I, cela n'implique pas que l'intégrale* $\displaystyle\int_I f$ *diverge. C'est le cas de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ *ci-dessous. Donc il ne faudra pas confondre intégrabilité et convergence de l'intégrale.*
3. *IMPORTANTE, pour une fonction f de signe constant sur un intervalle I, la convergence de* $\displaystyle\int_I f$ *et l'intégrabilité sur I sont équivalentes, car $|f| = f$ ou $|f| = -f$.*
4. *Pour la définition de l'absolue convergence, ne pas confondre* $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ *et* $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right|$.

Exemple 3.2.1 *Étude de la convergence des intégrales suivantes :*

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(z+t)\sqrt{1+t}}$, *avec z dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.*

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}\right) dx$, *avec a, b réels.*

3. $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$, *avec* α *dans* $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 3.2.2 *(a) De la même manière on montre que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{t^\alpha} dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(kt)}{t^\alpha} dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t^\alpha} dt$ *convergent pour* k *réel et* α *dans* $\mathbb{R}_+^*$.

(b) On a ainsi la convergence de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$, *car en* 0, *la fonction* $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ *se prolonge par continuité.*

5. *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *uniformément continue et intégrable. Montrer que :* $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

4 Techniques de calcul

4.1 À l'aide d'une primitive

C'est le cas le plus simple lorsque vous trouvez directement une primitive. Voir les exemples 2.2.2.

4.2 Changement de variable

Proposition 4.2.1 (Changement de variable) *Soit f continue par morceaux sur $]a,b[$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, à valeur dans $\mathbb{K}$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une bijection strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les intégrales $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)du$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ sont de même nature, et en cas de convergence :*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Démonstration : Montrons tout d'abord que $f\circ\varphi$ est continue par morceaux sur $]\alpha,\beta[$. Comme la propriété de la continuité par morceaux se vérifie sur un segment, on peut supposer que l'on travaille sur $[a,b]$ et que $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une bijection strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ (car sur tout segment inclus dans $[a,b]$, φ réalise encore une bijecion strictement croissante).
Soit $a = c_0 < c_1 < ... < c_{n-1} < c_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et on pose $\sigma_k = \varphi^{-1}(c_k)$, pour k dans $[\![0,n]\!]$. Comme φ est strictement croissante, $(\sigma_0,\sigma_1,...,\sigma_n)$ est une subdivision de $[\alpha,\beta]$ et : $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\varphi(]\sigma_k,\sigma_{k+1}[) =]c_k,c_{k+1}[$. On a donc $(f\circ\varphi)|_{]\sigma_k,\sigma_{k+1}[} = (f|_{]c_k,c_{k+1}[})\circ(\varphi|_{]\sigma_k,\sigma_{k+1}[})$, et donc $f\circ\varphi$ est continue sur $]\sigma_k,\sigma_{k+1}[$ par composition. Par continuité de φ, on a $\displaystyle\lim_{\sigma_k^+}\varphi = \varphi(\sigma_k) = c_k$ par valeurs supérieures, par stricte croissance de φ. Comme $\displaystyle\lim_{c_k^+} f$ existe, alors $(f\circ\varphi)$ a une limite finie à droite de σ_k. On a les mêmes résultats pour les limites à gauche.
Soit $c \in]a,b[$. Montrons le résultat du changement de variable sur $[c,b[$ et $]a,c]$. Soient $x \in [c,b[$, puis $c = c_0 < c_1 < ... < c_{n-1} < c_n = x$ une subdivision de $[c,x]$ adaptée à f et on pose $\sigma_k = \varphi^{-1}(c_k)$, pour k dans $[\![0,n]\!]$. La subdivision $(\sigma_0,\sigma_1,...,\sigma_n)$ est adaptée à $f\circ\varphi$ sur $[\varphi^{-1}(c),\varphi^{-1}(x)]$, tout comme pour $(f\circ\varphi)\varphi'$, car φ' est continue sur $[\alpha,\beta]$. Soit f_k le prolongement continue de f sur $[c_k,c_{k+1}]$. On a donc : $\displaystyle\int_c^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{c_k}^{c_{k+1}} f_k(t)dt$ et $\displaystyle\int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(x)} (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)du = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} (f_k\circ\varphi)(u)\varphi'(u)du$.
Grâce à la formule de changement de variable pour une fonction continue sur un segment, on a : $\displaystyle\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} (f_k\circ\varphi)(u)\varphi'(u)du = \int_{\varphi(\sigma_k)}^{\varphi(\sigma_{k+1})} f_k(t)dt = \int_{c_k}^{c_{k+1}} f_k(t)dt$. Par somme on a :
$\displaystyle\int_c^x f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(x)} (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)du$. Comme φ est croissante et bijective, nous avons $\displaystyle\lim_{b^-}\varphi^{-1} = \beta$, puis $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_c^x f(t)dt$ existe si et seulement si $\displaystyle\lim_{y\to\beta^-}\int_{\varphi^{-1}(c)}^{y} (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)du$ et dans ce cas :
$\displaystyle\int_c^b f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\beta} (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)du$. De même $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_\alpha^{\varphi^{-1}(c)} (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)du$ sont de même nature et sont égales en cas de convergence. Dans le cas où $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge, nous avons grâce à la

relation de Chasles : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt =$
$\int_\alpha^{\varphi^{-1}(c)} (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)du + \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\beta} (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)du = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)du.$

Remarque 4.2.1 *1. IMPORTANTE : si φ est strictement décroissante, alors les intégrales $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ et $\int_a^b f(t)dt$ sont de même nature, et : $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_b^a f(t)dt$.*

2. IMPORTANTE : la fonction $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ (resp. $f :]a,b] \to \mathbb{K}$) est intégrable si et seulement si la fonction $t \mapsto f(b-t)$ est intégrable sur $]0, b-a]$ (resp. $t \mapsto f(a+t)$ est intégrable sur $]0, b-a]$) via le changement de variable $u = b-a$ (resp. $u = a+t$).

Exemple 4.2.1 *1. Calcul de $I = \int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos(x)}$.*

2. Étude de la convergence de $\int_0^1 \frac{dt}{(1-\sqrt[3]{t})^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^4}}dx$.

Pour la convergence, on utilise : $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^4}} \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^4}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

4. Convergence et calcul de $D = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt$.

4.3 Intégration par parties

Proposition 4.3.1 (Intégration par parties) *Soient f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b[$, ou $[a,b[$, ou $]a,b]$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) à valeur dans $\mathbb{K}$. Si la fonction $f \times g$ a une limite finie en a et b, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)dt$ sont de même nature. Si ces quantités sont convergentes, alors en notant*

$$[f(t)g(t)]_a^b = \lim_{x\to b^-}(f(x)g(x)) - \lim_{x\to a^+}(f(x)g(x)),$$

On obtient :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Démonstration : Sur un intervalle de la forme $[a,b[$, si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors pour $x \in [a,b[$ on a $\displaystyle\int_a^x f'(t)g(t)dt = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(t)g'(t)dt$ et l'on peut passer à la limite ensuite : si fg admet une limite finie en b alors $\displaystyle\int_a^x f'(t)g(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^x f(t)g'(t)dt$ convergent ou divergent en même temps quand x tend vers b. En cas de convergence, le passage à la limite donne la formule.

Remarque 4.3.1 1. *Si vous n'êtes pas sûrs immédiatement que $[f(t)g(t)]_a^b$ existe ou qu'au moins une de vos intégrales converge, reprendre la démarche de la preuve en prenant des intégrales sur des segments avec des bornes variables puis passer à la limite en justifiant soigneusement.*

2. *Il est intéressant d'intégrer par parties des intégrales faisant intervenir des fonctions dont les dérivées sont simples comme par exemple* $\ln$, Arcsin, Arctan, ..., *voir le premier exemple ci-dessous.*
3. *Il est parfois utile d'utiliser des intégrations par parties pour avoir des relations de récurrence faisant intervenir des intégrales, voir le deuxième exemple ci-dessous.*

Exemple 4.3.1 1. *Calcul de* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}dx$.

2. *Montrer que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt.$

3. *Pour* n *dans* $\mathbb{N}^*$, *on pose* $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$. *On admet la convergence de* I_n. *Établir une relation entre* I_{n+1} *et* I_n.

4. *Soit* $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ *et on note pose* $M = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$ *(qui existe car* $|f''|$ *est continue sur le segment* $[a,b]$.
Montrer que $\displaystyle\left| \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} M.$

5 Intégration des relations de comparaison

Proposition 5.0.1 (Intégration des relations de comparaison) *Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.*

1. *Soient $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{R})$ positive.*
   (a) *On suppose g intégrable sur $[a,b[$. Si $f(x) = O_{x\to b^-}(g(x))$ (resp. $f(x) = o_{x\to b^-}(g(x))$), alors : $\displaystyle\int_x^b f = O_{x\to b^-}\left(\int_x^b g\right)$ (resp. $\displaystyle\int_x^b f = o_{x\to b^-}\left(\int_x^b g\right)$).*
   (b) *On suppose g non intégrable sur $[a,b[$. Si $f(x) = O_{x\to b^-}(g(x))$ (resp. $f(x) = o_{x\to b^-}(g(x))$), alors : $\displaystyle\int_a^x f = O_{x\to b^-}\left(\int_a^x g\right)$ (resp. $\displaystyle\int_a^x f = o_{x\to b^-}\left(\int_a^x g\right)$).*
2. *Soient $f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a,b[,\mathbb{R})$ positives.*
   (a) *On suppose g intégrable sur $[a,b[$. Si $f(x) \sim_{x\to b^-} g(x)$, alors : $\displaystyle\int_x^b f \sim_{x\to b^-} \int_x^b g$.*
   (b) *On suppose g non intégrable sur $[a,b[$. Si $f(x) \sim_{x\to b^-} g(x)$, alors : $\displaystyle\int_a^x f \sim_{x\to b^-} \int_a^x g$.*
3. *Soient $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a,b],\mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}_{pm}(]a,b],\mathbb{R})$ positive.*
   (a) *On suppose g intégrable sur $]a,b]$. Si $f(x) = O_{x\to a^+}(g(x))$ (resp. $f(x) = o_{x\to a^+}(g(x))$), alors : $\displaystyle\int_a^x f = O_{x\to a^+}\left(\int_a^x g\right)$ (resp. $\displaystyle\int_a^x f = o_{x\to a^+}\left(\int_a^x g\right)$).*
   (b) *On suppose g non intégrable sur $]a,b]$. Si $f(x) = O_{x\to a^+}(g(x))$ (resp. $f(x) = o_{x\to a^+}(g(x))$), alors : $\displaystyle\int_x^b f = O_{x\to a^+}\left(\int_x^b g\right)$ (resp. $\displaystyle\int_x^b f = o_{x\to a^+}\left(\int_x^b g\right)$).*
4. *Soient $f, g \in \mathcal{C}_{pm}(]a,b],\mathbb{R})$ positives.*
   (a) *On suppose g intégrable sur $]a,b]$. Si $f(x) \sim_{x\to a^+} g(x)$, alors : $\displaystyle\int_a^x f \sim_{x\to a^+} \int_a^x g$.*
   (b) *On suppose g non intégrable sur $]a,b]$. Si $f(x) \sim_{x\to a^+} g(x)$, alors : $\displaystyle\int_x^b f \sim_{x\to a^+} \int_x^b g$.*

Démonstration : On supposera g strictement positive, afin de rendre les preuves plus lisibles.

1. (a) • Si $f(x) = O_{x\to b}(g(x))$.

   • Si $f(x) = o_{x\to b}(g(x))$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in [a,b[$ tel que : $\forall t \in [c,b[,\ |f(t)| \leq \varepsilon g(t)$. Soit $x \in [c,b[$ quelconque. On a donc : $\displaystyle\left|\int_x^b f\right| \leq \int_x^b |f| \leq \varepsilon \int_x^b g$, d'où $\displaystyle\int_x^b f = o_{x\to b^-}\left(\int_x^b g\right)$.

   (b) • Si $f(x) = O_{x\to b}(g(x))$. Il existe $K \in \mathbb{R}_+$ et $c \in [a,b[$ tel que : $\forall t \in [c,b[,\ |f(t)| \leq Kg(t)$. Soit $x \in [c,b[$ quelconque. On a donc :
   $\displaystyle\left|\int_a^x f\right| \leq \int_a^x |f| = \int_a^c |f| + \int_c^x |f| \leq \int_a^c |f| + K\int_c^x g \leq \int_a^c |f| + K\int_a^x g$. Comme g et

positive et pas intégrable sur $[a,b[$, alors $\lim_{x\to b^-}\int_a^x g = +\infty$. Pour x suffisamment proche de b, on a $\int_a^x g > 0$ et donc comme $\int_a^c |f|$ est une constante, alors $\lim_{x\to b^-}\frac{\int_a^c |f|}{\int_a^x g} = 0$. Ainsi il existe c_1 tel que $c \leq c_1 < b$ et : $\forall x \in [c_1, b[,\ 0 \leq \frac{\int_a^c |f|}{\int_a^x g} \leq 1$. On a donc : $\forall x \in [c_1, b[,\ \left|\int_a^x f\right| \leq (1+K)\int_a^x g$, donc : $\int_a^x f = O_{x\to b^-}\left(\int_a^x g\right)$.

- Si $f(x) = o_{x\to b^-}(g(x))$.

2.
   (a)

   (b) De même : $\int_a^x f = \int_a^x g + o_{x\to b^-}\left(\int_a^x g\right)$ (on peut séparer les intégrales on intègre des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,x]$, donc il n'y a pas de problème de convergence).

Remarque 5.0.1 *1. Le deuxième point de la proposition précédente, s'étend aux fonctions négatives.*

2. Il est suffisant d'avoir la positivité des différentes fonctions au voisinage de b.

Exemple 5.0.1 *1. Donner un équivalent simple de $\int_5^x \frac{dt}{\ln(t)}$ quand x tend vers $+\infty$. Donner ensuite un développement asymptotique à deux termes.*

2. *Déterminer un équivalent en* 0^+ *de* $f(x) = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{e^t}{\mathrm{Arcsin}\,(x+t)} dt$.

3. *Soient* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *continue et* $n \in \mathbb{N}^*$. *On suppose que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) \int_0^x (h(t))^n dt = \ell \in \mathbb{R}_+^*$. *Donner un équivalent de* h *en* $+\infty$.

6 Espaces $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{K})$

6.1 L'espace $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$

Définition 6.1.1 (Espace $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$) *On note* $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ *l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *intégrables sur* I.

Proposition 6.1.1 (L'espace vectoriel $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$) $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ *est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues par morceaux sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.

Démonstration : • $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ est non vide car il contient la fonction $x \mapsto 0$ qui est intégrable sur I ($\displaystyle\int_I |0| = 0$).

- Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a : $|f + \lambda g| \leq |f| + |\lambda||g|$. Or $\int_I |f|$ et $\int_I |g|$ convergent, donc par linéarité $\int_I (|f| + |\lambda||g|)$ aussi. Donc par comparaison de fonctions positives $\int_I |f + \lambda g|$ converge. Ainsi $f + \lambda g$ est dans $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.

6.2 Complément : l'espace $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$

Définition 6.2.1 ($\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$) *On note $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ de carré intégrable, c'est-à-dire les fonctions f telles que $|f|^2$ soit intégrable sur I.*

Proposition 6.2.1 (Opérations sur $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$) *$\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Démonstration :

On note $\mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{K}) = \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K}) \cap \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ (l'ensemble des fonctions de $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ continues).

Proposition 6.2.2 (L'espace préhilbertien $\mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{R})$) *Pour f et g dans $\mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{R})$, on pose $(f|g) = \int_I fg$. Ainsi $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{R})$.*

Démonstration :

- Symétrie : $\forall f, g \in \mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{R}),\ (f|g) = \int_I fg = \int_I gf = (g|f)$.
- Bilinéarité : $\forall f_1, f_2, g \in \mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{R}),\ , \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ (\lambda f_1 + \mu f_2 | g) = \int_I (\lambda f_1 + \mu f_2) g =$ $\lambda \int_I f_1 g + \mu \int_I f_2 g = \lambda (f_1|g) + \mu (f_2|g)$. Par symétrie, on a aussi la linéarité à droite.
- Positivité : $\forall f \in \mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{R}),\ (f|f) = \int_I f^2 \geq 0$.
- Séparation : Soit $f \in \mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{R})$ telle que $(f|f) = 0$. Alors $\int_I f^2 = 0$. Comme f^2 est continue et positive sur I, alors $f^2 = 0$, puis $f = 0$.

Remarque 6.2.1 *$(f, g) \mapsto \int_I fg$ n'est pas un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$, donc cet espace n'est pas préhilbertien. En effet par exemple si f est la fonction nulle partout sur I sauf en a (avec a dans I) telle que l'on ait $f(a) = 7$, alors f est continue par morceaux et elle est aussi dans $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$ et $(f|f) = 0$ (intégrale d'une fonction nulle sauf en un point), cependant nous n'avons pas $f = 0$ sur I. Ainsi on n'a pas la séparation.*

Proposition 6.2.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soient $f, g \in \mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{K})$. On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

Démonstration :

Remarque 6.2.2 *Dans $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$ (qui est un espace préhilbertien), nous avons l'égalité si et seulement si (f, g) est liée.*

Exemple 6.2.1 *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et on pose $g : t \mapsto tf(t)$. On suppose que f' et g sont dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.*

1. *Montrer que : $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.*
2. *En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} tf^2(t)$ existe et est réelle. Montrer ensuite que celle-ci est nulle.*
3. *Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2 \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} (f')^2}\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2}$. Étudier le cas d'égalité.*

7 Récapitulatif pour étudier la convergence d'une intégrale

1. Vérifier que f est continue par morceaux sur I d'extrémité a et b.
   Ensuite identifier les bornes qui posent un problème (bornes infinies ou bornes où f n'est pas définie).
2. Regarder si f peut se prolonger par continuité aux bornes finies où elle n'est pas définie. Dans ce cas il n'y a plus de problème d'intégrabilité et il n'y a plus rien à vérifier, voir l'exemple 2.2.3.
3. Pour les vrais problèmes de convergence d'intégrales, vérifier l'intégrablité ou l'absolue convergence : considérer $|f|$ (ou f si f est de signe constant) soit c'est direct ou utiliser les théorèmes de comparaison avec $\leq, O, o, \sim$, avec des fonctions intégrables de référence (intégrales de Riemann en 0 ou $+\infty$), quitte à faire un petit changement de variable pour s'y ramener.
   Privilégier dans un premier temps les équivalents pour simplifier les fonctions. Ensuite utiliser les o ou O et enfin des inégalités.
4. Si cela ne marche pas, vous pouvez essayez de trouver une primitive comme dans l'exemple 2.2.2, mais ce cas là sera plutôt rare. Dans ce cas de figure, vous pouvez même avoir la valeur de votre intégrale.
5. Si vous n'avez pas encore réussi, essayez l'intégration par partie (exemple 4.3.1), ou le changement de variable (exemple 4.2.1). Ce cas de figure peut éventuellement vous donner la valeur de l'intégrale (exemples 4.3.1 et 4.2.1).