1 Rappels de sup sur les fonctions usuelles

1.1 Les fonctions Arcsin, Arccos et Arctan

Définition 1.1.1 (Fonction Arc sinus) *La fonction sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle* $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. *Ainsi la fonction* sin *réalise une bijection de* $[-\pi/2,\pi/2]$ *dans* $[-1,1]$ *et donc elle admet donc une fonction réciproque appelée* ***Arc sinus*** *définie de* $[-1;1]$ *dans* $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. *Cette fonction est notée* Arcsin.
De plus Arcsin *est continue sur* $[-1,1]$.

Remarque 1.1.1 *Ainsi pour tout* $x \in [-1;1]$, $\operatorname{Arcsin} x$ *est l'unique élément de* $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ *dont le sinus vaut* x.

Définition 1.1.2 (Fonction Arc cosinus) *La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle* $[0;\pi]$. *Elle réalise donc une bijection de* $[0,\pi]$ *dans* $[-1,1]$ *et donc elle admet une fonction réciproque appelée* ***Arc cosinus*** *définie de* $[-1;1]$ *dans* $[0;\pi]$. *Cette fonction est notée* Arccos.
De plus Arccos *est continue sur* $[-1,1]$.

Remarque 1.1.2 *Ainsi, pour tout* $x \in [-1;1]$, $\operatorname{Arccos} x$ *est l'unique élément de* $[0;\pi]$ *dont le cosinus vaut* x.

Définition 1.1.3 (Fonction Arc tangente) *La fonction tangente est continue et strictement croissante sur l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. *Elle réalise donc une bijection de* $]-\pi/2,\pi/2[$ *dans* $\mathbb{R}$ *et donc elle admet une fonction réciproque appelée* ***Arc tangente*** *définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. *Cette fonction est notée* Arctan.

Remarque 1.1.3 *Ainsi, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan} x$ *est l'unique élément de* $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ *dont la tangente vaut* x.

Proposition 1.1.1 (Limites de Arctan) *On a :* $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$

Proposition 1.1.2 (Imparité) *Les fonctions* Arcsin *et* Arctan *sont impaires.*

Remarque 1.1.4 Arccos *n'est ni paire ni impaire.*

Proposition 1.1.3 (Dérivée de ces fonctions) *Les fonctions Arc sinus et Arc cosinus sont dérivables sur* $]-1;1[$ *et pour tout* $y \in]-1;1[$,

$$\operatorname{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{Arccos}'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

La fonction Arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et pour tout* $y \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arctan}'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Exemple 1.1.1 1. *Montrer que pour tout* $x \in [-1;1]$, *on a :* $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$. *Soit* $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x$ *qui est continue sur* $[-1,1]$ *et dérivable sur* $]-1,1[$. *On a :* $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. *Ainsi* f *est constante sur* $]-1,1[$ *et par continuité elle l'est aussi sur* $[-1,1]$. *Enfin :* $f = f(0) = \operatorname{Arcsin}(0) + \operatorname{Arccos}(0) = 0 + \pi/2 = \pi/2$.

2. *Résoudre* (E) : $\text{Arccos}\,(x) = \text{Arcsin}\,(2x)$.

3. ***(Polynômes de Tchebychev)*** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose :* $\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = \cos(n\,\text{Arccos}\,(x))$.
   (a) *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1,1],\ T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$.
   (b) *En déduire que* T_n *est une fonction polynomiale, à coefficients dans* $\mathbb{Z}$, *dont on précisera le degré et le coefficient dominant.*
   (c) *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que :* $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$.
   (d) *Montrer que* T_n *est le seul polynôme vérifiant la relation précédente.*
   (e) *Montrer que :* $\forall m, n \in \mathbb{N},\ T_n \circ T_m = T_{nm}$.
   (f) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Factoriser* T_n *dans* $\mathbb{R}[X]$.
   (g) *Montrer que* $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$.
   (h) *Soit* $n \geq 2$. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *de degré* n *et de coefficient dominant* 2^{n-1}, *tel que :* $M = 1$, *avec* $M = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)|$. *Montrer que* $P = T_n$.

   (a)

   (b) *Soit* $x \in [-1,1]$. *On constate que* $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, *puis :*

   $T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et on pose* $\mathcal{P}(n)$: T_n *est une fonction polynomiale de degré* n, *à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *et de coefficient dominant* 2^{n-1} *(attention* $\mathcal{P}(0)$ *est fausse pour le coefficient dominant).*

   Montrons le résultat par récurrence double.

   $\mathcal{P}(1)$ *et* $\mathcal{P}(2)$ *sont vraies.*

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et on suppose* $\mathcal{P}(n)$ *et* $\mathcal{P}(n+1)$. *Soit* $x \in [-1,1]$. *Il existe* Q_{n+1} *et* Q_n *dans* $\mathbb{Z}[X]$ *tel que :* $\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = 2^{n-1}x^n + Q_n(x)$ *et* $T_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} + Q_{n+1}(x)$.

   On a : $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) = 2x(2^n x^{n+1} + Q_{n+1}(x)) - (2^{n-1}x^n + Q_n(x)) = 2^{n+1}x^{n+2} + \underbrace{2xQ_{n+1}(x) - Q_n(x)}_{\text{polynôme de degré au plus } n+1 \text{ dans } \mathbb{Z}[X]}$. *Ainsi*

   T_{n+2} *est bien une fonction polynôme par opérations, qui est de degré* $n+2$ *et de coefficient dominant* 2^{n+1}, *d'où* $\mathcal{P}(n+2)$, *ce qui achève la récurrence.*

   (c)

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)

1.2 Les fonctions ch, sh et th

Définition 1.2.1 (Cosinus, Sinus, Tangente hyperboliques) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique par*

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

Proposition 1.2.1 (Formule de trigonométrie hyperbolique) *On a :* $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$.

Proposition 1.2.2 (Parité de ch, sh et th) *La fonction ch est paire et les fonctions sh et th sont impaires.*

Proposition 1.2.3 (Dérivation de ch, sh et th) *Les dérivées des fonctions hyperboliques sont données par*

$$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}, \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}, \ \operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}.$$

Proposition 1.2.4 (Limites de ch, sh et th en $\pm\infty$) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1$.

Corollaire 1.2.1 (Monotonie de ch, sh et th) *La fonction sh est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
La fonction ch est strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[1; +\infty[$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1; +\infty[$.
La fonction th est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.

Exemple 1.2.1 *Déterminer sh^{-1}.*

1.3 Quelques inégalités

Proposition 1.3.1 (Inégalités) *On a :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \ |\sin(x)| \leq |x|$.
2. $\forall x \in]-1, +\infty[, \ \ln(1 + x) \leq x$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp(x) \geq 1 + x$.

2 Rappels de sup sur les théorèmes de continuité

Définition 2.0.1 (Continuité) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction avec I un intervalle. On dit que f est continue en $x_0 \in I$, si : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$;*
autrement dit :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \alpha > 0 \ ; \ \forall x \in I, \ \ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Proposition 2.0.1 (Caractérisation séquentielle) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction avec I un intervalle. f est continue en $x_0 \in I$ si et seulement si pour toute suite (u_n) de limite x_0 et à valeurs dans I, la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(x_0)$.*

Théorème 2.0.1 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tout a, b appartenant à I, avec $a < b$ et tout nombre y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $y = f(c)$.*

Corollaire 2.0.1 (Image d'un intervalle) *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Exemple 2.0.1 *Soient f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f de signe constant. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt = g(c)\int_a^b f(t)dt$.*

Corollaire 2.0.2 (Annulation d'une fonction continue) *On suppose que f est dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et qu'il existe $(a,b) \in I^2$ tel que l'on ait : $a < b$ et $f(a)f(b) \leq 0$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a;b]$. Ainsi si f change de signe, alors elle s'annule au moins une fois.*

Corollaire 2.0.3 (Signe d'une fonction continue) *On suppose que f est dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et qu'elle ne s'annule jamais sur I. Alors f est de signe constant sur I*

Exemple 2.0.2 *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Un tel x_0* ***s'appelle point fixe de*** *f.*

Soit $g : x \mapsto f(x) - x$ qui est continue par opération. On a : $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$, car $f(0)$ et $f(1)$ sont dans $[0,1]$. Comme g change de signe, alors il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que : $g(x_0) = 0$, puis $f(x_0) = x_0$.

Théorème 2.0.2 (Théorème de la bijection) *On suppose que f est dans $\mathcal{C}(I)$ et elle est strictement monotone. Soit $J = f(I)$ qui est donc un intervalle. Alors :*

1. *f est une bijection de I sur J.*
2. *$f^{-1} : J \to I$ est une fonction continue sur J et de même monotonie.*

Proposition 2.0.2 (Fonctions injectives et monotonie) *Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone.*

Exemple 2.0.3 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$.*

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = ax + b \quad (*)$. Montrer que $a > 0$.*
2. *Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1$ vérifiant $(*)$.*

Théorème 2.0.3 (Théorème de la borne atteinte) *Toute fonction continue f sur $[a,b]$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes.*

Exemple 2.0.4 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continue. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f^n(t)dt\right)^{\frac{1}{n}}$.*

3 Rappels de sup sur les théorèmes de dérivation

3.0.1 Dérivation de la réciproque

Proposition 3.0.1 (Dérivation de la réciproque) *On suppose f continue et strictement monotone et on note $J = f(I)$ (qui est un intervalle). Ainsi f réalise une bijection de I dans J.*

1. *On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a)$ est non nul. Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ (et $a = f^{-1}(b)$) et on a : $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.*
2. *Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule jamais sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et on a : $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.*
3. *Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et que f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} existe et est définie sur l'intervalle $J = f(I)$ et f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^n$.*

Exemple 3.0.1 (Fonction de Lambert)

1. *Montrer que* $f : x \mapsto xe^x$ *admet une fonction réciproque sur* $[-1+\infty[$, *que l'on notera* W *(fonction de Lambert). On précisera son ensemble de définition* I. *Montrer que* f *est continue sur* I *et de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\overset{\circ}{I}$.
2. *Trouver une équation différentielle vérifiée par* W.
3. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{W(-e^{-1}+h) - W(-e^{-1})}{h}$.
4. *Montrer que* W *admet un* $DL_3(0)$.
5. *Donner un développement asymptotique à deux termes de* W *en* $+\infty$ *et en* $-e^{-1}$.

3.0.2 Théorème de Rolle

Théorème 3.0.1 (Théorème de Rolle) *Soit $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a)=f(b)$. Alors il existe c dans $]a,b[$ tel que : $f'(c)=0$.*

Exemple 3.0.2

1. (a) *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ s'annulant en $k+1$ points $a_0<a_1<...<a_k$. Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $f^{(k)}(c)=0$.*

   (b) *Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=(x-a_1)...(x-a_k)\dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$.*

2. ***(Théorème de Rolle généralisé)*** *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{-\infty} f=\ell\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $f'(c)=0$.*

3.0.3 Inégalité et égalité des accroissements finis

Théorème 3.0.2 (Égalité des accroissements finis (EAF)) ***(Énoncé CCP 4)*** *Soit $f\in\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe c dans $]a,b[$ tel que : $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.*

Exemple 3.0.3

1. *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, avec $f:x\mapsto\left(\sin\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-\sin\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right)x$.*

2. *Soient* $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. *Pour* $f \in E$, *on pose* $\Delta f : x \mapsto f(x+1) - f(x)$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, *il existe* $\theta \in]0,1[$ *tel que* $\Delta^n f(x) = f^{(n)}(x + n\theta)$.

Théorème 3.0.3 (Inégalité des accroissements finis (IAF)) *Soit* $f \in \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$ *continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$. *On suppose qu'il existe des réels* m *et* M *tels que sur* $]a,b[$, *on ait :* $m \leq f' \leq M$. *Alors on a :*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Corollaire 3.0.1 (Inégalité des accroissements finis (IAF)) *Soit* I *un intervalle et* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *dérivable sur* I. *On suppose qu'il existe* k *dans* $\mathbb{R}_+$ *tel que :* $\forall x \in I, \ |f'(x)| \leq k$. *Alors* f *est* k*-lipschitzienne :* $\forall x, y \in I, \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Exemple 3.0.4 *Si* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a,b]$, *alors* f *est lipschitzienne sur* $[a,b]$.

f' est donc continue sur le segment $[a,b]$, donc elle y est bornée, donc il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in [a,b], \ |f'(x)| \leq k$. Ainsi f est dérivable sur $[a,b]$ et sur cet intervalle $|f'| \leq k$. Ainsi grâce aux IAF, f est k-lipschitzienne.

3.0.4 Théorème de la limite de la dérivée

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Définition 3.0.1 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$) *Soit* $f : I \to \mathbb{C}$ *une fonction. On dit que* f *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *sur* I *si* $f^{(n)}$ *existe et est continue sur* I.
On dit que f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* I *si elle est indéfiniment dérivable sur* I, *c'est-à-dire que pour tout pour tout* n *de* $\mathbb{N}$, f *est* n *fois dérivable.*

Théorème 3.0.4 (Théorème de la limite de la dérivée)

1. *Soit* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, *continue sur* I *et dérivable sur* $I \setminus \{a\}$ *et* $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. *Alors :* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.
2. *Soit* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, *continue sur* I *et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $I \setminus \{a\}$. *On suppose que :* $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$. *Alors* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *et* $f'(a) = \ell$.

Exemple 3.0.5

1. *ATTENTION, la réciproque est fausse : f dérivable en x_0 n'implique pas que f' a une limite finie en x_0. Voici un contrexemple :* $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$.

2. *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :* $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$.

   (a) *Montrer pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :* $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$.

   (b) *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \ f^{(n)}(0) = 0$.

3.0.5 Complément : application aux suites récurrentes avec une fonction contractante

Dans ce paragraphe, on considère $f : I \to I$ une fonction et on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Le but de ce paragraphe est l'étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 3.0.2 (Fonction contractante) *On dit que $f : I \to I$ est contractante, si elle est k-lipschitzienne ($\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$), avec k dans $[0; 1[$.*

Proposition 3.0.2 (Convergence des suites récurrente dans le cas contractant) *Soit $f : I \to I$ dérivable. On suppose qu'il existe $k \in [0; 1[$ tel que : $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq k$.*
On suppose qu'il existe $\alpha \in I$ tel que l'on ait : $f(\alpha) = \alpha$. Alors f est contractante et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$$

et donc la suite (u_n) converge vers α.

Démonstration : À refaire à chaque fois : grâce aux IAF, f est k-lipschitzienne. Montrons par récurrence le deuxième résultat.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et on note $\mathcal{P}(n) : |u_n - \alpha| \leq k^n|u_0 - \alpha|$.
$\mathcal{P}(0) : |u_0 - \alpha| = k^0|u_0 - \alpha|$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Comme f est k-lipschitzienne, alors :
$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha| \leq k^{n+1}|u_0 - \alpha|$, grâce à $\mathcal{P}(n)$. Ainsi on a $\mathcal{P}(n + 1)$, ce qui achève la récurrence.

Remarque 3.0.1

1. *Il faut avoir absolument $k < 1$, avec l'inégalité stricte.*
2. *ATTENTION ! si on a : $\forall x \in I, |f'(x)| < 1$ cela n'implique pas : $\exists k \in [0, 1[,\ \forall x \in I, |f'(x)| \leq k$. Par exemple si $f'(x) = x/2$ sur $I = [0, 2[$, on a bien $\forall x \in I, |f'(x)| < 1$, sans avoir : $\exists k \in [0, 1[,\ \forall x \in I, |f'(x)| \leq k$.*
3. *On peut aussi démontrer que f admet un unique point fixe. • Pour l'unicité : si β est un autre point fixe, alors comme f est contractante on a : $|\alpha - \beta| \leq k|\alpha - \beta|$ et donc on a : $(1 - k)|\alpha - \beta| \leq 0$. Comme $(1 - k)$ est strictement positif, alors $|\alpha - \beta|$ est négatif et donc nul. Ainsi on a : $\alpha = \beta$.*
   • Pour l'existence : on repreend la suite (u_n). On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| \leq k^n|u_1 - u_0|$. Ainsi par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge. Ainsi la série téléscopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge. Ainsi a suite (u_n) converge vers une limite ℓ. Par continuité de f, quand on passe à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on trouve $\ell = f(\ell)$.
   Donc si vous trouvez un point fixe de f, c'est le seul .
4. *Pour trouver un point fixe d'une fonction f contractante, nous nous fixons un u_0 de son ensemble de définition, puis nous étudions la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le seul point fixe de la fonction f.*

Ainsi l'étude se déroule de la façon suivante :

- Vérifier que : $f(I) \subset I$, pour que la suite soit bien définie.
- Dériver f et majorer $|f'|$ par un réel dans $[0; 1[$ sur un intervalle qui contient tous les u_n à partir d'un certain rang.
- Trouver le point fixe de f.
- Conclure à l'aide de la proposition précédente que l'on aura redémontrée.

Exemple 3.0.6

1. *Montrer que le polynôme $X^3 + 2X - 2$ admet une unique racine x_0 réelle qui de plus est dans $[0, 1]$. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n^2 + 2}$. Montrer que (u_n) converge et en déduire une approximation rationnelle de x_0 à 10^{-2} près.*

Soit $g : x \mapsto x^3 + 2x - 2$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante (somme de $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto 2x$ qui sont strictement croissantes et d'une constante). De plus $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$. Grâce au théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0. De plus $g(0) = -2 < 0$ et $g(1) = 1 > 0$, donc : $x_0 \in [0, 1]$.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{2}{x^2+2}$. On a : $f([0,1]) \subset [0,1]$.

On constate que $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{2}{\alpha^2+2} \Leftrightarrow \alpha^3 + 2\alpha = 2 \Leftrightarrow g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = x_0$, donc x_0 est point fixe de f. On a : $\forall x \in [0,1],\ f'(x) = -\dfrac{4x}{(x^2+2)^2}$. Si on majore brutalement, on a : $|f'(x)| \leq \dfrac{4}{2^2} = 1$, ce qui n'est pas intéressant, donc il faut étudier plus finement sa dérivée en regardant ses variations. On a :

$\forall x \in [0,1],\ f''(x) = -\dfrac{4(x^2+2)^2 - 4x \times 4x(x^2+2)}{(x^2+2)^4} = -\dfrac{4(x^2+2) - 16x^2}{(x^2+2)^3} = 4\dfrac{3x^2-2}{(x^2+2)^3}$. Ainsi f'' est négative sur $[0, \sqrt{2/3}]$ et positive sur $[\sqrt{2/3}, 1]$, donc f' est décroissante sur $[0, \sqrt{2/3}]$ et croissante sur $[\sqrt{2/3}, 1]$. Comme f' est négative, alors $|f'|$ est maximal en $\sqrt{2/3}$. Or :

$|f'(\sqrt{2/3})| = \dfrac{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{3}+2\right)^2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \frac{8^2}{3^2}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{16} = k$. On a $k < 1$, donc f est dérivable sur $[0,1]$ et $|f'| \leq k$ sur cet intervalle, alors, f est k-lipschitzienne grâce aux IAF.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - x_0| \leq k^n |u_0 - x_0|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on note $\mathcal{P}(n) : |u_n - x_0| \leq k^n |u_0 - x_0|$.

$\mathcal{P}(0) : |u_0 - x_0| = k^0 |u_0 - x_0|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Comme f est k-lipschitzienne, alors :

$|u_{n+1} - x_0| = |f(u_n) - f(x_0)| \leq k|u_n - x_0| \leq k^{n+1}|u_0 - x_0|$, grâce à $\mathcal{P}(n)$. Ainsi on a $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence. Comme $u_0 = 0$ et x_0 est dans $[0,1]$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - x_0| \leq k^n$, et comme k est dans $[0,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$.

Nous allons approcher x_0 à l'aide du calcul de certains termes u_n, mais de combien de termes a-t-on besoin pour avoir une approximation à 10^{-2} près ?

Pour avoir $|u_n - x_0| \leq 10^{-2}$, il suffit d'avoir $k^n \leq 10^{-2}$, soit $n\ln(k) \leq \ln(10^{-2})$, soit $n \geq \dfrac{\ln(10^{-2})}{\ln\left(\frac{3\sqrt{6}}{16}\right)}$, car $\ln(k) < 0$ et donc il suffit de prendre

$n_0 = \left\lfloor \dfrac{\ln(10^{-2})}{\ln\left(\frac{3\sqrt{6}}{16}\right)} \right\rfloor + 1 = 6$. On calcule $u_6 = \dfrac{35703798642}{46588338883}$ qui approche x_0 à 10^{-2} près.

2. *Soient $\lambda \in]0,1[$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = \lambda$. On définit (u_n) par $u_0 \in [0,1]$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que, si u_0 est non nul et assez près de 0, alors (u_n) converge vers 0 et qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \sim C\lambda^n$.*

4 Fonctions convexes

4.1 Fonctions convexes d'une variable réelle

Définition 4.1.1 (Fonctions convexes et concaves) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que f est convexe lorsque :*

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ \forall t \in [0,1], \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \ \leq\ tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

2. *Lorsque $-f$ est convexe, on dit que f est concave, autrement dit :*

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ \forall t \in [0,1], \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \ \geq\ tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Proposition 4.1.1 (Inégalité de Jensen) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et $x_1, ..., x_n \in I$. Alors :*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Remarque 4.1.1 *Si f est concave, alors dans les mêmes conditions que le corollaire précédent, on a : $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.*

Exemple 4.1.1

1. *La fonction* exp *est convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction* ln *définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction* sin *définie sur $[0, \pi/2]$ sont concaves.*
2. *p et q sont deux réels strictement supérieurs à 1 vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1.*
   (a) *Soient x et y deux réels positifs. Montrer que : $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.*
   (b) *Soient $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ des réels. Montrer l'inégalité de Hölder :*
   $$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
   On pourra d'abord envisager le cas où $\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p = \sum_{n=1}^{N} |b_n|^q = 1$.
   (c) *Soient $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ des réels. Montrer que pour tout $p \geq 1$, on a l'inégalité de Minkowski :*
   $$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$
   On pourra remarquer que $|a_n + b_n|^p \leq |a_n| \cdot |a_n + b_n|^{p-1} + |b_n| \cdot |a_n + b_n|^{p-1}$.

   (a)

   (b)

(c) *Ici on pose* $\|a\|_p = \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{1/p}$. *On a :*

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n|.\underbrace{|a_n+b_n|^{p-1}}_{=b'_n} \leq \|a\|_p \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n+b_n|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$
$$\leq \|a\|_p \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n+b_n|^{p}\right)^{1/q},$$

en utilisant l'inégalité de Hölder avec les a_n *et* b'_n.
On procède de même avec l'autre membre de l'indication d'où, en additionnant

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n+b_n|^p \leq [\|a\|_p + \|b\|_q] \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n+b_n|^{p}\right)^{1/q}.$$

On divise alors les deux membres par $\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n+b_n|^{p}\right)^{1/q}$ *(que l'on suppose non nul, le cas de nullité étant trivial) pour obtenir l'inégalité de Minkowski :* $\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n+b_n|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$, *car* $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$.

3. *Soit* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe et continue. Montrer que :* $\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(g(t))dt$.

4. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que :*

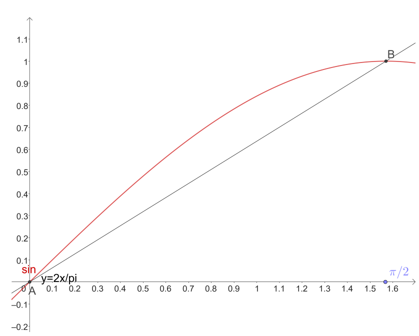
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Montrer que f *est convexe. Montrer d'abord que :*
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![0, 2^n]\!], \forall x,y \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1-\frac{p}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1-\frac{p}{2^n}\right)f(y)$.

Proposition 4.1.2 (Arc sous la corde) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient M_1 et M_2 sur $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f. Tous les points de l'arc « M_1M_2 » de $\mathcal{C}_f$, sont situés sous la corde $[M_1M_2]$.*
Si f est concave, alors les points de l'arc « M_1M_2 » de $\mathcal{C}_f$, sont situés au dessus la corde $[M_1M_2]$.

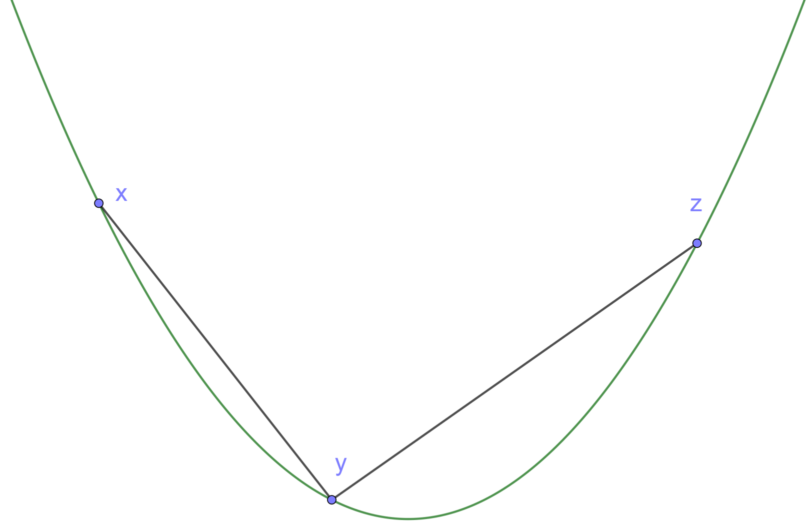
Exemple 4.1.2 *Montrer que : $\forall x \in [0, \pi/2],\ \dfrac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$.*

La fonction $\sin$ *est concave sur* $[0, \pi/2]$ *(*$\sin'' = -\sin$ *qui est négative sur* $[0, \pi/2]$*). Les points $A(0,0)$ et $B(\pi/2, 1)$ sont sur le graphe de* $\sin$. *Ainsi la corde $[AB]$ est sous le graphe de* $\sin$ *sur* $[0, \pi/2]$. *L'équation de la droite (AB) est de la forme $y = ax$ (droite passant par A). Pour passer par B, on doit avoir $1 = a \times \dfrac{\pi}{2}$ et donc $a = \dfrac{2}{\pi}$, donc : $\forall x \in [0, \pi/2],\ \dfrac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$.*



Proposition 4.1.3 (Caractérisation de la convexité par le taux d'accroissement) *Une fonction f est convexe sur I si et seulement si les taux d'accroissements sont croissants :*

$$\forall (x,y,z) \in I^3, \quad x < y < z \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$



Remarque 4.1.2 1. *(IMPORTANTE) Soient f une fonction convexe définie sur un intervalle I et $a \in I$. Alors $\varphi_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.*

2. *Soient f une fonction concave définie sur un intervalle I et $a \in I$. Alors $\varphi_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est décroissante sur $I \setminus \{a\}$.*

Exemple 4.1.3 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Montrer que f est positive.*

4.2 Fonctions convexes et dérivablité

Proposition 4.2.1 (Cararactérisation de la convexité par la croissance de la dérivée) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. Alors : f est convexe si et seulement si f' est croissante.*

Remarque 4.2.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors : f est concave si et seulement si f' est décroissante.*

Proposition 4.2.2 (Caractérisation de la convexité par la position courbe/tangente) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. Alors : f est convexe sur I si et seulement si son graphe est situé au-dessus de chacune de ses tangentes, c'est-à-dire :*

$$\forall a \in \mathring{I}, \forall x \in I, \quad f(x) \ \geq \ f(a) + (x - a)f'(a).$$

Remarque 4.2.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. Alors : f est concave sur I si et seulement si son graphe est situé en-dessous de chacune de ses tangentes, c'est-à-dire :*

$$\forall a \in \mathring{I}, \forall x \in I, \quad f(x) \ \leq \ f(a) + (x - a)f'(a).$$

Proposition 4.2.3 (Caractérisation de la convexité par la positivité de la dérivée seconde) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors :*

1. *La fonction f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I.*

2. *La fonction f est concave sur I si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I.*

Exemple 4.2.1 1. (a) *Montrer que $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.*

(b) *En déduire que si les a_i et b_i $(1 \leq i \leq n)$ sont positifs alors :*

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\right)^{1/n}.$$

2. *On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + qy = 0$, avec $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et positive. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrer que f s'annule au moins une fois.*