Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.
Le but de ce chapitre est de trouver une méthode pour réduire un endomorphisme u. Plus concrètement, il s'agit de trouver une base dans laquelle la matrice de u est la plus simple possible (diagonale ou triangulaire supérieure).

1 Rappels de sup sur les racines d'un polynôme

1.1 Racines d'un polynôme et factorisation

Définition 1.1.1 (Racine) *Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une **racine** de A si $A(\alpha) = 0$.*

Proposition 1.1.1 (Factorisation avec des racines distinctes) *Soit A polynôme dans $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ n racines deux à deux distinctes de A. Alors il existe un polynôme Q dans $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :*
$$A = \left(\prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)\right) Q.$$

Corollaire 1.1.1 (Majorant du nombre de racines)

1. *Soit A un polynôme de degré n (donc non nul). Alors A admet au plus n racines distinctes.*
2. *Par contraposée si un polynôme de degré inférieur ou égal à n admet au moins $n+1$ racines disctinctes, alors il est nul. En particulier si un polynôme s'annule sur un ensemble infini, alors il est nul.*

Remarque 1.1.1 *Si A et B sont deux polynômes de degré au plus n et si A et B coïncident en $n+1$ valeurs, alors on a : $A = B$. En particulier si deux polynômes coïncident sur un ensemble infini, alors ils sont égaux.*

Exemple 1.1.1

1. *Déterminer tous les polynômes non constants $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.*

2. *Trouver tous les polynômes unitaires réels vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1) \quad (*)$.*

Théorème 1.1.1 (D'Alembert-Gauss) *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine.*

1.2 Racines de polynômes particuliers

1.2.1 Polynômes de degré deux

Définition 1.2.1 (Racine carrée) *Soit $\zeta \in \mathbb{C}$. On appelle racine carrée du nombre complexe ζ tout nombre complexe z tel que $z^2 = \zeta$.*

Proposition 1.2.1 (Existence de racines carrée) *Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.*

Démonstration : Notons sous forme algébrique $\zeta = a+ib$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = \alpha+i\beta$. Comme $z^2 = \zeta$ et $z^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta$, on obtient : $z^2 = \zeta \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} z^2 & = & \zeta \\ |z|^2 & = & |\zeta| \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha^2 - \beta^2 & = & a, \\ 2\alpha\beta & = & b, \\ \alpha^2 + \beta^2 & = & |z| = \sqrt{a^2+b^2} \end{array} \right.$.

Ainsi, la première et la dernière relation permettent d'obtenir $\alpha^2 = \dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ et $\beta^2 = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, et la deuxième équation permet de déterminer le signe du produit $\alpha\beta$ et donc de choisir les signes à mettre devant les racines carrées pour avoir α et β.

Remarque 1.2.1

1. *Il faut bien retenir les techniques employées dans cette démonstration pour les réemployer dans les exercices.*
2. ***ATTENTION*** *: La notation $\sqrt{\cdot}$ est réservée aux nombres réels positifs.*

Proposition 1.2.2 (Équations du second degré) *Soient a, b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$. On considère l'équation*

$$az^2 + bz + c = 0.$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation, δ une racine carrée de Δ. On a :

- *deux solutions* $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ *et* $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ *si* Δ *est non nul.*
- *une solution double* $\dfrac{-b}{2a}$ *si* Δ *est nul.*

Exemple 1.2.1 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$.

On a : $\Delta=(3+4i)^2-4(-1+5i)=9-16+24i+4-20i=-3+4i$.

Cherchons une racine carrée de Δ. *On pose* $\delta=\alpha+i\beta$. *On a :* $\delta^2=\Delta \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\delta^2 & = & \Delta \\ |\delta|^2 & = & |\Delta|\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta & = & -3+4i \\ \alpha^2+\beta^2 & = & \sqrt{(-3)^2+4^2}=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\alpha^2-\beta^2 & = & -3, \\ \alpha\beta & = & 2, \\ \alpha^2+\beta^2 & = & 5\end{array}\right.$.

(L_1+L_3) *et* (L_3-L_1) *donnent respectivement* $\alpha^2=1$ *et* $\beta^2=4$. *Par ailleurs* L_2 *nous dit que* α *et* β *sont du même signe. Ainsi* $\alpha=1$ *et* $\beta=2$ *conviennent et on prend* $\delta=1+2i$.

Les solutions sont : $\dfrac{3+4i+1+2i}{2}=2+3i$ *et* $\dfrac{3+4i-1-2i}{2}=1+i$.

1.2.2 Racines n-ème

Définition 1.2.2 (Racine n-ièmes de l'unité) *Les* ***racines** n**-ièmes de l'unité*** *sont les solutions dans* $\mathbb{C}$ *de l'équation* $z^n=1$. *L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté* $\mathbb{U}_n$.

Proposition 1.2.3 (Expression des racines n-ièmes de l'unité) *Les racines n-ièmes de l'unité sont données par*

$$\mathbb{U}_n=\{e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k\in\{0,\dots,n-1\}\}=\{e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k\in I\},$$

où I *est un intervalle d'entiers relatifs constitué de* n *entiers consécutifs. Ainsi* $\mathbb{U}_n$ *possède* n *éléments.*

Remarque 1.2.2 *Si on note* $\zeta=e^{i\frac{2\pi}{n}}$, *on a alors* $\mathbb{U}_n=\{1,\zeta,\zeta^2,...,\zeta^{n-1}\}$, *car on a :* $e^{i\frac{2k\pi}{n}}=(e^{i\frac{2\pi}{n}})^k$.

Proposition 1.2.4

- *Soit* $u\in\mathbb{U}_n$ *différent de* 1. *On a alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}u^k=\frac{1-u^n}{1-u}=\frac{1-1}{1-u}=0$.
- *Ainsi la somme des racines n-ièmes de l'unité vaut* 0.

Définition 1.2.3 (Racine n-ième d'un nombre complexe) *Étant donné un nombre complexe* μ, *on appelle* ***racine** n**-ième*** *de* μ *tout nombre complexe* z *tel que*

$$z^n=\mu.$$

Proposition 1.2.5 (Expression des racines n-ième d'un nombre complexe)

1. *Soit* $\mu\in\mathbb{C}^*$. *Soit* z_0 *une racine n-ième de* μ *(avec* $z_0^n=\mu$*). L'ensemble des racines n-ième de* μ *est alors l'ensemble des nombres complexes complexes* uz_0, *où* u *décrit* $\mathbb{U}_n$.
2. *Étant donné un nombre complexe non nul écrit sous forme trigonométrique* $\mu=re^{i\theta}$, *il possède* n *racines n-ièmes données par*

$$\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})},\ k\in\{0,\dots,n-1\}\ \text{ou}\ \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})},\ k\in I,$$

avec I *un intervalle de* n *entiers consécutifs.*

Remarque 1.2.3 *On retrouve la proposition précédente en écrivant :*
$z^n=\mu=z_0^n\Leftrightarrow(z/z_0)^n=1\Leftrightarrow z/z_0\in\mathbb{U}_n\Leftrightarrow\exists k\in[\![0,n-1]\!],z/z_0=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

1.3 Racines multiples

Définition 1.3.1 (Racines multiples) *Soient* $A\in\mathbb{K}[X]$, $\alpha\in\mathbb{K}$ *et* $k\in\mathbb{N}^\star$. *On dit que* α *est* ***une racine de multiplicité ou d'ordre de multiplicité*** k *de* A *si* $(X-\alpha)^k$ *divise* A *et* $(X-\alpha)^{k+1}$ *ne divise pas* A.

Remarque 1.3.1

1. *Si* $k=1$, *on parle de* ***racine simple****; si* $k=2$, *on parle de* ***racine double****; si* $k=3$ *de* ***racine triple****.*
   De manière générale, si k *est plus grand que 2, on parle de* ***racine multiple****.*

2. *Si α n'est pas racine de A, on dit que α est de multiplicité nulle.*

Remarque 1.3.2 *Si on a seulement $(X-\alpha)^k$ qui divise A, on peut uniquement dire que α est une racine de multiplicité au moins k.*

Proposition 1.3.1 (Multiplicité et dérivée) *Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$. α est une racine de multiplicité k de A si et seulement si $A(\alpha) = A'(\alpha) = \cdots = A^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $A^{(k)}(\alpha) \neq 0$.*

Exemple 1.3.1 *Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.*

1 est racine double de P si et seulement si $P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$ soit $\left\{\begin{array}{lcl} 1+a+b & = & 0 \\ 5+2a+b & = & 0 \\ 20+2a & \neq & 0 \end{array}\right.$ *soit : $a = -4$ et $b = 3$.*

Ainsi P est divisible par X et $(X-1)^2$, donc en effectuant la division euclidienne de P par $X(X-1)^2 = X^3 - 2X^2 + X$, on a : $P = X(X-1)^2(X^2+2X+3)$. On ne peut pas aller plus loin, car le discriminant de X^2+2X+3 est strictement négatif.

1.4 Polynôme scindé

Définition 1.4.1 (Polynôme scindé) *Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ non constant de degré n et de coefficient dominant a_n qui est dans $\mathbb{K}^*$. On dit que A est **scindé sur** $\mathbb{K}$ s'il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $A = a_n \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$, c'est-à-dire que A peut s'écrire comme produit de facteurs de degré un.*

Remarque 1.4.1

1. *Dans le cadre de la définition précédente, on note $\{\alpha_i, i \in [\![1;r]\!]\}$ l'ensemble des racines deux à deux distinctes de A (on a regroupé les λ_k identiques). On a donc $\{\alpha_i,\ i \in [\![1;r]\!]\} = \{\lambda_k,\ k \in [\![1;n]\!]\}$. Ainsi chaque α_i apparaît un certain nombre de fois dans la liste $\{\lambda_k,\ k \in [\![1;n]\!]\}$. On note k_i ce nombre. Grâce à notre notre définition, nous avons donc $A = a_n \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i)^{k_i}$. Dans ce cas, $\{\alpha_i,\ i \in [\![1;r]\!]\}$ est l'ensemble des racines de A et pour chaque i, l'entier k_i est la multiplicité de α_i.*
2. *Soit $a \in \mathbb{K}[X]$ et $k_1, ..., k_r$ les multiplicités de chaque racine de A.*
   (a) *On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} k_i \leq d^\circ A$.*
   (b) *(IMPORTANT) A est scindé si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} k_i = d^\circ A$.*
   (c) *(IMPORTANT) Tout polynôme non constant est scindé sur $\mathbb{C}$.*

Exemple 1.4.1 *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $P' + \alpha P$ est aussi scindé sur $\mathbb{R}$.*

1.5 Relations entre coefficients et racines

Proposition 1.5.1 (Relations coefficients / racines) *Soit* $A = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 = a_n \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ *un polynôme scindé sur* $\mathbb{K}$ *dont les racines sont* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *comptées avec leur ordre de multiplicité (chaque racine étant répétée avec son ordre de multiplicité). On pose* $\sigma_k = \sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n} \lambda_{i_1}...\lambda_{i_k}$*, pour* k *dans* $[\![1, n]\!]$*.*

Alors $\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$*, autrement dit :* $A = a_n(X^n - \sigma_1X^{n-1} + \sigma_2X^{n-2} - \sigma_3X^{n-3} + ... + (-1)^n\sigma_n)$*. En particulier :*

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad et \qquad \sigma_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Remarque 1.5.1 *Pour* $n = 2$*, pour* $P = aX^2 + bX + c$*, le produit des racines vaut* c/a *et la somme vaut* $-b/a$ *. Ceci permet de résoudre des équations sans avoir à calculer* Δ*.*

Exemple 1.5.1

1. *Retrouver la somme et le produit des racines* n*-ème de l'unité, pour* $n \geq 2$*.*

   $\mathbb{U}_n$ *est l'ensemble des racines de* $X^n - 1$*, donc la somme de ces racines vaut* $-0/1 = 0$ *et le produit vaut* $(-1)^n \times (-1)/1 = (-1)^{n+1}$*.*

2. *Factoriser* $P_n = X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$ *dans* $\mathbb{C}[X]$ *et* $\mathbb{R}[X]$*, avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$*.*

3. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*.*
   (a) *Factoriser le polynôme* $P = (X + i)^n - (X - i)^n$*.*
   (b) *Donner la somme et le produit de ses racines.*

2 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

2.1 Droites stables par un endomorphisme

Dans ce paragraphe, u désignera un endomorphisme de E.

Nous rappelons qu'une droite vectorielle D est un espace vectoriel de dimension un, c'est-à-dire qu'il existe x dans E non nul tel que : $D = vect(x)$.

Définition 2.1.1 (Droite stable) *Soit $D = vect(x)$, avec x non nul dans E, une droite vectorielle. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que D est stable par u si : $u(D) \subset D$.*

Proposition 2.1.1 (Caractérisation des droites stables) *On reprend les notations de la définition précédente. On a les équivalences suivantes :*

1. *D est stable par u.*
2. *Il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que : $u(x) = \lambda x$.*
3. *Il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que : $x \in \operatorname{Ker}(\lambda Id_E - u)$.*

Démonstration :

- 1) $\Rightarrow$ 2) : on suppose D stable par u.
  On a : $x \in D$, donc : $u(x) \in D = vect(x)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $u(x) = \lambda x$.
- 2) $\Rightarrow$ 1) : on suppose qu'il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que : $u(x) = \lambda x$.

$u(D) = u(\{\alpha x,\ \alpha \in \mathbb{K}\}) = \{u(\alpha x),\ \alpha \in \mathbb{K}\} = \{\alpha u(x),\ \alpha \in \mathbb{K}\} = \{(\alpha\lambda)x,\ \alpha \in \mathbb{K}\} \subset vect(x) = D.$

- 2) $\Leftrightarrow$ 3) : soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout x de E, on a :
  $u(x) = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - u(x) = 0 \Leftrightarrow (\lambda Id_E - u)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(\lambda Id_E - u)$.

2.2 Vecteurs propres, valeurs propres d'un endomorphisme

Définition 2.2.1 (Vecteurs propres) *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

- *On dit que λ est valeur propre de u s'il existe un vecteur x non nul de E tel que : $u(x) = \lambda x$.*

- *Dans ce cas, on dit que x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.*

Proposition 2.2.1 (Polynôme d'endomorphisme et valeurs propres) *Soit x un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.*

1. *On a : $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x) =$*

   Plus généralement pour $a_0, ..., a_n$ dans $\mathbb{K}$, on a : $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k u^k\right)(x) =$

   soit pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$, on a : $P(u)(x) =$
2. *Soit P dans $\mathbb{K}[X]$ qui annule u. Alors pour toute valeur propre λ de u, on a $P(\lambda) = 0$.*

Démonstration :

1. On prouve par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N},\ u(x) = \lambda^k x$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$ et on pose $\mathcal{P}(k) : u^k(x) = \lambda^k x$.
   On a : $u^0(x) = Id_E(x) = x = \lambda^0 x$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Soit $k \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(k)$.
   On a : $u^{k+1}(x) = u^k(u(x)) = u^k(\lambda x) = \lambda u^k(x) = \lambda \times \lambda^k x = \lambda^{k+1} x$, d'où $\mathcal{P}(k+1)$.
   Ainsi : $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k u^k\right)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k x$, soit $P(u)(x) = P(\lambda)x$, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
2. Si $P(u) = 0$, alors $0 = P(u)(x) = P(\lambda)x$. Or x est non nul en tant que vecteur propre, donc $P(\lambda) = 0$.

Remarque 2.2.1 *(IMPORTANT) Les valeurs propres sont donc racines du polynôme minimal de u.*

Proposition 2.2.2 (Caractérisation d'un vecteur propre par le noyau)

1. *λ est valeur propre de u si et seulement si* $\operatorname{Ker}(\lambda Id_E - u)$ *si et seulement si $\lambda Id_E - u$*
2. *Si E est de dimension finie, λ est valeur propre de u si et seulement si $\lambda Id_E - u$ n'est pas bijective.*

Démonstration : Le premier point découle de l'équivalence entre 2) et 3) de la proposition 2.1.1.
Le deuxième point vient du fait qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est injectif si et seulement si il est bijectif.

Définition 2.2.2 (Sous-espace propres) *Lorsque λ est valeur propre de u, on pose*

$$E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(\lambda Id_E - u) = \{x \in E,\ u(x) = \lambda x\} = \operatorname{Ker}(u - \lambda Id_E).$$

C'est le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.
On le note E_λ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque 2.2.2

1. *$E_\lambda(u)$ est l'ensemble de ses vecteurs propres associés à λ auquel on rajoute 0.*
2. *(IMPORTANT) λ est valeur propre de u si et seulement si : $E_\lambda(u) \neq \{0\}$ grâce à la proposition 2.2.2.*

Définition 2.2.3 (Spectre) *Si E est de dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de u est appelé spectre de u, noté $Sp(u)$.*

Remarque 2.2.3 *IMPORTANTE : Le sous-espace propre $E_0(u)$ de u associé à la valeur propre 0 est*
Ainsi u est injective si et seulement si

Exemple 2.2.1

1. *Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de*
   (a) *l'homothétie kId_E :*
   Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E \setminus \{0\}$ tels que : $kId_E(x) = \lambda x \Leftrightarrow kx = \lambda x \Leftrightarrow k = \lambda$, car $x \neq 0$. Donc $Sp(kId_E) = \{\lambda\}$ et $E_k(kId_E) = E$ (car : $\forall x \in E,\ kId_E(x) = kx$).

(b) $\tau : \begin{cases} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$:

On a vu dans le chapitre 4, que pour λ dans $\mathbb{C}$ on a : $E_\lambda(\tau) = vect\left((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$, donc $Sp(\tau) = \mathbb{C}$.

(c) $\psi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto XP \end{cases}$:

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que : $\psi(P) = \lambda P$, soit $XP = \lambda P$, ainsi $1 + d^\circ(P) \leq d^\circ(P)$ ce qui est impossible. Ainsi $Sp(\psi) = \emptyset$.

2. *Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que si 0 est valeur propre de $u \circ v$, alors 0 est valeur propre de $v \circ u$.*

Proposition 2.2.3 (Les sous-espaces propres sont en somme directe) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u, alors les sous-espaces propres associés sont en somme directe :*

$$E_{\lambda_1}(u) + ... + E_{\lambda_p}(u) = E_{\lambda_1}(u) \oplus ... + \oplus E_{\lambda_p}(u).$$

Démonstration : Montrons cela par récurrence. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\mathcal{P}(p)$: si $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u, alors les sous-espaces propres associés sont en somme directe.
Pour $\mathcal{P}(1)$, il n'y a rien à montrer.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{P}(p)$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p, \lambda_{p+1}$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u.

Corollaire 2.2.1 (Liberté d'une famille de vecteurs propres) *Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u. Soient $x_1, ..., x_p$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_p$. Alors la famille $(x_1, ..., x_p)$ est libre.*

Démonstration : Soient $\alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$. Comme on a : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i x_i \in E_{\lambda_i}(u)$, la proposition précédente nous permet d'affirmer que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i \underbrace{x_i}_{\neq 0} = 0$, puis :
$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i = 0$, car les x_i sont des vecteurs propres. La famille $(x_1, ..., x_p)$ est donc libre.

Exemple 2.2.2 *Soient $\alpha_1, ..., \alpha_m$ des nombres complexes deux à deux distincts. On pose u_i la suite $(\alpha_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour $i \in [\![1, m]\!]$. Montrer que $(u_1, ..., u_m)$ est une famille libre.*

Corollaire 2.2.2 (Majoration du nombre de valeurs propres) *Si* $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, *alors* u *admet au plus* n *valeurs propres distinctes.*

Démonstration : Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u. Soient $x_1, ..., x_p$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_p$. Comme la famille $(x_1, ..., x_p)$ est libre dans un espace vectoriel de dimension n, alors $p \leq n$.

Exemple 2.2.3 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit* $v \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $uv - vu = u$.

1. *Montrer que :* $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u^k v - vu^k = ku^k$.
2. *En déduire que* u *est nilpotente.*

2.3 Cas d'endomorphismes qui commutent

Proposition 2.3.1 (Stabilité des sous-espaces propres) *Si* $u \circ v = v \circ u$, *les sous-espaces propres de* u *sont stables par* v : $\forall \lambda \in Sp(u),\ v(\mathrm{Ker}\,(\lambda Id_E - u)) \subset \mathrm{Ker}\,(\lambda Id_E - u)$, *autrement dit :*
$v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$.

Démonstration :

2.4 Extension des définitions pour une matrice

Dans la suite les espaces considérés seront de dimension finie.

On identifie les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec les éléments de $\mathbb{K}^n$ via : $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to (x_1, ..., x_n)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Grâce à l'identification précédente, l'endomorphisme canoniquement associée à A est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui s'identifie à $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$.
Par notre identification, c'est l'endomorphisme $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = A$ avec $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A seront définis comme ceux de l'endomorphisme canoniquement associé :

Définition 2.4.1 (Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'une matrice) *Soient* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$.

- *On dit que λ est valeur propre de A s'il existe X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AX = \lambda X$.*
- *Dans ce cas, on dit que X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*
- *Si λ est valeur propre de A, le sous-espace propre associé à λ est*

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = \lambda X\} = \mathrm{Ker}\,(\lambda I_n - A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n).$$

- *On appelle spectre de A l'ensemble des valeurs propres de A et on le note $Sp(A)$.*

Les propriétés vues sur les endomorphismes se transposent aux matrices :

Proposition 2.4.1 (Transposition des propriétés pour les matrices)

1. *λ est valeur propre de A si et seulement si $\lambda I_n - A$ n'est pas inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(\lambda I_n - A) \neq \{0\}$.*
2. *Si $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de A, alors les sous-espaces propres associés sont en somme directe :*

$$E_{\lambda_1}(A) + ... + E_{\lambda_p}(A) = E_{\lambda_1}(A) \oplus ... + \oplus E_{\lambda_p}(A).$$

3. *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$, alors les sous-espaces propres de A sont stables par B : $\forall \lambda \in Sp(A),\ B(\mathrm{Ker}\,(\lambda I_n - A) \subset \mathrm{Ker}\,(\lambda I_n - A)$, autrement dit $B(E_\lambda(A)) \subset E_\lambda(A)$.*

Démonstration : Vient du lien entre une application linéaire et sa représentation matricielle.

Remarque 2.4.1 *IMPORTANTE :* $\mathrm{Ker}\,(A)$ *est le sous-espace propre associé à la valeur propre* 0 *: $E_0(A)$. Ainsi A est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A (dans ce cas* $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0\}$*).*

Exemple 2.4.1 1. *Soient $(E_1, ..., E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on a : $E_\lambda(A) =$*

Remarque 2.4.2 *On rappelle que* $A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$ *donne la i-ème colonne de A.*

2. *Soit $A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{ij} \geq 0 \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \end{cases}$. On appelle une telle matrice une matrice stochastique. Montrer que 1 est valeur propre de A et si tous les coefficients de A sont strictement positifs, alors pour $\lambda \in \mathbb{C}$, valeur propre de A vue en tant que matrice complexe, si λ est de module 1, alors $\lambda = 1$.*

Proposition 2.4.2 (Polynôme de matrices et valeurs propres) *1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = \lambda^k X$*
Pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$, on a : $P(A)X = P(\lambda)X$.

2. Soit P dans $\mathbb{K}[X]$ qui annule A. Alors pour toute valeur propre λ de A, on a $P(\lambda) = 0$.

Démonstration : Copier la démonstration vue pour les endomorphismes.

Remarque 2.4.3 *(IMPORTANT) Les valeurs propres sont donc racines du polynôme minimal de A.*

Proposition 2.4.3 (Spectre est sous-corps) *Soient $\mathbb{K}'$ un sous-corps de $\mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$. Alors le spectre de A dans $\mathbb{K}'$ est inclus dans le spectre de A dans $\mathbb{K}$ (A est vue dans ce cas comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).*

Démonstration : Soit $\lambda \in \mathbb{K}'$ une valeur propre de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}')$ un vecteur propre associé. On a donc : $AX = \lambda X$. Mais comme λ est aussi dans $\mathbb{K}$ et X est aussi dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (et il est toujours non nul), alors λ est aussi valeur propre de A dans $\mathbb{K}$.

3 Polynôme caractéristique

3.1 Polynôme caractéristique d'une matrice

Définition 3.1.1 (Polynôme caractéristique d'une matrice) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère la fonction*

$$\chi_A : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \det(tI_n - A) \end{array} \right. .$$

On appelle cette fonction polynôme caractéristique que l'on note χ_A.

Proposition 3.1.1 (Expression du polynôme caractéristique) *χ_A est une fonction polynôme unitaire (coefficient dominant qui vaut 1) de degré n.*
Si on identifie cette fonction polynôme au polynôme $\chi_A(X)$, alors on a :

$$\chi_A(X) = X^n - tr(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(A).$$

Démonstration :

Remarque 3.1.1 *1.* $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ *(terme constant de χ_A).*

2. $\forall t \in \mathbb{K},\ \det(A - tI_n) = \det\left(-(tI_n - A)\right) = (-1)^n \det(tI_n - A) = (-1)^n \chi_A(t)$.

Exemple 3.1.1 *Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors $\chi_B(X) =$*

Corollaire 3.1.1 (Racines de χ_A) *Les racines de χ_A sont les valeurs propres de A.*

Démonstration : $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,(\lambda I_n - A) \neq \{0\} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{matrice carrée}} \lambda I_n - A \notin GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow$ $\det(\lambda I_n - A) = 0 \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$.

Remarque 3.1.2 *Pour trouver le spectre d'une matrice, on a besoin de chercher les racines de χ_A. Pour trouver les racines d'un polynôme, il est bien de le factoriser. Ainsi dans le calcul de $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$, ça n'est pas une bonne idée d'effectuer la mauvaise méthode de Sarrus, car votre polynôme caractéristique ne sera pas factorisé. Utilisez des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour calculer le déterminant afin d'avoir une forme factorisée.*

Proposition 3.1.2 (Conservation du polynôme caractéristique et du spectre par similitude) *Si A et A' sont semblables, alors :*

1. $\chi_A = \chi_{A'}$.

2. $Sp(A) = Sp(A')$.

Démonstration : On suppose que $A = PA'P^{-1}$, avec P dans $GL_n(\mathbb{K})$.

1. On a : $\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda PP^{-1} - PA'P^{-1}) = \det(P(\lambda I_n - A')P^{-1}) = \det(\lambda I_n - A')$, car le déterminant de deux matrices semblables est le même et donc : $\chi_A = \chi_{A'}$.
2. Cela découle donc du corollaire 3.1.1, car $\chi_A = \chi_{A'}$.

Remarque 3.1.3 *ATTENTION : si deux matrices ont le même polynôme caractéristique, alors ces matrices ne sont pas forcément semblables. Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nous avons :*

$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 \\ 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2$ *et* $\chi_B = \begin{vmatrix} X-1 & 0 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2$.

Mais ces deux matrices ne sont pas semblables, car si $B = PAP^{-1}$, avec $P \in GL_2(\mathbb{K})$, alors $B = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$, ce qui est faux.

Corollaire 3.1.2 (Matrice semblable à une matrice triangulaire) *Si A est semblable à T (il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PTP^{-1}$), avec* $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, *alors* $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$ *et donc* $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.
On a le même résultat avec une matrice triangulaire inférieure.

Démonstration : Grâce à la proposition précédente, on a : $\chi_A(X) = \chi_T(X) = \begin{vmatrix} X-\lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & X-\lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X-\lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$, puis $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ en tant que racines de χ_A.

Exemple 3.1.2 *1. Soit $a_1 < ... < a_n$ des réels et* $M = \begin{pmatrix} a_1+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a_n+1 \end{pmatrix}$.

Déterminer le polynôme caractéristique de M à l'aide de $P = \prod_{j=1}^{n}(X-a_j)$.

Remarque 3.1.4 *Grâce à l'exemple 1.4.1, ce polynôme est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.*

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) On suppose que $\mathrm{rg}\,(A) = 1$.

i. *Exprimer* ch_A *en fonction de* $tr(A)$.

ii. *Soit* $B \in GL_n(\mathbb{K})$. *Montrer que* $A + B$ *est inversible si et seulement si* $tr(B^{-1}A) \neq -1$.

(b) *On suppose que* $\operatorname{rg}(A) = 2$. *Exprimer* ch_A *en fonction de* $tr(A)$ *et* $tr(A^2)$.

3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

(a) *Exprimer* χ_M *en fonction de* χ_A.

(b) *Exprimer les dimensions des sous-espaces propres de* M *en fonction de ceux de* A.

Remarque 3.1.5 1. *(IMPORTANT) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors A admet au moins une valeur propre complexe, car χ_A est non constant et admet au moins une racine grâce au théorème de D'Alembert Gauss.*
χ_A est même scindé sur $\mathbb{C}$ en tant que polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

2. *Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices B et B^T ont le même polynôme caractéristique, le même spectre et de plus : $\forall \lambda \in Sp(B),\ \dim(E_\lambda(B)) = \dim(E_\lambda(B^T))$.*

- $\chi_B(X) = \det(XI_n - B) = \det((XI_n - B)^T) = \det(XI_n - B^T) = \chi_{B^T}(X)$.
- *Ainsi χ_{B^T} et χ_B ont les mêmes racines, donc $Sp(B) = Sp(B^T)$.*
- $\forall \lambda \in Sp(B),\ \dim(E_\lambda(B)) = \dim(Ker(\lambda I_n - B)) \underbrace{=}_{\textit{théorème du rang}} n - \operatorname{rg}(\lambda I_n - B) =$

$n - \operatorname{rg}((\lambda I_n - B)^T) = n - \operatorname{rg}(\lambda I_n - B^T) = \dim(Ker(\lambda I_n - B^T)) = \dim(E_\lambda(B^T))$.

Mais attention, A et A^T n'ont pas forcément les mêmes sous-espaces propres :
par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
1 est la seule valeur propre de A (car A est triangulaire supérieure), tout comme pour $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a : $E_1(A) = \operatorname{Ker}(I_2 - A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Or : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -y = 0 \Leftrightarrow y = 0$.
Ainsi : $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = vect\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
De même $E_1(A^T) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = vect\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (car $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0$).
Nous avons : $E_1(A^T) \neq E_1(A)$.

Définition 3.1.2 (Multiplicité d'une valeur propre) *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in Sp(A)$. On appelle multiplicité de la valeur propre λ sa multiplicité en tant que racine de χ_A. On note celle-ci m_λ.*

Remarque 3.1.6 *Si χ_A est scindé (lorsque $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(A)} m_\lambda = n = d^\circ(\chi_A)$), alors $\chi_A = \displaystyle\prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$.*

Exemple 3.1.3 *Déterminer les valeurs propres ainsi que leur multiplicité de $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Proposition 3.1.3 (Majoration des multiplicités) *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *A admet au plus n valeurs propres, comptées avec leur multiplicité, c'est-à-dire que si* $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$, *alors :* $\sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} \leq n$.
2. *Pour tout λ dans $Sp(A)$, on a :*

$$1 \leq \dim(E_\lambda(A)) \leq m_\lambda \leq n.$$

Démonstration :

1. Un polynôme de degré n admet au plus n racine distinctes, ce qui est donc le cas pour χ_A. Provient du fait que la somme des racines d'un polynôme comptées avec leur ordre de multiplicité est inférieur au degré du polynôme (χ_A est de la forme $\prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}} Q$). Le fait que $d^\circ \chi_A = n$ permet de conclure.
2. L'inégalité de gauche provient du fait que $E_\lambda(A) \neq \{0\}$ (grâce à la proposition 2.2.2). Pour l'inégalité de droite :

Remarque 3.1.7 1. *Si* $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$, *alors* $\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(A)) \leq$

En effet :

2. *IMPORTANT : si λ est une valeur propre de multiplicité un, alors* $\dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda = 1$.
   En effet,

Proposition 3.1.4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose χ_A scindé sur $\mathbb{K}$.*

- *Si on note $\mu_1, ..., \mu_n$ les valeurs propres de A répétées autant de fois que leur multiplicité, c'est-à-dire : $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \mu_i)$, alors*

  $tr(A) =$ *et* $\det(A) =$

- *Si $\chi_A = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$. Alors on a $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ et :*

  $tr(A) =$ *et*

Démonstration : Les racines de χ_A, qui est scindé, sont $\mu_1, ..., \mu_n$ or le coefficient de degré $n-1$ de χ_A est $-tr(A)$ et le coefficient de degré n est 1, donc grâce au lien entre coefficients et racines, on a : $\mu_1 + ... + \mu_n = -\dfrac{-tr(A)}{1} = tr(A)$. Pour le produit, comme le coefficient constant est $(-1)^n \det(A)$, alors : $\mu_1 \times ... \times \mu_n = (-1)^n \dfrac{(-1)^n \det(A)}{1} = \det(A)$.

Remarque 3.1.8 *La proposition précédente est toujours vraie pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Exemple 3.1.4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_n$. Montrer que $tr(A)$ est un entier relatif. Si n est impair, montrer que $A - I_n$ n'est pas inversible.*

3.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Définition 3.2.1 (Polynôme carctéristique d'un endomorphisme) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *On appelle polynôme caractéristique de u et on note χ_u le polynôme caractéritique de sa matrice écrite dans une base arbitraire. Ainsi on pose $\chi_u(X) = \det(XId_E - u)$.*
2. *Soit $\lambda \in Sp(u)$. On appelle multiplicité de la valeur propre λ la multiplicité de la racine λ dans χ_u. On la note m_λ.*

Remarque 3.2.1 *Le déterminant de l'endomorphisme $\lambda Id_E - u$ étant indépendant de la base choisie, la définition précédente a un sens.*

On peut étendre les propriétés suivantes vues pour les matrices.

Proposition 3.2.1 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*

1. χ_u *est de la forme* $X^n - tr(u)X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(u)$.
2. *Les racines de* χ_u *sont les valeurs propres de* u *et de plus*

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) = \dim \mathrm{Ker}\,(\lambda Id_E - u) \leq m_\lambda \leq n.$$

3. u *admet au plus* n *valeurs propres, comptées avec leur multiplicité, c'est-à-dire que si* $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$, *alors :* $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} \leq n$.
4. *On suppose* χ_u *scindé de la forme* $\chi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$. *Alors on a* $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ *et :*

$$tr(u) = \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i}\lambda_i \text{ et } \det(u) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m_{\lambda_i}}.$$

Si on note $\mu_1, ..., \mu_n$ *les valeurs propres de* u *répétées autant de fois que leur multiplicité, alors*

$$tr(u) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \text{ et } \det(u) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i.$$

Remarque 3.2.2 1. *Si* E *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel, alors* u *admet au moins une valeur propre complexe et* χ_u *est scindé. Le dernier point de la proposition précédente est donc toujours vrai si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2. *(IMPORTANT) Pour trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres d'un endomorphisme, il sera plus commode de se ramener à la recherche des valeurs propres et des sous-espaces propres de la matrice associée à cet endomorphisme dans une certaine base.*

Exemple 3.2.1 1. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* $2n + 1$. *Montrer que tout endomorphisme* u *de* E *admet au moins une valeur propre réelle.*

2. *Soit* E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $\mathcal{L}$ *une partie de* $\mathcal{L}(E)$.
On suppose que les seuls sous-espaces vectoriel de E *stables par tous les éléments de* $\mathcal{L}$, *sont* $\{0\}$ *et* E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ *tel que :* $\forall g \in \mathcal{L},\ fg = gf$. *Montrer que* f *est une homothétie.*

Proposition 3.2.2 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit) *Si* F *est un sous-espace vectoriel de* E *stable par* u, *en notant* $\tilde{u}$ *l'endomorphisme induit sur* F *par* u, *on a :* $\chi_{\tilde{u}} | \chi_u$.

Démonstration : Soit $p = \dim(F)$ et $(e_1, ..., e_p)$ une base de F. Cette famille étant libre, on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ de E. Comme F est stable par u, alors $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Ainsi, comme le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base choisie, on a : $\chi_u = \begin{vmatrix} XI_p - A & -B \\ 0 & XI_{n-p} - D \end{vmatrix} = \det(XI_p - A)\det(XI_{n-p} - D) = \chi_{\tilde{u}}(X)\det(XI_{n-p} - D)$, car la matrice de $\tilde{u}$ dans la base $(e_1, ..., e_p)$ de F est A. On peut conclure, car $\det(XI_{n-p} - D)$ est le polynôme caractéristique de D, donc c'est un polynôme.

Remarque 3.2.3 1. *On a donc* $Sp(\tilde{u}) \subset Sp(u)$, *car une racine de* $\chi_{\tilde{u}}$ *est aussi une racine de* χ_u, *grâce à la proposition précédente.*

2. *Plus généralement, si on a* $E = E_1 \oplus ... \oplus E_p$ *et que* u *laisse stable tous les* E_i*, alors en notant* u_i *l'endomorphisme induit par* u *sur chaque* u_i*, on a :* $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} \chi_{u_i}$*, en raisonnant avec des matrices par blocs comme dans la preuve précédente.*

   Cependant, ce résultat est faux pour les polynômes minimaux. On a : $\pi_u = \pi_{u_1} \vee ... \vee \pi_{u_p}$*. En effet, si on note* $P = \pi_{u_1} \vee ... \vee \pi_{u_p}$*, alors :* $\forall i \in [\![1,p]\!], \forall x \in E_i,\ P(u)(x) = P(u_i)(x) = 0$*, car* $\pi_{u_i}|P$*, donc :* $\forall i \in [\![1,p]\!],\ P(u)|_{E_i} = 0$*. Comme on a :* $E = E_1 \oplus ... \oplus E_p$*, alors :* $P(u) = 0$ *puis* $\pi_u|P$*.*
   Par ailleurs, pour $i \in [\![1,p]\!]$*, on a :* $\forall x \in E_i,\ \pi_u(u_i)(x) = \pi_u(u)(x) = 0$*, donc* $\pi_{u_i}|\pi_u$*. Ainsi* $P = \pi_{u_1} \vee ... \vee \pi_{u_p}|\pi_u$*.*

4 Diagonalisation

On suppose dans ce paragraphe que E est de dimension finie n.

4.1 Endomorphismes diagonalisables

Proposition 4.1.1 (Diagonalisabilité des endomorphismes) *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$*. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe une base* $\mathcal{B}$ *de* E *dans laquelle* $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ *est diagonale.*
2. *Il existe une base* $\mathcal{B}$ *de* E *constituée de vecteurs propres de* u*.*
3. $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$*.*
4. $n = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u))$*.*

Démonstration : 1) $\Rightarrow$ 2) : Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E dans laquelle on a $Mat_{\mathcal{B}}(u) = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Ainsi en retraduisant, cela signifie que : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ u(e_i) = \lambda_i e_i$. Ainsi les e_i sont aussi des vecteurs propres de u (ces vecteurs sont non nuls car ils font partie d'une base).
2) $\Rightarrow$ 3) : Soit $\mathcal{B}$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Tout vecteur est combinaison linéaire de vecteurs propres de u, ce qui montre l'inclusion : $E \subset \sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$. Bien sûr comme $\sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel de E, on a l'inclusion dans l'autre sens d'où $E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$. Par ailleurs, nous avons vu que cette somme est directe, donc : $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$.
3) $\Rightarrow$ 1) : Cela provient du recollement des bases des $E_\lambda(u)$. En effet tout vecteur non nul de $E_\lambda(u)$ est un vecteur propre (associé à la valeur propre λ).
3) $\Leftrightarrow$ 4) : Nous avons : $\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) \subset E$ et donc $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ si et seulement si

$$\dim\left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)\right) = \dim(E) \text{ si et seulement si } \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u)) = n = \dim(E).$$

Définition 4.1.1 (Endomorphisme diagonalisable) *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$*. On dit que* u *est diagonalisable si l'une des propriétés de la proposition précédente est vérifiée.*

Remarque 4.1.1 *(IMPORTANT) On suppose* u *diagonalisable et on a* $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$*. Pour tout* i *de* $[\![1,p]\!]$*, on note* $d_i = \dim(E_{\lambda_i}(u))$ *et on appelle* $\mathcal{B}_i$ *une base de* $E_{\lambda_i}(u)$*. Comme* u *est diagonalisble, alors* $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ *et donc* $\mathcal{B}$ *obtenue en recollant les* $\mathcal{B}_i$ *est une base adaptée à cette décomposition de*

E. Dans ce cas, on a $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p I_{d_p} \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_2, ..., \lambda_p, ..., \lambda_p)$, *où chaque λ_i est répété d_i fois.*

Exemple 4.1.1

1. *Une homothétie $x \mapsto kx$, avec k dans $\mathbb{K}$ es diagonalisable, car dans toute base, sa matrice est* $\begin{pmatrix} k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & k \end{pmatrix}$.

2. *Soit* $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto M + 2M^T \end{cases}$ *Montrer que f est diagonalisable et préciser ses sous-espaces propres.*

3. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i) \in \mathbb{R}_n[X]$ avec les $a_1, .., a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Soit φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à P associe le reste de la division euclidienne de XP par A. On admet que cela définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.*
Montrer que φ est diagonalisable.

4. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie vectorielle. Soit Φ défini sur $\mathcal{L}(E)$ par : $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \Phi(u) = \dfrac{us + su}{2}$. Déterminer les éléments propres de Φ, puis étudier sa diagonalisabilité.*

5. *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. *Montrer que* f^2 *est diagonalisable si et seulement si* $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$. *Montrer que* f *est diagonalisable.*

6. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $f \in \mathcal{L}(E)$ *diagonalisable telle que :* $Sp(f) \subset \mathbb{R}_+$.
   (a) *Montrer qu'il existe* $g \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $g^2 = f$.
   (b) *Montrer qu'il existe* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que :* $g = P(f)$.

7. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(E) = n$ *et* u *diagonalisable. On pose* $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$*, avec les valeurs propres de* u *sans répétitions et* $n_i = \dim(E_{\lambda_i})$*, pour* $1 \leq i \leq p$*.*
   On note $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ uv = vu\}$*. Déterminer* $\dim(C(u))$*.*

8. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. On dit que* $u \in \mathcal{L}(E)$ *est semi-simple si tout sous-espace stable par* u *admet un supplémentaire dans* E*.*
   Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, alors* u *est diagonalisable si et seulement si* u *est semi-simple.*

Proposition 4.1.2 (Diagonalisabilité des projecteurs et des symétries) *On suppose que $E = F \oplus G$, avec F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*
Soit p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors p et s sont diagonalisables.

Démonstration : On pose $r = \dim(F)$ et $q = \dim(G)$. Soient $(e_1, ..., e_r)$ une base de F et $(e_{r+1}, ..., e_{r+q})$ une base de G. Ainsi $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_{r+q})$ est une base de E. Ainsi $Mat_{\mathcal{B}}(p) = diag\left(\underbrace{1, ..., 1}_{r \text{ fois}}, \underbrace{0, ..., 0}_{q \text{ fois}}\right)$ et $Mat_{\mathcal{B}}(s) = diag\left(\underbrace{1, ..., 1}_{r \text{ fois}}, \underbrace{-1, ..., -1}_{q \text{ fois}}\right)$.

Remarque 4.1.2 $\chi_p = (X-1)^r X^{n-r}$ *et* $\chi_s = (X-1)^r (X+1)^{n-r}$.

Proposition 4.1.3 (CNS de diagonalisation) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et : $\forall \lambda \in Sp(u),\ \dim(E_\lambda(u)) =$*

Démonstration :

Exemple 4.1.2

1. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x, y+z, z) \end{array} \right.$. *Alors f*

2. *Soit* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \end{array} \right.$. *Montrer que φ est diagonalisable et préciser ses sous-espaces propres.*

Soit $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ *la base canonique de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *On a :*

$\varphi(E_{11}) = \varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{22}$, $\varphi(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -E_{21}$, $\varphi(E_{21}) = -E_{12}$ *et*

$\varphi(E_{22}) = E_{11}$. *Ainsi* $A = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Grâce à l'exemple 3.1.3, on a :*

$\chi_\varphi = (X-1)^2(X+1)^2$. *Les valeurs propres de* φ *sont* 1 *et* -1 *et sont de multiplicité* 2.

On a $E_1(A) = \mathrm{Ker}\,(I_3 - A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a-d & = & 0 \\ b+c & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} d & = & a \\ c & = & -b \end{array} \right.$.

Ainsi $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \\ a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\} = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, *puis* $E_1(\varphi) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. *Ces deux matrices n'étant pas colinéaires, on a :* $\dim(E_1(\varphi)) = 2 = m_1$. *De même, on montre que :* $E_{-1}(\varphi) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ *et que :* $\dim(E_{-1}(\varphi)) = 2 = m_{-1}$.*Comme* χ_φ *est scindé sur* $\mathbb{R}$, *alors* φ *est diagonalisable.*

Proposition 4.1.4 (Condition suffisante de diagonalisation) *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Si* u *admet* n *valeurs propres distinctes, alors* u *est diagonalisable.*
Dans ce cas : $\forall \lambda \in Sp(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = 1$.
Autrement dit ceci est valable si χ_u *est scindé à racines simples.*

Démonstration : χ_u admet n racines deux à deux distinctes, donc $\chi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ qui est scindé sur $\mathbb{K}$. De plus les racines sont de multiplicité un, donc : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \dim(E_{\lambda_i}(u)) = m_{\lambda_i} = 1$ (car $1 \leq \dim(E_{\lambda_i}(u) \leq m_{\lambda_i} = 1)$. La proposition précédente permet de conclure.

Remarque 4.1.3 *La réciproque de la proposition précédente est fausse. Par exemple :*
si $u = Id_E$, *alors* $\chi_u(X) = \det(XId_E - Id_E) = \det((X-1)Id_E) = (X-1)^n \det(Id_E) = (X-1)^n$.
Mais u *est diagonalisable (sa matrice dans toute base est* I_n*), mais* χ_u *n'est pas à racines simples.*

Exemple 4.1.3

1. *Soit* $\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{C}_n[X] & \to & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \mapsto & (1-X^2)P' + nXP \end{array} \right.$. *Montrer que* φ *est diagonalisable.*

Remarque 4.1.4 Pour cette application la matrice dans la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ est
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Ici il est compliqué de calculer les valeurs propres à partir du polynôme caractéristique, il faut donc revenir à la définition d'une valeur propre.*

2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes. On pose $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ uv = vu\}$. Montrer que $C(u) = vect(Id_E, u, u^2, ..., u^{n-1})$.*

4.2 Matrices diagonalisables

Définition 4.2.1 (Matrice diagonalisable) *Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si l'endomorphisme canoniquement associé $u : X \mapsto AX$ (s'identifiant à un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$) est diagonalisable.*

Proposition 4.2.1 (Caractérisation de la diagonalisabilité) *Une matrice A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale (c'est-à-dire qu'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale).*
Dans ce cas, si $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.

Démonstration : Soit u dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Ainsi u est digonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $Mat_{\mathcal{C}}(u)$ soit diagonale, ce qui equivaut à l'existence d'une matrice de passage P (qui est inversible) telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.
Dans ce cas A et $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, sont semblables et donc : $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.

Remarque 4.2.1 1. *Si A et B sont semblables et que A est diagonalisable, alors B l'est, car si $A = PDP^{-1}$, avec D diagonale et $B = QAQ^{-1}$, alors $B = (QP)D(QP)^{-1}$.*

2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vecoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit u dans $\mathcal{L}(E)$.*
u est diagonalisable si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ l'est, grâce à la proposition 4.1.1.
En effet si u est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B}'$ de diagonalisation de u. Si on pose $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, alors $Mat_{\mathcal{B}}(u) = P.Mat_{\mathcal{B}'}(u).P^{-1}$ et donc $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est semblable à une matrice diagonale.
Si on suppose qu'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = PDP^{-1}$ avec D diagonale, alors les colonnes de P correspondent aux coordonnées des vecteurs d'une famille de vecteurs $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Comme P est inversible, alors $\mathcal{B}'$ est une base et donc P est la matrice de passage

de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. De plus $D = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}Mat_{\mathcal{B}}(u)P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}'}(u)$. Ainsi $\mathcal{B}'$ est une base de diagonalisation de u.

3. *(IMPORTANT) Si A est diagonalisable et $Sp(A) = \{\lambda\}$, alors $A =$*

4. *(IMPORTANT) Si A est diagonalisable avec $Sp(A) = \{\mu_1, ..., \mu_n\}$ où les valeurs propres sont répétées selon leurs multiplicités, alors pour tout k de $\mathbb{N}$, A^k est diagonalisable et*

   $Sp(A^k) = \{\mu_1^k, ..., \mu_n^k\}$ et $\operatorname{tr}(A^k) = \sum_{l=1}^{n} \mu_l^k$.

   En effet : il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} P^{-1}$ et donc $A^k = P \begin{pmatrix} \mu_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$,

   comme A^k est $\begin{pmatrix} \mu_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n^k \end{pmatrix}$ sont semblables, alors elles ont le même spectre.

Il découle du paragraphe précédent en utilisant le lien entre matrice et application linéaire :

Proposition 4.2.2 (Diagonalisabilité des matrices) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *A est diagonalisable.*
2. *$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda(A)$.*
3. *χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et : $\forall \lambda \in Sp(A),\ \dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda$.*
4. *$\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$.*

Dans ce cas si $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ et si pour tout i de $[\![1, p]\!]$, on note $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(A)$ et $\mathcal{B}$ la base obtenue en juxtaposant les $\mathcal{B}_i$ et P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathcal{B}$, alors $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p I_{d_p} \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_2, ..., \lambda_p, ..., \lambda_p)$, où chaque λ_i est répété d_i fois avec $d_i = \dim(E_{\lambda_i}(A))$.

On a aussi : $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$.

Exemple 4.2.1 1. *Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.*

2. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec B diagonalisable. On suppose que $AB^3 = B^3A$. Montrer que A et B commutent.*

3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable ayant n valeurs propres distinctes. Quel est le nombre de solutions de $Z^2 = A$, avec $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?*

4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on pose $f_A : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right.$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A l'est.*

Remarque 4.2.2 *Si A est à coefficients réels et diagonalisable sur $\mathbb{R}$, alors elle l'est aussi sur $\mathbb{C}$, car on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec P et D réelles que l'on peut donc considérer à coefficients complexes.*

Proposition 4.2.3 (Condition suffisante de diagonalisation) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
Si A admet n valeurs propres distinctes (c'est-à-dire χ_A est scindé à racines simples), alors A est diagonalisable.
Dans ce cas : $\forall \lambda \in Sp(A),\ \dim(E_\lambda(A)) = 1$.

Démonstration : Découle du lien entre application linéaire et matrice.

Exemple 4.2.2

1. *$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?*

   Oui, car A possède quatre valeurs propres distinctes : $1; 2; -1$ et -2 (on a une matrice triangulaire).

2. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & XP'' + (1-X)P' \end{array} \right.$.*

   (a) *Montrer que f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.*

   (b) *Montrer que pour tout k de $[\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme P_k de coefficient dominant un tel que $f(P_k) = -kP_k$.*

   (c) *Montrer que le degré de P_k est k.*

Théorème 4.2.1 (Théorème spectral) *Soit A une matrice symétrique réelle. Alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration : Attendre un peu...

Exemple 4.2.3 *1. Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$*, avec $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ et on suppose que $a_1, ..., a_{n-1}$ ne sont pas tous nuls, avec $n \geq 3$.*

(a) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

(b) Si les coefficients sont dans $\mathbb{C}$, la matrice A est-elle diagonalisable ?

2. *Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué que de matrices diagonalisables. On déterminera d'abord $F \cap T_n^{++}(\mathbb{R})$, avec $T_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures n'ayant que des zéros sur la diagonale.*

Remarque 4.2.3 *Le résultat précédent est faux sur $\mathbb{C}$. Contrexemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$, car on est dans le deuxième cas du premier exemple précédent.*

4.3 Méthode pratique pour diagonaliser une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Calculer χ_A et le mettre sous forme factorisé (essayer d'utiliser dans un premier temps des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour faire apparaître des zéros (selon l'algorithme du pivot de Gauss par exemple).
   Ensuite on peut effectuer un développement selon une ligne ou une colonne.
2. Si le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, alors A n'est pas diagonalisable.
   Si χ_A est scindé, identifier les racines de χ_A et leurs multiplicités. Ceci nous permet d'obtenir $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$.
3. Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, chercher $E_{\lambda_i}(A)$, en déterminer la dimension et une base. Pour cela il faudra résoudre le système $AX = \lambda_i X$ ou $(\lambda_i I_n - A)X = 0$ avec X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si on pose $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on doit résoudre le système $\begin{cases} (\lambda_i - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = 0 \\ -a_{21}x_1 + (\lambda_i - a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (\lambda_i - a_{nn})x_n = 0 \end{cases}$.
   Si on a : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_{\lambda_i}$, alors A est diagonalisable.

   Dans ce cas on peut poursuivre.

4. Si pour tout i de $[\![1, p]\!]$, on note $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(A)$ et $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, ..., \mathcal{B}_p)$, alors $\mathcal{B}'$ est une base de diagonalisation de A.
5. Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathcal{B}'$. Alors on a : $A = PDP^{-1}$ ou $P^{-1}AP = D$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p I_{d_p} \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_2, ..., \lambda_p, ..., \lambda_p)$,
   où chaque λ_i est répété d_i fois avec $d_i = \dim(E_{\lambda_i}(A))$ et les λ_i apparaissent dans le même ordre que les vecteurs propres correspondants à $\mathcal{B}'$.
6. Si besoin, déterminer P^{-1} à l'aide de la méthode du pivot pour une matrice de petite taille (2×2 ou 3×3) ou sinon pour une matrice $n \times n$ passer par la résolution d'un système linéaire $PX = Y$. Cette dernière étape n'est pas nécessairement à faire, cela dépend de ce que l'on vous demande.

Exemple 4.3.1 *Diagonaliser :*

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de* A.
   (b) *Montrer que l'ensemble* $C(A)$ *des matrices qui commutent avec* A *est* $\mathrm{vect}(I_2, A)$.
   (c) *Déterminer les matrice* $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *telles que* $-4X^2 - 7X = A$.
   (d) *Soit* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *diagonalisable et on pose* $C = \begin{pmatrix} 2B & B \\ 4B & -B \end{pmatrix}$. *Montrer que* C *est diagonalisable.*

(a) *On a :* $\chi_A = X^2 - tr(A)X + \det(A) = X^2 - X - 6 = (X+2)(X-3)$. *Ainsi* $Sp(A) = \{-2, 3\}$.

Après résolution de $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *on obtient* $E_3 = vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et*

$E_{-2} = vect\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(b) *On a vu dans l'exemple 4.2.1 qu'une matrice qui commute avec une matrice diagonalisable de taille* n *et ayant* n *valeurs propres distinctes diagonalisent dans la même base. En posant* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, *on a :* $C(A) = \left\{ P\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} P^{-1},\ u, v \in \mathbb{R} \right\}$. *Nous avons* $\dim(C(A)) = 2$, *car nous avons l'isomorphisme* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & C(A) \\ (u,v) & \mapsto & P\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} P^{-1} \end{array} \right.$. *C'est bien un isomorphisme, car il est bien surjectif par la formule de* $C(A)$ *et c'est injectif, car* $P\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} P^{-1} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow u = v = 0$.

De plus, on a $I_2A = AI_2$ *et* $AA = AA$, *donc* I_2 *et* A *sont deux matrices indépendantes de* $C(A)$. *Ainsi* (I_2, A) *est une base de* $C(A)$ *et donc* $C(A) = vect(I_2, A)$.

(c) *Soit* $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *et on pose* $N = P^{-1}XP$. *On a :*

$-4X^2 - 7X = A \Leftrightarrow -4PN^2P^{-1} - 7PNP^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow -4N^2 - 7N = D$. *Résolvons plutôt cette dernière équation.*

Si N *est solution, on a* $ND = -4N^3 - 7N^2 = DN$. *Grâce à la question précédente,* N *est diagonale de la forme* $N = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$. *Par ailleurs on doit avoir*

$\begin{pmatrix} -4u^2 - 7u & 0 \\ 0 & -4v^2 - 7v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, *donc :* $\left\{ \begin{array}{ccc} -4u^2 - 7u & = & 3 \\ -4v^2 - 7v & = & -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \in \{-1, -3/4\} \\ v \in \{-2, 1/4\} \end{array} \right.$.

Réciproquement, si $N = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$, *avec* $u \in \{-1, -3/4\}$ *et* $v \in \{-2, 1/4\}$, *alors* $-4N^2 - 7N = D$.

En revenant à la matrice X, *l'ensemble des solutions est* $\left\{ P\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} P^{-1},\ u \in \{-1, -3/4\}, v \in \{-2, 1/4\} \right\}$.

(d)

4.4 Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Proposition 4.4.1 (Diagonalisabilité et polynôme minimal)

- *Un endomorphisme* u *de* E *est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et toutes ses racines sont simples.*
- *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *La matrice* A *est diagonalisable sur* $\mathbb{K}$ *si et seulement si son polynôme minimal est scindé et toutes ses racines sont simples.*

Démonstration :

Remarque 4.4.1 *Plus précisément u est diagonalisable si et seulement si* $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ *est le polynôme minimal de u, grâce au premier point de la preuve précédente.*

Corollaire 4.4.1 (Diagonalisabilité et polynôme scindé à racines simples)

- *Un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si il est annulé par un polynôme scindé à racines simples.*
- *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il est annulé par un polynôme scindé à racines simples.*

Démonstration : Traitons le premier point. Soit P un polynôme annulateur de u scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$. Alors le polynôme minimal de u, μ_u, divise P, car P est dans l'idéal annulateur de u. Par unicité de la décomposition en produit de polynômes irréductibles, μ_u est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ et on conclut grâce à la proposition précédente.

Exemple 4.4.1

1. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme $f : M \mapsto AM$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si A l'est.*

2. *Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que toutes matrices de G sont diagonalisables.*

3. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.*

4. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $a \in E$ non nuls. On pose $f : x \mapsto x + \varphi(x)a$ définie sur E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable en utilisant le polynôme minimal de f.*

5. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.*
   (a) *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.*
   (b) *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.*

Corollaire 4.4.2 (Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit) *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F. Si u est diagonalisable, alors $\tilde{u}$ aussi.*

Démonstration :

Exemple 4.4.2 *1. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que*

$$A = \begin{pmatrix} (0) & & \alpha_{2n} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \alpha_1 & & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}) \text{ soit diagonalisable.}$$

2. On désigne par V *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de dimension finie* n. *Soit une partie* $\mathcal{F}$ *de l'ensemble* $\mathcal{L}(V)$ *constituée d'endomorphismes diagonalisables. On suppose de plus que quels que soient* $u \in \mathcal{F}$ *et* $v \in \mathcal{F}$, *on a :* $u \circ v = v \circ u$
Montrer que l'on peut trouver une base de V *dans laquelle la matrice de tout élément de* $\mathcal{F}$ *est diagonale.*

4.5 Récapitulatif des méthodes pour montrer la diagonalisabilité

Exemple 4.5.1 *Montrer que* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable de quatre manières :*

1. *sans calcul,*

2. *en déterminant χ_A et les sous-espaces propres,*
3. *en calculant A^2,*
4. *en utilisant le rang (méthode un peu spécifique).*

1. A est symétrique réelle.
2. On trouve $\chi_A = X^2(X-3)$. On trouve :
   - $E_3(A) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, donc $\dim(E_3(A)) = 1 = m_3$.
   - $E_0(A)$ est défini par l'équation : $x - y + z = 0$, qui est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, donc : $\dim(E_0(A)) = 2 = m_0$.

   On a donc $\dim(E_3(A)) + \dim(E_(A)) = 3$.
3. On trouve que $A^2 = 3A$ soit $A(A - 3I_3) = 0$. Ainsi $X(X-3)$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
4. Toutes le colonnes de A sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}\,(A) = 1$. Or :
   $\dim(E_0(A)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(A)) = 3 - \mathrm{rg}\,(A) = 2$, grâce au théorème du rang. Ainsi on a : $m_0 \geq 2$, donc les valeurs propres complexes de A répétées selon leur multiplicité sont : $0, 0, \lambda$. Ainsi :
   $tr(A) = 0 + 0 + \lambda = \lambda$ et comme $tr(A) = 3$, alors $\lambda = 3$. Ainsi 3 est une valeur propre de A de multiplicité un. Or on a : $1 \leq \dim(E_3(A)) \leq m_3 = 1$, donc $\dim(E_3(A)) = 1$. Ainsi $\dim(E_3(A)) + \dim(E_0(A)) = 1 + 2 = 3$.

4.6 Étude de certaines matrices classiques

4.6.1 Matrices compagnon et matrices circulantes

Exemple 4.6.1 *Soit* $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$ *, avec* $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{K}$ *et* $n \geq 2$.

1. *Montrer que* $\chi_C(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
2. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que C soit diagonalisable.*
3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t_0, t_1, ..., t_{n-1} \in \mathbb{C}$, on pose :* $T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{n-1} & t_0 & \ddots & & t_{n-2} \\ t_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_0 \end{pmatrix}$, *que l'on appelle matrice circulante et* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. *Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, puis que T l'est aussi, en précisant le spectre.*

1.

2. *Nous raisonnons comme dans l'exemple 4.2.3.*

Tout d'abord pour que C soit diagonalisable il faut que $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ soit scindé sur $\mathbb{K}$.

Soit $\lambda \in Sp(C)$. On a : $C - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ & & & -\lambda & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$, *dont les $n-1$ premières colonnes sont libres. Ainsi* $\mathrm{rg}\,(C - \lambda I_n) \geq n-1$, *puis :* $\dim(\mathrm{Ker}\,(C - \lambda I_n)) \leq 1$ *et donc :* $\dim(E_\lambda(A)) = 1$.

Ainsi C est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

3. ***Remarque 4.6.1*** *On peut montrer que :* $\mathrm{Ker}\,\left(M - \omega^k \mathrm{I}_n\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{k(n-1)} \end{pmatrix} \right\}$.

4.6.2 Matrice « Attila »

Exemple 4.6.2 *Soit* $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *avec $n \geq 2$.*

1. *Déterminer les valeurs propres et les sous-espace propres de J.*

2. Diagonaliser $C = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$, *avec* a, b *dans* $\mathbb{K}$.

4.6.3 Matrices tridiagonales

Exemple 4.6.3 *Soit* $(a,b)\in\mathbb{C}^2$*. Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de*

$$M=\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0\\ b & a & b & & 0\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b & a & b\\ 0 & \cdots & 0 & b & a\end{pmatrix}.$$

On pourra chercher les en même temps les valeurs propres et vecteurs propres.

4.7 Calcul de la puissance d'une matrice et applications

Remarque 4.7.1 *IMPORTANTE : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A = PDP^{-1}$, avec P dans $GL_n(\mathbb{K})$, alors : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}$. Ainsi si D est diagonale, le calcul de A^k est assez simple.*

Exemple 4.7.1 *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour k dans $\mathbb{N}$.*

Dans le deuxième exemple de 4.6.2 , pour $a = 0$ et $b = 1/2$, nous avons diagonalisé une telle matrice, avec $A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^k & 0 \\ 0 & 0 & 1/2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\frac{2}{2^k} & 1-\frac{1}{2^k} & 1-\frac{1}{2^k} \\ 1-\frac{1}{2^k} & 1+\frac{2}{2^k} & 1-\frac{1}{2^k} \\ 1-\frac{1}{2^k} & 1-\frac{1}{2^k} & 1+\frac{2}{2^k} \end{pmatrix}.$$

Application de ceci : déterminer toutes les suites (a_n), (b_n) et (c_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \dfrac{b_n + c_n}{2} \\ b_{n+1} & = & \dfrac{a_n + c_n}{2} \\ c_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{array}\right.,\ \text{avec } a_0 = 1, b_0 = 0 \text{ et } c_0 = 0.$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, avec A la matrice précédente.

Par récurrence, on montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En extrayant la première colonne de A^n, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{\begin{array}{rcl} a_n & = & \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{2^n}\right) \\ b_n & = & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \\ c_n & = & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \end{array}\right.$.

5 Théorème de Cayley-Hamilton

Dans cette section E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphisme de E et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 5.0.1 (Cayley-Hamilton)

- *Le polynôme caractéristique de u annule u. Autrement dit : $\chi_u(u) = 0$.*
- *Le polynôme caractéristique de A annule A. Autrement dit : $\chi_A(A) = 0$.*

Démonstration : (Hors programme)
Notons $n = \dim(E)$ et prouvons que $\chi_u(u)(x) = 0_E$ pour tout $x \in E$. Si x est nul alors l'égalité est claire.
Supposons désormais $x \neq 0_E$, de sorte que (x) soit une famille libre. Considérons

$$\nu \ = \ \min\left\{k \geq 2 \,/\, \left(x, u(x), \ldots, u^k(x)\right) \text{ liée}\right\}.$$

Par construction $u^\nu(x)$ est dans $vect(x, u(x), \ldots, u^{\nu-1}(x))$, donc $u^\nu(x)$ se décompose en

$$u^\nu(x) \ = \ a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{\nu-1} u^{\nu-1}(x).$$

Complétons la famille $(x, u(x), \ldots, u^{\nu-1}(x))$ en une base $\mathcal{B}$ de E, dans laquelle la matrice de u est :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 & * \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & a_{\nu-2} & \vdots \\ & & 1 & a_{\nu-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P) & *_{\nu,n-\nu} \\ 0_{n-\nu,\nu} & M \end{pmatrix}$$

où $P(X) = X^\nu - a_{\nu-1}X^{\nu-1} - \cdots - a_1 X - a_0$. Constatons que $P(u)(x) = 0_E$. Grâce à l'exemple **??**, on a : $\chi_{\mathcal{C}(P)} = P$. On remarque alors que : $\chi_u \ = \ \chi_{\mathcal{C}(P)} \times \chi_M$ puis en évaluant en u

$$\chi_u(u) \ = \ \chi_M(u) \circ \chi_{\mathcal{C}(P)}(u)$$

et enfin en appliquant à x :

$$\chi_u(u)(x) \ = \ \chi_M(u)\Big(\chi_{\mathcal{C}(P)}(u)(x)\Big) \ = \ \chi_M(u)\Big(0_E\Big) \ = \ 0_E.$$

Remarque 5.0.1 1. *(IMPORTANT) Le polynôme minimal μ_u divise le polynôme caractéristique χ_u : $\mu_u | \chi_u$, car ce dernier est un polynôme annulateur.*
2. *(IMPORTANT) Le point précédent nous permet de dire que $d^\circ(\mu_u) \leq d^\circ(\chi_u) = n$.*
3. *Le polynôme minimal est à chercher parmi les diviseurs du polynôme caractéristique.*

Exemple 5.0.1 1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \geq 2$ telle que $A^n = I_n$ et $(I_n, A, ..., A^{n-1})$ soit une famille libre.*
   (a) *Montrer que $\chi_A = X^n - 1$.*
   (b) *Déterminer $tr(A)$ et $\det(A)$.*

2. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$. Montrer qu'il n'existe pas $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nul tel que $AU = UB$.*

3. *On a vu dans le chapitre 2, que* $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ *est irréductible sur* $\mathbb{Q}$. *En déduire que* $GL_2(\mathbb{Q})$ *n'admet pas d'éléments d'ordre* 5.

4. *Déterminer les plans stables de* $u : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x, y+z, z) \end{array} \right.$. *On peut montrer que* $\chi_u = (X-1)^2(X-2)$ *et que* $E_1(u) = vect(0,1,0)$ *et* $E_2(u) = vect(1,0,0)$.

Corollaire 5.0.1 (Racine de μ_u ou μ_A) *Les racines de* μ_u *(respectivement* μ_A*) dans* $\mathbb{K}$ *sont exactement les valeurs propres de* u *(respectivement* A*).*

Démonstration : Comme $\mu_u | \chi_u$, grâce à la remarque 5.0.1, alors les racines de μ_u sont incluse dans celles de χ_u qui sont exactement les élements de $Sp(u)$.
D'autre part $Sp(u)$ est inclus dans l'ensemble des racines de μ_u, car μ_u est un polynôme annulateur de u. On a la même démonstration pour A.

6 Trigonalisation

6.1 Endomorphismes et matrices trigonalisables

Dans ce paragraphe, on suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 6.1.1 (Endomorphismes et matrices trigonalisables)
1. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *On dit que* u *est trigonalisable s'il existe une base* $\mathcal{B}$ *de* E *telle que* $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ *soit triangulaire supérieure.*
2. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On dit que* A *est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Autrement dit s'il existe* P *dans* $GL_n(\mathbb{K})$ *telle que* $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$ou\ A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Remarque 6.1.1 1. *Tout endomorphisme (respectivement matrice) diagonalisable est trigonalisable.*

2. *Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Alors A est trigonalisable si et seulement si u est trigonalisable.*
   Ceci reprend la même preuve que la remarque 4.2.1.

Proposition 6.1.1 (Trigonalisabilité d'une matrice et endomorphisme canoniquement associé) *Une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé l'est.*

Démonstration : Cela découle de la remarque précédente, en prenant pour $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et pour u, l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Théorème 6.1.1 1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
   - *u est trigonalisable sur $\mathbb{K}$;*
   - *χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$;*
   - *Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ tel que $P(u) = 0$;*
   - *μ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.*

2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
   - *A est trigonalisable sur $\mathbb{K}$;*
   - *χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$;*
   - *Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ tel que $P(A) = 0$;*
   - *μ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration : On suppose u trigonalisable. Ainsi il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :
$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et donc } \chi_u = \begin{vmatrix} X-\lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & X-\lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X-\lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i) \text{ qui est}$$
scindé sur $\mathbb{K}$.
Le cas matriciel découle directement du deuxième point de la remarque précédente.

Le deuxième point implique le troisième point, grâce au théorème de Cayley-Hamilton.
Montrons que le troisième point implique la trigonalisabilité.

Les trois premiers points sont ainsi équivalents.

Si χ_u ou χ_A sont scindés sur $\mathbb{K}$, alors μ_u ou μ_A respectivement le sont aussi, car $\mu_u|\chi_u$ et $\mu_A|\chi_A$. Ainsi le deuxième point implique le quatrième point.

Enfin le quatrième point implique le troisième, car le polynôme minimal est aussi un polynôme annulateur.

Remarque 6.1.2 1. *(IMPORTANT) Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.*

2. *(IMPORTANT) Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.*
3. *Si on considère une matrice réelle comme une matrice complexe, alors on peut la trigonalisaer dans $\mathbb{C}$. Mais attention la matrice de passage et la matrice triangulaire semblable à la matrice de départ sont à coefficients dans $\mathbb{C}$.*

Exemple 6.1.1 1. *Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable. Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tels que $B = P \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$.*

2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres répétées selon leur multiplicité. Soit $Q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Montrer que : $Sp(Q(A)) = \{Q(\lambda_1), ..., Q(\lambda_n)\}$ et $\det(Q(A)) = \prod_{i=1}^{n} Q(\lambda_i)$.*

   Comme on est sur $\mathbb{C}$, alors A est trigonalisable, donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que :

   $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$. *On a ainsi :* $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^k P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$. *Par suite :*

   $$Q(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda_1^k & * & \dots & * \\ 0 & \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda_2^k & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & * & \dots & * \\ 0 & Q(\lambda_2) & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   Ainsi : $Sp(Q(A)) = \{Q(\lambda_1), ..., Q(\lambda_n)\}$ *et* $\det(Q(A)) = \prod_{i=1}^{n} Q(\lambda_i)$.

3. *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $fg = 0$. Montrer que f et g ont un vecteur propre en commun, puis qu'ils sont cotrigonalisables dans la même base.*

6.2 Étude pratique d'une trigonalisation

Pour trigonaliser une matrice, vous serez toujours guidés. Travaillons sur un exemple.

Exemple 6.2.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. *On pose* $B = A - I_3$.

1. *Est-elle trigonalisable sur* $\mathbb{R}$ *?*
2. *Déterminer un vecteur qui ne soit pas dans* $\mathrm{Ker}\,(B)$.
3. *En déduire qu'il existe* P *dans* $GL_3(\mathbb{R})$ *tel que* $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.
4. *Calculer* A^k *pour tout* k *de* $\mathbb{N}$.

1. $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -2 & 1 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix} \underbrace{=}_{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3} \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 1 \\ X-1 & X-3 & 1 \\ X-1 & -2 & X \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix}$
$\underbrace{=}_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^3$. χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, donc A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. On a : $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas dans $\mathrm{Ker}\,(B)$.
3. Il s'agit de trouver une base (X_1, X_2, X_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que : $AX_1 = X_1$, $AX_2 = X_2$ et $AX_3 = X_2 + X_3$ ceci est équivalent à $X_1, X_2 \in E_1(A)$ et $BX_3 = X_2$. Nous cherchons d'abord X_3 tel que $BX_3 \neq 0$ (car X_2 doit être un vecteur d'une base). On prend donc $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ensuite on pose $X_2 = BX_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a bien $AX_2 = X_2$, soit $X_2 \in E_1(A)$. On cherche $E_1(A)$, puis on trouve un vecteur $X_1 \in E_1(A)$ tel que (X_1, X_2) soit libre. On constate que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifie ces conditions.
On a bien : $AX_1 = X_1$, $AX_2 = X_2$ et $AX_3 = X_2 + X_3$. Reste à vérifier que (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a $\det(X_1, X_2, X_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. On pose donc $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, qui est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $(X_1, \ldots, X_3)$ et donc : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.
4. Calculons $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k$. On constate que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on montre ensuite par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi on a : $A^k = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k P^{-1}$. Comme $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, on a grâce au produit de matrices par blocs pour la matrice centrale :
$A^k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k & 2k & -k \\ -k & 1+2k & -k \\ -k & 2k & 1-k \end{pmatrix}$.

6.3 Réduction des endomorphismes et des matrices nilpotents

Proposition 6.3.1 (Caractérisation des endomorphismes/matrices nilpotentes)
- *A est nilpotent si et seulement si elle est trigonalisable avec pour seule valeur propre* 0.
- *u est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre* 0.

Démonstration :

-

- Soit $\mathcal{B}$ une base de E et on pose $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Comme u est nilpotente si et seulement si A l'est et on peut conclure grâce au point précédent.

Remarque 6.3.1 *(IMPORTANTE) Une matrice A non nulle nilpotente n'est pas diagonalisable. On a le même résultat pour les endomorphismes nilpotents non nuls. 0 étant la seule valeur propre de A, alors si A était diagonalisable, il existerait $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = 0$, ce qui est contradictoire.*

Proposition 6.3.2 (Nilpotence et polynôme caractéristique) *Un endomorphisme ou une matrice sont nilpotents si et seulement si leur polynôme caractéristique est X^n.*

Démonstration : En effet être trigonalisable et avoir seulement 0 comme valeur propre signifie, grâce à la preuve de la proposition précédente, que le polynôme caractéristique est scindé avec uniquement 0 comme racine.

Exemple 6.3.1 1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Déterminer* $\det(I_n + A)$.

2. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si M et $2M$ sont semblables, alors M est nilpotente.*

3. ***(Théorème de Burnside)***
   (a) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ tr(A^k) = 0$. Montrer que A est nilpotente.*
   (b) *Soient G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall M \in G,\ M^N = I_n$.*
   Soit $(M_1, ..., M_p) \in G^p$ une base de $Vect(G)$.
   Montrer que l'application définie sur G par $A \mapsto (tr(AM_1), ..., tr(AM_p))$ est injective (si A et B ont la même image, on montrera que $tr(AB^{-1}) = n$ et on en déduira les valeurs propres de AB^{-1}). Qu'en déduit-on sur G ?

6.4 Sous-espaces caractéristiques

Dans ce paragraphe, on suppose que χ_u et χ_A sont scindés sur $\mathbb{K}$, avec $\chi_u = \chi_A = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{m_i}$.

Définition 6.4.1 (Sous-espaces caractéristiques) *On appelle sous-espaces caractéristiques de u (respectivement A) les sous-espaces*

$$F_{\lambda_i}(u) = \text{Ker}\,((u-\lambda_i Id_E)^{m_i})\,(\textit{respectivement } F_{\lambda_i}(A) = \text{Ker}\,((A-\lambda_i I_n)^{m_i})),\ \textit{pour } i \textit{ dans } [\![1,k]\!].$$

Remarque 6.4.1

1. *On a :* $\forall i \in [\![1,k]\!],\ E_{\lambda_i}(u) = \text{Ker}\,(u-\lambda_i Id_E) \subset \text{Ker}\,((u-\lambda_i Id_E)^{m_i}) = F_{\lambda_i}(u)$.
2. *Pour tout* $i \in [\![1,k]\!]$, *le sous-espace* $F_{\lambda_i}(u)$ *est stable par* u *:*
   u *commute avec* $(u-\lambda_i Id_E)^{m_i}$ *et donc laisse u laisse stable* $\text{Ker}\,((u-\lambda_i Id_E)^{m_i}) = F_{\lambda_i}$.

Proposition 6.4.1 (Somme des sous-espaces caractéristiques) *On a :*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_{\lambda_i}(u) \ \textit{ et } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^{k} F_{\lambda_i}(A).$$

Démonstration : Grâce au théorème de Cayley-Hamilton, on a $0 = \chi_u(u) = \prod_{i=1}^{k}(u-\lambda_i Id_E)^{m_i}$. Grâce au lemme des noyaux, on a : $E = \text{Ker}\,(0) = \text{Ker}\left(\prod_{i=1}^{k}(u-\lambda_i Id_E)^{m_i}\right) = \bigoplus_{i=1}^{k}\text{Ker}\,((u-\lambda_i Id_E)^{m_i})$.
Idem pour la matrice A.

Proposition 6.4.2 (Dimension des sous-espaces caractéristiques) *On a :*

$$\forall i \in [\![1,k]\!],\ \dim(F_{\lambda_i}(u)) = m_i \ \textit{ et } \dim(F_{\lambda_i}(A)) = m_i.$$

Démonstration :

Exemple 6.4.1 (Décomposition de Dunford) *Montrer qu'il existe un unique couple* (d,n) *dans* $(\mathcal{L}(E))^2$ *tel que* $dn = nd$, $u = d+n$, *avec* d *diagonalisable et* n *nilpotente.*
Pour l'existence, on s'intéressera, pour $i \in [\![1,k]\!]$, *à l'endomorphisme* u_i *l'endomorphisme induit par* u *sur* $F_{\lambda_i}(u) = F_i$.
Pour l'unicité, si (d',n') *est un autre couple, on montrera que* d' *laisse stable les* F_i, *pour* i *dans* $[\![1,k]\!]$ *et que* $d-d'$ *est diagonalisable.*

Proposition 6.4.3 (Décomposition d'une matrice ou d'une endomorphisme lorsque χ_u ou χ_A est scindé)

- *On suppose que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe une base $\mathcal{B}$ telle que* $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} T_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & T_k \end{pmatrix}$,

  avec pour tout i de $[\![1, k]\!]$, la matrice T_i est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_i & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix}$.

- *On suppose que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors A est semblable à une matrice de la forme* $\begin{pmatrix} T_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & T_k \end{pmatrix}$, *avec pour tout i de $[\![1,k]\!]$, la matrice T_i est de la forme* $\begin{pmatrix} \lambda_i & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix}$.

Démonstration :

- On reprend la démonstration et les notations de la décomposition de Dunford. Soit $i \in [\![1,k]\!]$. On a : $u_i = \lambda_i Id_{F_{\lambda_i}(u)} + n_i$, avec n_i nilpotente. Comme n_i est nilpotente, donc il est trigonalisable. Soit $\mathcal{C}_i$ une base de $F_{\lambda_i}(u)$ telle que $Mat_{\mathcal{C}_i}(n_i) = \begin{pmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$ (le spectre étant réduit à $\{0\}$). On a donc $Mat_{\mathcal{C}_i}(u_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_k)$ est une base adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_{\lambda_i}(u)$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} T_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & T_k \end{pmatrix}$, avec pour tout i de $[\![1,k]\!]$, la matrice T_i est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_i & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix}$.
- Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Sa matrice dans la base canonique est A. Grâce au premier point, il existe une base dans laquelle la matrice de u soit de la forme voulue et donc A est semblable à cette matrice.