1 Rappels de sup sur les suites

1.1 Limite d'une suite

Définition 1.1.1 (Limite d'une suite) *1. Soit (x_n) une suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et l un nombre complexe. On dit que la suite (x_n) converge vers l si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ |x_n - l| \leq \varepsilon.$$

2. Soit (x_n) une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite (x_n) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^* (\text{ resp. } \forall A \in \mathbb{R}_-^*), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ x_n \geq A\ (\text{resp. } x_n \leq A).$$

Exemple 1.1.1 *Soit (u_n) une suite à valeurs positives sous-additive : $\forall n, m \in \mathbb{N},\ u_{n+m} \leq u_n + u_m$. Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le réel $\ell = \inf \left\{\dfrac{u_k}{k},\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$.*

Proposition 1.1.1 (Suites convergentes et suites bornées) *Toute suite convergente est bornée.*

Proposition 1.1.2 (Convergence des suites complexes) *Soit (z_n) une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. Soit $l = \alpha + i\beta$, avec $\alpha = Re(l)$ et $\beta = Im(l)$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $z_n = x_n + iy_n$, avec $x_n = Re(z_n)$ et $y_n = Im(z_n)$. On a :*

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = l \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha \ \ ET \lim_{n \to +\infty} y_n = \beta.$$

Exemple 1.1.2 *Soit $z_0 \in \mathbb{C}^\star$. On définit la suite complexe (z_n) par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.*
Calculer z_n en fonction de n et en déduire la limite de (z_n).

Proposition 1.1.3 (Limite et signe d'une suite) *On suppose qu'une suite* (u_n) *tend vers* l *dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. *Alors on a :*

1. *Si* l *est strictement positif, alors* (u_n) *est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif :* $\exists a \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ u_n \geq a$.
   Dans ce cas (u_n) *est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.*
2. *Si* l *est strictement négatif, alors* (u_n) *est majorée à partir d'un certain rang par un réel strictement négatif :* $\exists a \in \mathbb{R}_-^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ u_n \leq a$.
   Dans ce cas (u_n) *est à termes strictement négatifs à partir d'un certain rang.*

Corollaire 1.1.1 (Signe de deux suites équivalentes) *Deux suites réelles équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang.*

1.2 Suites extraites

Proposition 1.2.1 (Convergence des suites extraites) *Soit* (u_n) *une suite complexe ayant pour limite* ℓ. *Toute suite extraite (c'est-à-dire de la forme* $(u_{\phi(n)})$ *avec* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante) converge vers la même limite.*

Proposition 1.2.2 (Suites extraites d'indice pair et impair) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe. Si on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$, *alors la suite* (u_n) *admet une limite et :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemple 1.2.1 *Montrer que la suite* $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Théorème 1.2.1 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite complexe bornée, on peut extraire une suite convergente.*

Définition 1.2.1 (Valeur d'adhérence) *Soit* (u_n) *une suite de* $\mathbb{K}$ *(avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*). Soit* $x \in \mathbb{K}$. *On dit que* x *est une valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si* x *est limite d'une suite extraite de* (u_n).

Remarque 1.2.1

1. *Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérences n'a pas de limite.*
2. *Toute suite bornée de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *admet au moins une valeur d'adhérence.*
3. *(IMPORTANTE)* $x \in \mathbb{K}$ *est une valeur d'adhérence de* (u_n) *si et seulement si :*
   $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - x| \leq \varepsilon \ \ (*)$.

Cela revient aussi à dire que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ |u_n - x| \leq \varepsilon\}$ est infini.
Si x est une valeur d'adhérence, alors il existe une suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x et on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ |u_{\phi(n)} - x| \leq \varepsilon$, ce qui donne bien le résultat voulu.
Réciproquement, on suppose que : pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ |u_n - x| \leq \varepsilon\}$ est infini. On construit comme précédement une suite extraite qui converge vers x.

Exemple 1.2.2 *1. Les valeurs d'adhérences de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$ sont 1 et -1.*
En effet, on remarque que $u_{2k} = 1 + \dfrac{1}{2k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $u_{2k+1} = -1 + \dfrac{1}{2k+2} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -1$. Ainsi 1 et -1 sont valeurs d'adhérence.
Soit a une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe une suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a. L'ensemble des indices $\varphi(n)$ étant infini, on a une infinité d'indices pairs ou une infinité d'indices impairs. Dans le premier cas, on extrait de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ne comportant que des indices pairs qui converge vers 1 ($u_{\psi(n)} = 1 + \dfrac{1}{\psi(n)+1}$) et donc : $a = 1$. De même dans le deuxième cas, on a : $a = -1$.

2. Soit (u_n) une suite bornée de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.3 Relations d'ordre et convergence

Proposition 1.3.1 (Relation d'ordre et limite) *1. Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang N, on ait : $\forall n \geq N,\ x_n \leq y_n$.*

(a) Si on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l'$, alors on a : $l \leq l'$.

(b) *Si on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$*, alors on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

(c) *Si on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = -\infty$*, alors on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

2. *Si* (x_n) *est une suite complexe et* (y_n) *une suite à valeurs positives telles qu'à partir d'un certain rang* N*, on ait :* $\forall n \geq N,\ |x_n| \leq y_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$*. Alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Remarque 1.3.1 ***ATTENTION :*** *Si dans le premier point de la proposition précédente on avait eu :* $\forall n \geq N,\ x_n < y_n$*, alors on a toujours :* $l \leq l'$ *et non* $l < l'$*. Par exemple :* $\dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{n}$*, mais quand on passe à la limite :* $0 \leq 0$.

Proposition 1.3.2 (Théorème des gendarmes ou d'encadrement) *Soient* (x_n)*,* (y_n) *et* (z_n) *trois suites réelles telles que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l$*. Si à partir d'un certain rang* N*, on a :*
$\forall n \geq N,\ x_n \leq y_n \leq z_n$*, alors la suite* (y_n) *converge et* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l$.

Proposition 1.3.3 (Suites monotones et limites) 1. *Soit* (x_n) *une suite réelle croissante.*
- *Si elle est majorée, alors elle est convergente.*
- *Si elle n'est pas majorée, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

2. *Soit* (x_n) *une suite réelle décroissante.*
- *Si elle est minorée, alors elle est convergente.*
- *Si elle n'est pas minorée, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

Ainsi, une suite monotone et bornée, converge.

Remarque 1.3.2 ***ATTENTION :*** *Si* (x_n) *est une suite croissante et on a :* $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq M$*, on n'a pas forcément* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = M$*. On a seulement :* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leq M$.

Exemple 1.3.1 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par* $u_0, v_0 \in \mathbb{R}_+^*$ *et par :*
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ *et* $v_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n + v_n}$.

1. *Montrer que les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont bien définies.*
2. *Étudier la convergence de ces deux suites. On note* ℓ *la limite.*
3. *Donner un équivalent de* $u_n - \ell$ *en fonction de* ℓ *et* u_0.

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et on pose* $\mathcal{P}(n)$ *:* u_n *et* v_n *existent et sont strictement positifs.*
   $\mathcal{P}(0)$ *est vraie.*
   Soit $n \in \mathbb{N}$ *et on suppose* $\mathcal{P}(n)$*. Comme* u_n *et* v_n *sont strictement positifs, alors* $u_n + v_n \neq 0$ *et* v_{n+1} *existe et est strictement positif. Pour* u_{n+1} *cela reste clairement vrai. D'où* $\mathcal{P}(n+1)$.
2.

3.

Définition 1.3.1 (Suites adjacentes) *Soient (x_n) et (y_n) deux suites. On dit que ces suites sont **adjacentes** si :*

1. *(x_n) et (y_n) sont monotones et de monotonie différente.*
2. *$\lim\limits_{n \to +\infty} (y_n - x_n) = 0$.*

Proposition 1.3.4 (Convergence de suites adjacentes) *Deux suites adjacentes (x_n) et (y_n) sont convergentes et ont la même limite.*

Exemple 1.3.2 *Une suite (u_n) réelle est dite de Cauchy si :*
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \ (p \geq N) \wedge (q \geq N) \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$.
On pose $a_n = \sup\limits_{p \geq n} u_p$ et $b_n = \inf\limits_{p \geq n} u_p$. En s'aidant de ces suites, montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge.

1.4 Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f croissante

On s'intéresse aux suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et croissante vérifiant : $f(I) \subset I$. Cette dernière condition est indispensable pour pouvoir à chaque fois calculer $f(u_n)$. On peut ensuite affirmer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.

Voici la méthode de recherche d'une limite d'une telle suite :

- On commence par bien vérifier que f est croissante et $f(I) \subset I$.
- On montre ensuite par récurrence la monotonie de la suite.
  - Si $u_0 \leq u_1$, on montre que (u_n) est croissante.
    Voici la preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $\mathcal{P}(n) : u_n \leq u_{n+1}$.
    $\mathcal{P}(0)$ est vraie par hypothèse.
    Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. On a : $u_n \leq u_{n+1}$.
    Par croissance de f sur I, on a : $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.
  - Si $u_0 \geq u_1$, on montre que la suite est décroissante.
    La démonstration est la même.

  Si on vous donne u_0, il n'y a plus qu'à calculer u_1.
  Par contre si on vous demande de discuter la limite de la suite en fonction de u_0, il faut connaître le signe de $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$, ce qui revient à étudier le signe de $f(x) - x$.

- Maintenant que la suite (u_n) est monotone, on sait que cette suite admet une limite (finie ou infinie).
  Si (u_n) converge vers ℓ, alors en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, par continuité de f, on a : $\ell = f(\ell)$. On dit que ℓ est un point fixe de f. Pour les trouver il suffit de voir quand $f(x) - x$ s'annule.
  Si (u_n) reste dans un intervalle borné ou si I est borné, alors cette limite est finie (on utilise le théorème de la limite monotone).
  Pour trouver la limite, il faut effectuer une étude au cas par cas. En général on arrive à conclure à l'aide de la monotonie et de la position de (u_n) par rapport aux points fixes (on peut éventuellement prouver par récurrence que u_n reste toujours entre les mêmes points fixes).

Remarque 1.4.1 *ATTENTION, ne pas dire que (u_n) est croissante car f l'est.*

Exemple 1.4.1 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et :*
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$. *Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.*

1.5 Suites classiques

1.5.1 Suites arithmétiques

Définition 1.5.1 (Suites arithmétiques) *Soit $r \in \mathbb{C}$. Une suite (u_n) est dite **arithmétique de raison** r si*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Remarque 1.5.1

1. *Par récurrence en fixant n dans $\mathbb{N}$, on montre que :*
   $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_p + nr.$
   On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$.
2. *Si r est un réel non nul et u_0 est réel , on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = signe(r)\infty$.*

1.5.2 Suites géométriques

Définition 1.5.2 (Suites géométriques) *Soit $q \in \mathbb{C}^*$. Une suite (u_n) est dite **géométrique de raison** q si*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n.$$

Remarque 1.5.2 *Par récurrence en fixant n dans $\mathbb{N}$, on montre que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = q^n u_p$.
On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0$.

Proposition 1.5.1 (Convergence des suites géométriques) *Soit* $q \in \mathbb{R}^*$. *On a :*

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \text{pas de limite} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}.$$

Remarque 1.5.3 *Si q est dans $\mathbb{C}$ et $|q| < 1$, alors on a :* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, *car :* $\forall n \in \mathbb{N},\ |q^n| = |q|^n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} |q|^n = 0$.

Proposition 1.5.2 (Somme des termes d'une suite géométrique) *Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \begin{cases} \dfrac{1 - a^n}{1 - a} & \text{si } a \neq 1 \\ n & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Remarque 1.5.4 *(IMPORTANTE) Si l'indice ne commence pas à 0, effectuer la manipulation suivante pour se ramener à la proposition précédente :* $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a^k = a^m \sum_{k=m}^{n} a^{k-m} \overset{l=k-m}{=} a^m \sum_{l=0}^{n-m} a^l$.

Exemple 1.5.1 ***(Séries de Fourier)*** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *continue et 2π-périodique.*
On pose $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$, *pour $n \in \mathbb{Z}$ et* $S_N : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inx}$ *et* $D_N : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$ *pour $N \in \mathbb{N}$.*
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ S_N(f)(x) - f(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{f(x+u) - f(x) + f(x-u) - f(x)}{2\sin(u/2)} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) u\right) du$.

1.5.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 1.5.3 (Suites arithmético-géométriques) *Soient $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$. Une suite (u_n) est dite* ***arithmético-géométrique*** *si*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Méthode pour trouver toutes les suites arithmético-géométriques vérifiant la relation précédente :

1. Trouver les suites constantes $(\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant cette dernière relation. On doit avoir $\lambda = a\lambda + b$ et on trouve donc $\lambda = \dfrac{b}{1-a}$.
2. Trouver toutes les autres suites en se ramenant à l'étude d'une suite géométrique : on montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \lambda = a(u_n - \lambda)$ en soustrayant les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & au_n + b \\ \lambda & = & a\lambda + b \end{cases}$$

Ensuite on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - \lambda = a^n(u_0 - \lambda)$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda + a^n(u_0 - \lambda)$.

Remarque 1.5.5 *Ce raisonnement fait penser aux résolutions d'équations différentielles avec second membre en cherchant d'abord une solution particulière (la suite constante), puis les solutions du problème homogène : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = av_n$.*

1.5.4 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux à coefficients constants

Cas complexe Soit $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Soit (u_n) une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On appelle (E) l'équation caractéristique : $r^2 - ar - b = 0$ (qui est à rapprocher de la relation $u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0$) et on appelle Δ son discriminant.

Proposition 1.5.3 (Suites récurrentes doubles complexes) *Soient r_1 et r_2 les deux solutions complexes (éventuellement confondues de (E)).*
- *Si $\Delta \neq 0$, soit $r_1 \neq r_2$, alors : $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$.*
- *Si $\Delta = 0$, soit $r_1 = r_2 = r$, alors : $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_1 r^n + \lambda_2 n r^n$.*

Corollaire 1.5.1 (Suites récurrentes doubles réelles) *On suppose maintenant (a, b) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et u_0 et u_1 réels.*
- *Si $\Delta > 0$, soit r_1, r_2 les deux solutions réelles distinctes, alors :*
$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$.
- *Si $\Delta = 0$, soit r la solution double, alors : $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_1 r^n + \lambda_2 n r^n$.*
- *Si $\Delta < 0$, soit r_1 et r_2 les deux solutions complexes distinctes, avec $r_2 = \overline{r_1}$. On pose $r_1 = \rho e^{i\theta}$ avec ρ dans $\mathbb{R}_+^*$ et θ dans $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On a donc :*

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n(\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta)).$$

ou

$$\exists(\alpha, \theta_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n \alpha \cos(n\theta - \theta_0).$$

2 Rappels de sup sur les séries

Dans ce paragraphe $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Définitions

Définition 2.1.1 (Série) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit la* **somme partielle de rang** p

$$S_p = \sum_{n=0}^{p} u_n.$$

On appelle alors **série de terme général** u_n*, notée* $\sum u_n$*, la suite des sommes partielles* $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Définition 2.1.2 (Série convergente) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que la série $\sum u_n$* **converge** *quand la suite de ses sommes partielles $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.*
On appelle alors **somme de la série** *la limite des sommes partielles et on note :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{p\to+\infty} S_p = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} u_n.$$

Dans le cas contraire, on dit que la série **diverge**.

Remarque 2.1.1

1. *ATTENTION : comme toute limite la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ne peut être utilisée qu'après avoir démontré la convergence de la série. Ainsi il ne faut pas confondre les notations $\sum u_n$ ou parfois $\sum_{n\geq 0} u_n$ qui désigne la série de terme général u_n et la valeur de sa somme en cas de convergence qui est $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*
2. *Ne pas confondre « nature » et « somme » d'une série. Déterminer la nature d'une série, c'est dire si elle est convergente ou divergente. C'est ensuite un autre problème que de calculer sa somme en cas de convergence. Il est d'ailleurs fréquent que l'on puisse prouver la convergence d'une série sans pouvoir en calculer la somme.*
3. *La notion de divergence d'une série englobe deux comportements : soit la suite des sommes partielles a une limite infinie, soit elle n'a pas de limite.*
4. *Une série n'est donc rien d'autre qu'une suite (la suite de ses sommes partielles) sur laquelle on peut utiliser les théorèmes classiques des suites.*

Définition 2.1.3 (Reste) *Soit $\sum u_n$ <u>une série convergente</u>. Pour tout entier p, on appelle* **reste d'ordre** p *:*

$$R_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} u_k.$$

Proposition 2.1.1 (Lien entre somme et reste) *Soit $\sum u_n$ une série convergente de somme S. Si on note S_p et R_p la somme partielle et le reste d'ordre p, alors*

- *pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_p + R_p$, soit $R_p = S - S_p$.*
- $\lim_{p\to+\infty} R_p = 0.$

Remarque 2.1.2 *ATTENTION : on ne doit pas dire qu'une série converge si et seulement si son reste tend vers 0. En effet l'existence même du reste suppose déjà que la série converge.*

2.2 Propriétés de linéarité de la somme

Proposition 2.2.1 (Linéarité de la somme) *Pour toutes séries convergentes* $\sum u_n$, $\sum v_n$ *et pour tous* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ *:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Remarque 2.2.1 *ATTENTION, ne pas inventer des opérations !*
Si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries divergentes, on ne peut rien dire sur* $\sum (u_n + v_n)$.
Par exemple si on pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1,\ v_n = 1,\ w_n = -1$, *les séries* $\sum u_n$, $\sum v_n$ *et* $\sum w_n$ *divergent et* $\sum (u_n + v_n)$ *diverge et* $\sum (u_n + w_n)$ *converge.*
Ainsi on ne peut pas toujours écrire $\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n$, *il faut s'assurer que* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent.*

Proposition 2.2.2 (Convergence des séries à termes complexes) *Soit* $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *La série* $\sum z_n$ *converge si et seulement si les séries réelles* $\sum Re(z_n)$ *et* $\sum Im(z_n)$ *convergent.*
En cas de convergence, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} Re(z_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} Im(z_n)$ *et donc* $\sum_{n=0}^{+\infty} Re(z_n) = Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\right)$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} Im(z_n) = Im\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\right)$

Remarque 2.2.2 *Si* $\sum z_n$ *converge, alors* $\sum \overline{z_n}$ *converge et on a :* $\overline{\sum_{n=0}^{+\infty} z_n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{z_n}$.

Proposition 2.2.3 (Condition nécessaire de convergence) *Si la série* $\sum u_n$ *est convergente, alors* $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
Par contraposée, lorsque la suite (u_n) *ne tend pas vers* 0, *on dit que la série* $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Remarque 2.2.3 *Pour la convergence d'une série* $\sum u_n$, *le fait d'avoir* $\lim u_n = 0$ *est une condition nécessaire mais pas suffisante. ATTENTION : La réciproque est fausse. Une série peut avoir des termes généraux qui tendent vers* 0 *sans converger.*

Exemple 2.2.1

1. *La série* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge, mais pas grossièrement.*
2. *La série* $\sum \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ *diverge grossièrement car : si on note* $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, *alors :* $\forall p \in \mathbb{N},\ u_{4p+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2p\pi\right) = 1$, *donc* (u_n) *ne converge pas vers* 0, *car* $\lim_{p \to +\infty} u_{4p+1} = 1$.

2.3 Des séries de référence

2.3.1 Séries géométriques

Proposition 2.3.1 (Séries géométriques) *Soit* $q \in \mathbb{C}$. *La série* $\sum q^n$ *est convergente si, et seulement si,* $|q| < 1$. *Dans le cas de convergence*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Remarque 2.3.1 *En cas de convergence, on a la formule suivante pour les restes :*
$\forall p \in \mathbb{N},\ R_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} q^n =$

Pour tout p de $\mathbb{N}$, les sommes partielles S_p valent : $S_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} q^n = \frac{1-q^{p+1}}{1-q}$.

Exemple 2.3.1 *Dessiner le domaine de convergence dans $\mathbb{C}$ de* $\sum \exp\left(\dfrac{nz}{z-2}\right)$.

2.3.2 Séries téléscopiques

Proposition 2.3.2 (Séries télescopiques) *Soit (u_n) une suite complexe. La série $\sum (u_{n+1}-u_n)$ est convergente si et seulement si la suite (u_n) converge.*
En cas de convergence, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1}-u_n) = \left(\lim_{p\to+\infty} u_p\right) - u_0$.

Remarque 2.3.2 *Les sommes partielles valent :* $S_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} (u_{n+1}-u_n) = u_{p+1} - u_0$.

Exemple 2.3.2

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge, puis en déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.*

2. *Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{Arctan}\,(u_n)$. Étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^k$, pour k dans $\mathbb{N}^*$. On rappelle que dans l'exemple 1.4.1, on a vu que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. On commencera par $k=3$, puis $k=2$.*

2.3.3 Séries de Riemann

Proposition 2.3.3 (Convergence des séries de Riemann) *La série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Remarque 2.3.3 *On a :* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2.4 Séries à termes positifs

Dans ce paragraphe on se place dans le cas où l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.

2.4.1 Sommes partielles

Définition 2.4.1 (Séries à termes positifs) *On dit qu'une série* $\sum u_n$ *est* ***à termes positifs*** *si, pour tout* n, u_n *est positif.*

Remarque 2.4.1

1. *Pour la convergence, tous les résultats de cette partie s'adaptent pour les séries qui ont des termes positifs à partir d'un certain rang.*
2. *On peut adapter tous les résultats de cette partie pour les séries à termes négatifs (ou à termes négatifs à partir d'un certain rang). En effet il suffit d'étudier* $\sum(-u_n)$ *pour se ramener à l'étude d'une série à termes positifs. Finalement il suffit que le signe du terme général de la série soit constant à partir d'un certain rang pour exploiter les théorèmes qui vont être énoncés sur la convergence.*

Proposition 2.4.1 (Convergence des séries à termes positifs) *Soit* $\sum u_n$ *une série* *à termes positifs.* $\sum u_n$ *converge si et seulement si sa suite des sommes partielles est majorée.*

En cas de divergence, les sommes partielles vérifie : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.

Remarque 2.4.2

1. *La suite des sommes partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*
2. *Pour une suite à termes négatifs, on adapte la proposition précédente en disant que* $\sum u_n$ *converge si et seulement si sa suite des sommes partielles est minorée.*
   Dans le cas d'une série à termes négatifs divergente, on a : $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$.
3. *Si* (u_n) *est décroissante, positive telle que* $\sum u_n$ *converge, alors* $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. *Cela se montre comme pour les intégrales.*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *On a par décroissance de* (u_n) *:*
   $$0 \leq nu_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \sum_{k=0}^{2n} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\to} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0.$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = 0$. *Par ailleurs, on a :* $0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq 2nu_{2n} + u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, *car* $\lim u_n = 0$, *car la série converge. Ainsi* $\lim_{n\to+\infty} (2n+1)u_{2n+1} = 0$, *puis :* $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

2.4.2 Comparaison avec une série

Proposition 2.4.2 (Comparaisons) *1. Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $u_n \leq v_n$ *à partir d'un certain rang. Alors*

- *Si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge.*
- *Si* $\sum u_n$ *diverge alors* $\sum v_n$ *diverge.*

2. Par extension on utilise plus souvent les caractérisations suivantes : si on a $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $u_n = o(v_n)$ *ou* $u_n = O(v_n)$. *Alors*

- *Si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge.*
- *Si* $\sum u_n$ *diverge alors* $\sum v_n$ *diverge.*

3. Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $u_n \sim v_n$. *Alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

Remarque 2.4.3 *1. En général, on a un équivalent de* u_n *à l'aide d'un D.L, ce qui permet de faire une comparaison avec le terme général d'une série plus simple.*

2. Pour comparer le terme général u_n *d'une série à termes strictement positifs avec le terme générale* $1/n^\alpha$ *d'une série de Riemann, on étudie* $\lim_{n\to+\infty} u_n n^\alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^\alpha}}$.

- *Si pour* $\alpha \leq 1$, *on a :* $\lim_{n\to+\infty} u_n n^\alpha = +\infty$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha u_n} = 0$ *et donc :* $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ *et donc* $\sum u_n$ *diverge.*
- *Si pour* $\alpha > 1$, *on a :* $\lim_{n\to+\infty} u_n n^\alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = 0$, *alors* $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ *et donc* $\sum u_n$ *converge.*
- *Si on a :* $\lim_{n\to+\infty} u_n n^\alpha = l \in \mathbb{R}_+^*$, *alors* $u_n \sim \frac{l}{n^\alpha}$ *et donc* $\sum u_n$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Exemple 2.4.1 *1. Étudier la convergence de la série* $\sum \ln(n)^{-\ln(n)}$.

2. Étudier la convergence de la série $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

3. Soit $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$. *Discuter la convergence de la série* $\sum u_n$ *puis donner la valeur de sa somme dans les cas de convergence.*

4. *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *et* $(u_n)_{n\geq 1}$ *vérifiant* $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ *et :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^\alpha u_n}$.
   Déterminer les valeurs de α *pour lesquelles* (u_n) *converge.*

Remarque 2.4.4 *Attention la règle des équivalents ne fonctionne pour les séries de signe constant à partir d'un certain rang.*
Contre-exemple ; pour n *dans* $\mathbb{N}^*$, *on pose* $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *et* $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
• *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et on pose* $w_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. *La série* $\sum u_n = \sum (w_{n+1} - w_n)$ *est télécopique et elle converge, car la suite* (w_n) *converge (* $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$*).*

$\bullet$ *Comme* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge.*

$\bullet$ *On a :* $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \underbrace{\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}+1\right)}_{\to 2} \sim 2\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. *Or* $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, *donc* $u_n \sim v_n$.

2.5 Séries absolument convergentes

Définition 2.5.1 (Séries absolument convergentes) *Soit* (u_n) *une suite réelle ou complexe. On dit que la série* $\sum u_n$ *est* **absolument convergente** *si* $\sum |u_n|$ *converge.*

Proposition 2.5.1 (Convergence absolue implique convergence) *Si une série est absolument convergente alors elle converge.*

Remarque 2.5.1

1. *ATTENTION : La réciproque est fausse ! Par exemple si on considère la série de terme général* $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *nous avons vu dans le remarque 2.4.4 que* $\sum u_n$ *converge, mais* $u_n \sim \frac{2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ *et donc* $|u_n| \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$ *qui est le terme général d'une série de Riemann divergente, donc la série n'est pas absolument convergente.*
2. *IMPORTANT pour étudier une série à termes réels ou complexes, on pourra étudier son absolue convergence. On se ramène ainsi à une série à termes positifs.*

Proposition 2.5.2 (Comparaison avec une série à termes positifs) *Soient* $\sum u_n$ *une série à termes dans* $\mathbb{C}$ *et* $\sum v_n$ *une série à termes positifs. Si on a :*

- $|u_n| \leq v_n$ *à partir d'un certain rang. Alors si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge (absolument).*
- *si* $u_n = o(v_n)$ *ou* $u_n = O(v_n)$ *(ce qui revient à avoir* $|u_n| = o(v_n)$ *ou* $|u_n| = O(v_n)$*) . Alors si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge (absolument).*
- *Si* $|u_n| \sim v_n$. *Alors si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge (absolument).*

Exemple 2.5.1

1. *Soit* $\alpha > 1$, *si on pose* $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *et* $\phi(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. *Exprimer* $\phi(\alpha)$ *en fonction de* $\zeta(\alpha)$.

2. *Soit* $f \in \mathcal{C}^3([-1,1],\mathbb{R})$. *Montrer que la série* $\sum \left(n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right)\right) - 2f'(0)\right)$ *converge.*

3. Étude de la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\cos(\ln(n))}{n}$.

Proposition 2.5.3 (Inégalité triangulaire) *Si la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente, on a* $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

2.6 Sommation des relations de comparaison (programme de spé)

Proposition 2.6.1 (Sommation des restes) *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries numériques telles que la série* $\sum v_n$ *soit convergente et dont les termes sont signe constant à partir d'un certain rang.*

- *Si* $u_n = O(v_n)$, *alors* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
- *Si* $u_n = o(v_n)$, *alors* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
- *Si* $u_n \sim v_n$, *alors* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

Démonstration : Quitte à prendre $-v_n$, on peut supposer que v_n est positive à partir d'un certain rang. Comme les séries convergent, les écritures des restes sont licites.

1. Si $u_n = O(v_n)$, alors il existe un réel M et un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$: $|u_n| \leq Mv_n$ et $v_n \geq 0$. Pour $n \geq n_0$, on a : $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leq M\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$: ainsi $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
2. Si $u_n = o(v_n)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$: $|u_n| \leq \varepsilon v_n$ et $v_n \geq 0$. Pour $n \geq n_0$, on a $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leq \varepsilon\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$: ainsi $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

3. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = v_n + o(v_n)$, soit $u_n - v_n = o(v_n)$. Ainsi grâce au point précédent, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k) = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$. Comme les séries convergent, on peut séparer les sommes, ce qui donne : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k + o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$, soit $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

Exemple 2.6.1 *1. (a) En constatant que* $\dfrac{1}{k^2} \sim \dfrac{1}{k(k+1)}$*. Déterminer un équivalent de* $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

(b) En s'inspirant de la méthode précédente, donner un développement asymptotique de R_n *à l'ordre deux en* $\dfrac{1}{n}$.

(c) En déduire un développement asymptotique à deux termes de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

2. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *qui vérifie :* $u_{n+1} = o(u_n)$*. On peut montrer avec la règle de d'Alembert que l'on verra plus tard que* $\sum u_n$ *est absolument convergente. Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Proposition 2.6.2 (Sommation des sommes partielles) *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries numériques telles que la série* $\sum v_n$ *soit divergente et dont les termes sont signe constant à partir d'un certain rang.*

- *Si* $u_n = O(v_n)$, *alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
- *Si* $u_n = o(v_n)$, *alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
- *Si* $u_n \sim v_n$, *alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Démonstration : Quitte à prendre $-v_n$ au lieu de v_n, on peut supposer la série $\sum v_n$ à termes positifs à partir d'un certain rang.

1. Si $u_n = O(v_n)$, alors il existe un réel $M > 0$ et un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$: $|u_n| \leq M v_n$ et $v_n \geq 0$. Pour $n \geq n_0$, on a :
$$|\sum_{k=0}^{n} u_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k| = \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| + \sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| + M\sum_{k=n_0}^{n} v_k = \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| - M\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k\right) + M\sum_{k=0}^{n} v_k.$$
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M\sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$ et que $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| - M\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k\right)$ est une constante, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que : $\forall n \geq n_1$, $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| - M\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k\right) \leq M\sum_{k=0}^{n} v_k$.
Ainsi : $\forall n \geq n_1, |\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k| \leq 2M\sum_{k=0}^{n} v_k$, donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
2. Si $u_n = o(v_n)$, alors pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$: $|u_n| \leq \varepsilon v_n$ et $v_n \geq 0$. Pour $n \geq n_0$, on a :
$\displaystyle|\sum_{k=0}^{n} u_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k| = \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| + \sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| + \varepsilon\sum_{k=n_0}^{n} v_k =$
$\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| - \varepsilon\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k\right) + \varepsilon\sum_{k=0}^{n} v_k$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon\sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$ et que $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| - \varepsilon\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k\right)$ est une constante, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que : $\forall n \geq n_1$, $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| - \varepsilon\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k\right) \leq \varepsilon\sum_{k=0}^{n} v_k$. Ainsi : $\forall n \geq n_1, |\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k| \leq 2\varepsilon\sum_{k=0}^{n} v_k$, donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
3. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = v_n + o(v_n)$, soit $u_n - v_n = o(v_n)$. Ainsi grâce au point précédent, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k - v_k) = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$, d'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Corollaire 2.6.1 (Lemme de Cesàro) *Soit* (u_n) *ayant pour limite* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, *alors :* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \ell$.

Démonstration :

Remarque 2.6.1 *On peut retrouver que* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$*.*

La série $\sum \frac{1}{n}$ *diverge et est à termes positifs, donc :* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$*. Or :*
$\ln(n+1) = \ln\left(n\left[1+\frac{1}{n}\right]\right) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \ln(n)$*, car :* $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ *et :*
$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$*. Ainsi :* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$*.*

Exemple 2.6.2 *Soit* $(u_n)_{n\geq 1}$ *vérifiant* $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ *et :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{nu_n}$*. On a vu dans l'exemple 2.4.1 que :* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$*. Déterminer un équivalent de* (u_n)*.*

3 Intégrales et séries

3.1 Comparaison séries et intégrales

Proposition 3.1.1 (Comparaison séries et intégrales) *Soit* $a \in \mathbb{N}$ *et* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ *une fonction continue positive par morceaux* <u>*décroissante*</u>*.*
Alors, pour tout entier k *tel que* $k \geq a+1$ *on a*

$$\int_{k}^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq int_{k-1}^{k} f(t)dt.$$

Et donc, pour tout $p \geq n$, on a :

$$\int_n^{p+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^{p} f(k) \leq \int_{n-1}^{p} f(t)dt.$$

Dans le cas où f est croissante, on a :

$$\int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt.$$

$$\int_{n-1}^{p} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^{p} f(k) \leq \int_n^{p+1} f(t)dt.$$

Exemple 3.1.1 1. *Si on a : $\alpha < 1$ alors on a $S_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{p\to+\infty}$*

2. *Si on a : $\alpha > 1$, alors $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{n\to+\infty}$*

3. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose que $\sum u_n$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_n}{R_{n-1}^\alpha}$.*
   (a) *On suppose $\alpha \leq 0$. Montrer que $\sum v_n$ converge.*
   (b) *On suppose $\alpha > 1$. Montrer que $\sum v_n$ diverge.*
   (c) *On suppose $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que $\sum v_n$ converge.*

Remarque 3.1.1 1. *Grâce à la proposition 3.1.1, lorsque* $\sum f(k)$ *converge, on peut donc encadrer la somme* $\sum_{k\geq a} f(k)$ *à l'aide de* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$.

La proposition 3.1.1 permet d'avoir aussi un équivalent des restes.

2. *Dans le cas où* $\sum f(k)$ *est une série divergente, vous pouvez avoir éventuellement un équivalent des sommes partielles grâce à la proposition 3.1.1.*

Exemple 3.1.2 1. *Soit* f *une fonction continue par morceaux sur* $[0, +\infty[$, *positive et décroissante. Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} w_n$ *est convergente, avec* $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$.

En déduire que qu'il exise $K \in \mathbb{R}$ *tel que :* $\sum_{k=1}^{n} f(k) = K + \int_0^n f(t)dt + o(1)$.

2. *En déduire que la série* $\sum_{n\geq 1} f(n)$ *converge si et seulement si l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *converge.*

3. *Montrer qu'il existe* $S \in \mathbb{R}$ *tel que :* $\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(p)}{p} = S + \frac{1}{2}\ln^2(n) + o(1)$.

Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. *On a :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.

On a : $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < \ln(x) \Leftrightarrow e < x$. *Ainsi* f *est décroissante sur* $[e, +\infty[$ *et continue par morceaux. Ainsi grâce au premier point la série* $\sum_{n\geq 2} \left(\frac{\ln(n)}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t} dt \right)$ *converge vers un réel* S.

Soit $n \geq 2$. *On a :* $\sum_{p=2}^{n} \left(\frac{\ln(p)}{p} - \int_{p-1}^{p} \frac{\ln(t)}{t} dt \right) = S + o(1)$, *soit :*

$$\sum_{p=1}^{n} \underbrace{\frac{\ln(p)}{p}}_{=0 \text{ si } p\,=\,1} = S + \int_1^n \frac{\ln(t)}{t} dt = S + \frac{1}{2}\ln^2(n) + o(1).$$

Exemple 3.1.3 ***(Séries de Bertrand)*** *: soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *pour* $n \geq 2$.

1. *Étudier la convergence de la série* $\sum u_n$.
2. *Déterminer la nature de* $\sum_{n\geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{1/n}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

3.2 Relation de Chasles

Nous n'allons pas donner de proposition mais travailler sur trois exemples permettant de voir comment à l'aide de la relation de Chasles, on peut se ramener à l'étude d'une série.

Exemple 3.2.1 1. *Étudier l'intégrabilité sur* $[\pi, +\infty[$ *de* $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ *avec* $\alpha > 0$. *On en déduit* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$ *n'est pas absolument convergente tout en étant convergente.*

Remarque 3.2.1 *Lorsque f' est intégrable au voisinage de $+\infty$, il est possible de faire une comparaison série intégrale, comme le montre l'exemple ci-dessous.*

2. *Soit, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{x}$.*

   (a) *Nature la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n)$.*

   (b) *Nature de la série de terme général $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.*

3. *Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x} dx$.*

4 Quelques critères de convergence

4.1 Règle de D'Alembert

Proposition 4.1.1 (Règle de D'Alembert) *On suppose que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* *à termes strictement positifs* *à partir d'un certain rang.*

1. *Si* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *admet une limite* $\ell < 1$, *alors la série* $\sum u_n$ *converge.*
2. *Si* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *admet une limite* $\ell > 1$ *(y compris* $\ell = +\infty$*), alors la série* $\sum u_n$ *diverge grossièrement avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration :

1.

2. On suppose $\ell > 1$ (y compris $\ell = +\infty$). Comme précédemment, en changeant le sens des inégalités on peut trouver $q > 1$ ($q = \dfrac{1+\ell}{2}$ si ℓ est réel ou $q = 2$ si $\ell = +\infty$), tel que :
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N+1,\ u_n \geq u_N q^{n-N} = (u_N q^{-N})q^n$. Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Remarque 4.1.1 *1. La règle de d'Alembert ne donne aucun renseignements si on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, *par exemple :*

On voit même que si on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, *cela permet pas de conclure.*

2. Attention la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *n'existe pas forcément.*

3. En pratique le calcul de la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *est plus facile à faire si la suite* (u_n) *est définie à l'aide de produits, de quotients, de puissances et de factoriels car il peut y avoir des simplifiactions.*

Exemple 4.1.1 *1. Étudier la nature* $\sum \dfrac{n!}{n^n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et on pose* $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ *qui est strictement positif. On a :*
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.
Or $-n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim -n \times \dfrac{1}{n} = -1$, *donc :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} < 1$. *Donc* $\sum u_n$ *converge grâce à la règle de d'Alembert.*

2. Étudier la nature $\sum \dfrac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)...(1+a^n)}$, *avec* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$. Quelle est la nature de $\sum f(n)$?

Remarque 4.1.2 *Dans l'avant dernier exemple, on voit que pour étudier un produit infini, c'est-à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} u_k$ avec u_k strictement positif, on passe à la forme exponentielle qui nous permet de nous ramener à l'étude d'une série, car : $\prod\limits_{k=0}^{n} u_k = e^{\ln(\prod_{k=0}^{n} u_k)} = e^{\sum_{k=0}^{n} \ln(u_k)}$.*

Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, si nous avons un développement asymptotique de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, nous pouvons utiliser la méthode suivante (de Duhamel) pour obtenir un équivalent ou une domination de u_n à l'aide de $\dfrac{K}{n^\alpha}$. Voici deux situations.

Exemple 4.1.2 *1. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n = n^\beta u_n$. Déterminer β pour que $\sum \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ converge.

(b) En déduire un équivalent de (u_n), puis discuter la convergence de $\sum u_n$.

2. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. En s'inspirant de l'exemple précédent, montrer que $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

Comme la règle de D'Alembert s'applique à des séries à termes positifs, nous pouvons l'utiliser pour prouver l'absolue convergence :

1. Si $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ admet une limite $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge (absolument).
2. Si $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ admet une limite $\ell > 1$ (y compris $\ell = +\infty$), alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement, car $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.

Exemple 4.1.3 *Nature de la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$, avec z dans $\mathbb{C}$. On appelera e^z la somme de cette série.*

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a : $\dfrac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{n!}\right|} = \dfrac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{|z|^n} = \dfrac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$. Grâce à la règle de d'Alembert $\sum \left|\dfrac{z^n}{n!}\right|$ converge, puis $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument (pas de problème de convergence si $z = 0$).

4.2 Théorème spécial des séries alternées (rappels de sup)

Définition 4.2.1 (Série alternée) *On appelle **série alternée** toute série de la forme $\sum (-1)^n u_n$, avec (u_n) une suite positive.*

Proposition 4.2.1 (Théorème spécial des séries alternées) *Si la suite (u_n) est décroissante et de limite nulle, alors la série alternée $\sum (-1)^n u_n$ converge.*

Dans ce cas, le reste $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est du signe de son premier terme $(-1)^{N+1} u_{N+1}$ et on a

$$0 \leq |R_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n\right| \leq u_{N+1}.$$

Remarque 4.2.1 *Dans ce cas, $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est est positif et $0 \leq S \leq u_0$.*

Exemple 4.2.1 *1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si α est dans $\mathbb{R}_+^*$. Si $\alpha \leq 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = n^{-\alpha} \geq 1$, ce qui donne la divergence grossière.*

Si α est dans $\mathbb{R}_+^*$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geq 0}$ est décroissante de limite nulle, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Donner une somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *qui soit une approximation de* $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *à* 10^{-2} *près.* *On a :* $|S - S_N| = |R_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{N+1}}$, *grâce au TSSA* $((1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante de limite nulle).*

Or : $\frac{1}{\sqrt{N+1}} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{N+1} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow 10^4 \leq N+1 \Leftrightarrow 9999 \leq N$. *Ainsi* S_{9999} *est une approximation de* S *à* 10^{-2} *près.*

2. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *et on pose* $R_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^\alpha}$, *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

   Cela a bien un sens grâce au TSSA

   (a) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *fixé et on pose :* $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ v_p = \frac{1}{(p+n)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+1)^\alpha}$. *Montrer la convergence de* $\sum_{p\geq 0} (-1)^p v_p$. *Quel est le signe de la somme ?*

   (b) *Montrer que* $\sum_{n\geq 1} R_n$ *converge.*

   (c) *Déterminer un équivalent de* R_n.

3. *Quel est le signe de* $I = \displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ *?*

Remarque 4.2.2 *En pratique, il ne faut pas vouloir à tout prix appliquer directement le théorème spécial des séries alternées. Parfois, nous devons effectuer un petit travail sur l'expression pour se ramener à une application simple du théorème spécial des séries alternées. On rencontrera assez souvent la situation d'une suite* (u_n) *compliqueé (la monotonie de* $|u_n|$ *ne sera pas simple à établir), mais que l'on peut décomposer sous la forme :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n v_n + w_n$*, avec* v_n *simple tel que* $\sum (-1)^n v_n$ *vérifie le théorème spécial des séries alternées et* $\sum w_n$ *une série absolument convergente ou à termes de signe constant. Ceci s'obtient en général avec une développement asymptotique à deux termes.*

Exemple 4.2.2

1. *Nature de la série* $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$*, avec* $\alpha > 0$.

2. *Nature de* $\sum u_n$*, avec* $u_n = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \dfrac{\pi}{6}$*, où* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

   Grâce à la formule de Taylor-Young appliquée à Arccos *qui est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $]-1,1[$ *:* $\operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + h\right) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{Arccos}'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) h + \dfrac{\operatorname{Arccos}''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} h^2 + o(h^2) =$
   $\dfrac{\pi}{6} + ah + bh^2 + o(h^2)$*, avec* a, b *des réels non nuls.*
   On a donc pour n *suffisament grand (pour avoir* $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *dans* $]-1,1[$*) :*
   $u_n = -a\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} + b\dfrac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)$*. De la même manière que dans l'exemple précédent,* $\sum u_n$ *converge si et seulement si* $2\alpha > 1$ *soit* $\alpha > 1/2$.

3. *Étude de la convergence de* $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

5 Familles sommables (rappels de sup)

5.1 Familles sommables positives

Dans ce paragraphe, I désignera un ensemble.

Définition 5.1.1 (Famille sommable de réels positifs) *On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels positifs est sommable lorsqu'il existe un nombre réel positif M tel que, pour toute partie finie $J \subset I$, on ait : $\sum_{j\in J} u_j \leq M$. On définit alors la somme de la famille par :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_{\substack{J\subset I \\ J \text{ fini}}} \sum_{j\in J} u_j.$$

<u>Notation :</u> si une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs n'est pas sommable, on écrira $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Proposition 5.1.1 (Lien entre sommabilité et convergence d'une série) *Une famille positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (indexée par $\mathbb{N}$) est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente. Dans ce cas :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Proposition 5.1.2 (Invariance par permutation) *Soit $\sigma : I \to I$ une bijection et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. On a dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

Proposition 5.1.3 (Opérations sur les sommes) *Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de $\mathbb{R}_+$, alors dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on a :*

1. $\sum_{i\in I}(u_i + v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \sum_{i\in I}(\lambda u_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i$.

Proposition 5.1.4 (Sommation par paquets pour les familles de réels positifs) *Soit J un ensemble. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. Alors dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on a la relation :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} u_i \right).$$

Remarque 5.1.1 *La famille* $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable si et seulement si pour tout* j *de* J*, la famille* $(u_i)_{i\in I_j}$ *est sommable ainsi que* $\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$.

Exemple 5.1.1 *Étudier la sommabilité de* $\left(\dfrac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$*, avec* $\alpha\in\mathbb{R}$.

Posons $u_{p,q} = \dfrac{1}{(p+q+1)^\alpha}$*, pour* $p,q\in\mathbb{N}$*. Pour* $n\in\mathbb{N}$*, on note* $\Delta_n = \{(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ p+q=n\}$ *et* $s_n = \sum_{(p,q)\in\Delta_n} u_{p,q} = \sum_{p+q=n} \dfrac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} = \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$*. On remarque l'union disjointe* $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$*, donc la famille positive* $\left(\dfrac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$ *est sommable si et seulement si* $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n$ *converge (par sommation par paquets), ce qui équivaut à* $\alpha-1>1$*, soit* $\alpha>2$.

Corollaire 5.1.1 (Théorème de Fubini positif) *Soient* I *et* J *deux ensembles,* $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ *une famille de réels positifs. Alors on a dans* $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ *:*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right).$$

Exemple 5.1.2 *Soient* $a,b\in\mathbb{R}_+^*$*. À quelles conditions sur* a *et* b *la famille* $\left(\dfrac{1}{a^m+b^n}\right)_{m,n\geq 0}$ *est sommable ?*

Corollaire 5.1.2 (Produit de familles positives) *Soient I et J des ensembles, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles de réels positifs. Alors on a dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I} a_i \sum_{j\in J} b_j.$$

Exemple 5.1.3 1. *Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable et calculer sa somme.*

2. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et on pose $A_d = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ p \wedge q = d\}$ et $S_d = \displaystyle\sum_{(p,q)\in A_d} \frac{1}{p^2q^2}$. Montrer que $S_d = \dfrac{S_1}{d^4}$.*

3. *On donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Calculer S_1.*

5.2 Familles sommables dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 5.2.1 (Famille sommable de réels ou complexes) *Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels ou complexes est dite sommable lorsque la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable,*
soit $\displaystyle\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$.
Pour une famille réelle, si on note : $\forall i \in I,\ u_i^+ = \max(0, u_i)$ et : $\forall i \in I,\ u_i^- = \max(0, -u_i)$, alors les familles positives $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables et on pose :

$$\sum_{k\in I} u_i = \sum_{k\in I} u_i^+ - \sum_{k\in I} u_i^-.$$

On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables de nombres complexes $(u_i)_{i\in I}$.

Remarque 5.2.1 *Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et si ε est dans $\mathbb{R}_+^*$, alors il existe une partie finie F de I telle que : $\left|\displaystyle\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F} u_i\right| \leq \varepsilon$.*

Proposition 5.2.1 (Condition de sommablité d'une famille complexe) *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille complexe. Elle est sommable si et seulement si $(Re(u_i))_{i\in I}$ et $(Im(u_i))_{i\in I}$ sont sommables.*

Définition 5.2.2 (Somme d'une famille complexe) *Soit $(u_k)_{k\in I}$ une famille complexe sommable. On pose alors :*

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} Re(u_k) + i \sum_{k\in I} Im(u_k).$$

Proposition 5.2.2 (Sommabilité et comparaison) *Soient I un ensemble, $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes et $(v_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres réels positifs telles que :*

$$\forall i \in I, \quad |u_i| \leq v_i.$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

Proposition 5.2.3 (Lien entre sommabilité et convergence d'une série) *Une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (indexée par $\mathbb{N}$) est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente.*

Dans ce cas : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 5.2.4 (Somme par permutation des termes) *Soient I un ensemble et $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Pour toute permutation σ de I, la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est également sommable et on a :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

Remarque 5.2.2 *La condition de sommabilité est indispensable à la validité de la proposition précédente. Considérons la série semi-convergente $\sum x_n$ avec $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ et soit S sa somme (on montrera plus tard dans l'année que $S = \ln 2$). Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ définie par $\varphi(3k+1) = 2k+1$, $\varphi(3k+2) = 4k+2$ et $\varphi(3k+3) = 4k+4$. On vérifie que φ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ (sa bijection réciproque est définie par $\psi(4k+4) = 3k+3, \psi(4k+2) = 3k+2, \psi(4k+1) = 6k+1$ et $\psi(4k+3) = 6k+4$).*
Sommons alors par paquets de 3 la série $\sum x_{\varphi(n)}$. On a : $x_{\varphi(3k+1)} + x_{\varphi(3k+2)} + x_{\varphi(3k+3)} = \dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{4k+2} - \dfrac{1}{4k+4} = \dfrac{1}{4k+2} - \dfrac{1}{4k+4} = \dfrac{1}{2(2k+1)(2k+2)} = O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. La série donnée par ces paquets converge et son terme général vaut aussi $\dfrac{1}{2}(x_{2k+1} + x_{2k+2})$ et donc sa somme vaut $S/2$, qui est différent de S.

Proposition 5.2.5 (Linéarité de la somme) *$\ell^1(I)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application $(u_k)_{k\in I} \mapsto \displaystyle\sum_{k\in I} u_k$ est une forme linéaire sur $\ell^1(I)$.*
Autrement dit, si $(u_k)_{k\in I}$ et $(v_k)_{k\in I}$ de $\ell^1(I)$ et λ, μ deux éléments de $\mathbb{K}$, alors :

$$\sum_{k\in I} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k\in I} u_k + \mu \sum_{k\in I} v_k.$$

Proposition 5.2.6 (Sommation par paquets, pour les familles de nombres complexes) *Soient J un ensemble et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. Alors si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors :*

1. *Pour tout $j \in J$, la sous-famille $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable.*
2. *La famille $\left(\displaystyle\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable.*

Dans ce cas :

$$\sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$$

Remarque 5.2.3 *Une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si les deux séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{-n}$ sont absolument convergentes. En effet, $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ l'est, ce qui* *par sommation par paquets via la partition de $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{N}$ et $-\mathbb{N}^*$ est équivalent à la sommabilité de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|u_{-n}|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (famille positive) et donc de l'absolue convergence de $\sum u_n$ et $\sum u_{-n}$. Dans ce cas :* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

Exemple 5.2.1 *Si $\alpha > 1$, si on pose $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ et $\phi(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, montrer que : $\phi(\alpha) = \left(\dfrac{1}{2^{\alpha-1}} - 1\right)\zeta(\alpha)$.*

La famille $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, car la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, converge. Soient $I = \{2k+1,\ k\in\mathbb{N}\}$ et $P = \{2k,\ k\in\mathbb{N}^*\}$. Ainsi $\mathbb{N}^* = I \cup P$ et nous pouvons effectuer la sommation par paquets : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = \sum_{n\in P} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \sum_{n\in I} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)^\alpha} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^\alpha}$. On conclut ensuite comme dans l'exemple 4.2.1.

Corollaire 5.2.1 (Théorème de Fubini) *Soient I et J deux ensembles, $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille sommable. On a alors pour tout i de I et pour tout j de J, les famille $(u_{k,j})_{k\in I}$ et $(u_{i,k})_{k\in J}$ sont sommables et :*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right).$$

Corollaire 5.2.2 (Produit de familles sommables) *Soient I et J des ensembles, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles sommables. Alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I} a_i \sum_{j\in J} b_j.$$

Exemple 5.2.2
1. *(a) Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. Montrer que la famille $(z^{pq})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.*
   (b) Pour chaque n de $\mathbb{N}^*$, $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que pour $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d(n) z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$.

2. *Soit $z \in \mathbb{C} \setminus Z_-$. Montrer que :* $e\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(z+p)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{z(z+1)...(z+k)}$.

5.3 Produit de Cauchy de deux séries

Définition 5.3.1 (Produit de Cauchy) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes. On appelle produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série de terme général*

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} u_{n-p} v_p.$$

Proposition 5.3.1 (Expression du produit de Cauchy) *Dans les conditions précédentes, si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ est aussi absolument convergente et on a :* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$.

Corollaire 5.3.1 *On a :* $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, *où l'on a posé* $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

Exemple 5.3.1 *On pose* $w_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p!(n-p)^2}$ *pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer la convergence de la série* $\sum_{n \geq 1} w_n$ *et donner sa somme.*

Soit $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$*. Les séries* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *convergent absolument* *(*$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |b_n| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = e^1$*). Or on a :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1} b_p a_{n-p}$*, donc la série* $\sum\limits_{n\geq 1} w_n$ *converge et* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\right) \cdot \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\right) = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}\right) = e^{-1} \times \dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{\pi^2 e^{-1}}{6}$.

6 Formule de Stirling

Théorème 6.0.1 (Formule de Stirling) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Démonstration :

1. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$.

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, Établir la relation $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

b. En déduire que : que : $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}$.

2. Montrer l'existence d'un C de $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$. On pourra s'inspirer de la méthode de l'exemple 4.1.2.

3. **a.** Montrer que $I_{2p} I_{2p+1} \sim \frac{\pi}{4p}$.

b. Montrer que $I_{2p} \sim I_{2p+1}$.

c. Montrer que $C = \sqrt{2\pi}$.

1. **a.**

b.

2. ***a.*** En utilisant les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1}, on a : $I_{2p}I_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} \times \frac{\pi}{2}$ et donc : $I_{2p}I_{2p+1} \sim \dfrac{\pi}{4p}$.

b. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, car :

$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin^{n+1} x - \sin^n x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x(\sin(x) - 1)dx$. Or la fonction sin est positive sur $[0, \pi/2]$ et la fonction $\sin -1$ est négative sur ce même intervalle.

Comme I_{2p} est strictement positif, alors : $\forall p \in \mathbb{N},\ \frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \leq \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leq 1$

Grâce à la question **1.a.** nous avons : $\frac{2p+1}{2p+2} \leq \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leq 1$. En passant à la limite, on a : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$ et donc : $I_{2p} \sim I_{2p+1}$.

c. Les questions **3.a.** et **3.c.** donnent : $I_{2p}^2 \sim \dfrac{\pi}{4p}$. En utilisant la question **2.**, on a aussi $I_{2p}^2 \sim \left(\dfrac{C(2p)^{2p+\frac{1}{2}}e^{-2p}}{4^p C^2 p^{2p+1}e^{-2p}}\right)^2 \times \dfrac{\pi^2}{4} = \left(\dfrac{2^{2p+\frac{1}{2}}p^{2p+\frac{1}{2}}}{2^{2p}Cp^{2p+1}}\right)^2 \times \dfrac{\pi^2}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{C\sqrt{p}}\right)^2 \times \dfrac{\pi^2}{4} = \dfrac{\pi^2}{2C^2 p}$. En identidiant les deux équivalents, on a : $\dfrac{\pi^2}{2C^2} = \dfrac{\pi}{4}$ et donc $\boxed{C = \sqrt{2\pi}}$.

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Exemple 6.0.1 *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $k_d = \left\lfloor \sqrt{d}x \right\rfloor$ et $u_d = \dfrac{d!}{d^{k_d}(d-k_d)!}$ pour $d \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de la suite $(u_d)_{d\geq 1}$.*

7 Compléments sur les suites et les séries

7.1 Étude de suites définies implicitement

Il s'agit de trouver des suites (x_n) solutions d'une équation (E_n) dépendant de n. On vous demande ensuite de déterminer un développement asymptotique de cette suite.
La méthode est toujours la même. On étudie d'abord l'existence et l'unicité de la solution de chaque équation (E_n), ce qui nous permet de définir la suite (x_n). On étudie ensuite la monotonie de la suite pour pouvoir prouver l'existence d'une limite ℓ, puis on recherche ℓ en général en faisant des passages à

la limite dans les équations (E_n) . Si ℓ est réel, on peut déjà écrire $x_n = \ell + o(1)$. On cherche ensuite un équivalent de $v_n = x_n - \ell$ si ℓ est réel en faisant apparaître dans les (E_n) la suite v_n. Si on a $v_n \sim w_n$, alors $x_n = \ell + w_n + o(w_n)$. Si nous voulons d'autres termes dans le développement asymptotique, nous cherchons un équivalent de $t_n = x_n - \ell - w_n$, en faisant apparaître t_n dans l'équation, comme précédemment, puis on continue ainsi de suite jusqu'à avoir le bon nombre de termes. Si ℓ vaut $\pm\infty$, on cherche un équivalent de x_n, puis ensuite on procède de la même façon pour avoir d'autres termes d'un développement asymptotique. Étudions un exemple.

Exemple 7.1.1 *Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'équation $x\sin(x) - c\cos(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $\left]n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$. Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.*

7.2 Équivalents de suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Nous cherchons un équivalent de u_n, dans le cas où l'on a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (si (u_n) converge vers ℓ non nul, il faut se ramener à cette situation en considérant la relation $u_{n+1} - \ell = f(u_n) - \ell = f(u_n - \ell + \ell) - \ell = g(u_n - \ell)$, avec $g : x \mapsto f(x + \ell) - \ell$, ce qui donne une suite récurrente du type $v_{n+1} = g(v_n)$, avec (v_n) qui converge vers 0 si l'on considère $v_n = u_n - \ell$).
Il faut ensuite chercher $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_{n+1}^\alpha - v_n^\alpha) = \beta$, avec β un réel non nul. La sommation des équivalents pour les séries positives divergentes donne : $v_n^\alpha - v_0^\alpha \sim n\beta$ et donc $v_n^\alpha = v_0^\alpha + n\beta + o(n)$ et donc $v_n^\alpha \sim n\beta$ et donc $v_n \sim (n\beta)^{1/\alpha}$.

Exemple 7.2.1 *On reprend l'exemple 1.4.1, avec $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$, avec $u_0 \in \mathbb{R}^*$. Nous avons vu que l'on a toujours $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Déterminer un développement asymtotique à deux termes de u_n.*

7.3 Transformation d'Abel

1. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que :
   - La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit réelle, décroissante et de limite nulle.
   - La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit telle que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de $\sum b_n$ soit bornée.

   Montrer la transformation d'Abel : $\forall N \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_N B_N$.

   En déduire que $\sum a_n b_n$ converge.

2. Application : Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$, avec α dans $\mathbb{R}_+^*$ et θ dans $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

8 Récapitulatif méthodologique

8.1 Nature d'une série

Pour étudier la convergence d'une série $\sum u_n$, on pourra se poser dans l'ordre les questions suivantes :

1. Y-a-t-il divergence grossière ? En cas de réponse positive, l'étude est finie.
2. En cas de réponse négative, on distinguera deux cas de figure.

   Si la série est à termes positifs
   - Règle de d'Alembert lorsqu'il y a des puissances ou des produits : exemple 4.1.1.
   - Les tests de comparaison avec une série de Riemann ou géométrique, voir exemple 2.4.1, en essayant d'abord de trouver un équivalent et en cas d'échec trouver o ou O.
   - Peut-on comparer la série à une intégrale par la méthode des rectangles ? Dans ce cas là il faut que l'on puisse calculer une primitive de la fonction associée. Voir les séries de Bertrand dans l'exemple 3.1.3.

   Si le signe de u_n est variable
   - La série est-elle absolument convergente ? On utilisera pour cela les tests de comparaison pour les séries à termes positifs, voir l'exemple 2.5.1.
   - Le critère spécial des séries alternées est-il appliquable ? Voir l'exemple 4.2.1.
   - Peut-on obtenir un développement asymptotique du terme général (par exemple on peut faire apparaître la somme d'une série alternée et d'une série absolument convergente). Voir l'exemple 4.2.2 avec $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.
   - Utiliser une transformation d'Abel qu'il faudra redémontrer.

8.2 Calcul d'une somme dans le cas de la convergence de la série

- On reconnaît une série connue géométrique, exponentielle (ou autre quand on abordera les séries entières). Voir l'exemple 2.3.1
- Revenir aux sommes partielles et utiliser un téléscopage : exemple 2.3.2
- Séparer les termes d'indice pair et impair, en revenant soit aux sommes partielles, soit en donnant un argument de sommabilité : exemples 4.2.1 ou 5.2.1, avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

8.3 Recherche d'équivalents de sommes partielles de séries divergentes

- Penser à la comparaison série/intégrale pour une fonction décroissante, continue et positive : exemple 3.1.1.
- Sommation des équivalents pour une série à termes positifs : remarque 2.6.1, avec $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.