Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$ permettent de définir des distances sur ces espaces, et de pouvoir parler de limites. Il s'agit ici de pouvoir étendre ces notions au cadre plus général de n'importe quel espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Rappels sur l'ensemble des réels

1.1 Valeur absolue

Définition 1.1.1 (Valeur absolue)

1. *Pour tout réel x, on appelle* ***valeur absolue*** *de x et on note $|x|$ le plus grand des réels x et $-x$ ($|x| = \max(x, -x)$).*
2. *Pour tous réels x et y, on appelle* ***distance*** *entre x et y et on note $d(x, y)$ le réel $|x - y|$.*

Remarque 1.1.1

1. *On a $|x|^2 = x^2$.*
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x|$

Proposition 1.1.1 (Inégalités triangulaires) *Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$|xy| = |x||y|; \quad ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|; \quad ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

Remarque 1.1.2

1. *Les réels x vérifiant $|x - a| \leq b$, sont les réels à distance de a inférieure à b ce qui se représente géométriquement : $[a - b, a + b]$.*
2. *Soit $M \in \mathbb{R}_+$: $|x| \leq M \Leftrightarrow -M \leq x \leq M$, ,la distance de x à 0 est inférieure à M.*
3. *Soit $M \in \mathbb{R}_+$: $|x| \geq M \Leftrightarrow (x \geq M$ ou $x \leq -M)$, ,la distance de x à 0 est supérieure à M.*

Proposition 1.1.2 (Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$) *Soient $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

1.2 Bornes supérieures, inférieures, minima, maxima

Définition 1.2.1 (Bornes supérieures, inférieures, minima, maxima) *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

1. *Si A possède un plus grand élément (majorant qui est dans A), on appelle cet élément maximum de A et on le note $\max(A)$. On a : $\max(A) \in A$ et $\forall a \in A,\ a \leq \max(A)$.*
2. *Si A possède un plus petit élément (minorant qui est dans A), on appelle cet élément minimum de A et on le note $\min(A)$. On a : $\min(A) \in A$ et $\forall a \in A,\ a \geq \min(A)$.*
3. *On dit que x est la borne supérieure de A si c'est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A. On le note $\sup(A)$.*
   Autrement dit : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A,\ \sup(A) - \varepsilon < a$.
4. *On dit que x est la borne inférieure de A si c'est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A. On le note $\inf(A)$.*
   Autrement dit : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A,\ a < \inf(A) + \varepsilon$.

Proposition 1.2.1 (Lien entre $\max$, $\sup$, $\min$, $\inf$) *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

1. *Si A possède un plus grand élément, alors A possède une borne supérieure.*
   On a alors $\sup(A) = \max(A)$.

2. *Si A possède un plus petit élément, alors A possède une borne inférieure.*
   On a alors $\inf(A) = \min(A)$.

Théorème 1.2.1 (Théorème de la borne supérieure et inférieure) 1. *Toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.*
   Dans ce cas il existe une suite (x_n) de A telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sup(A)$.
2. *Toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.*
   Dans ce cas il existe une suite (x_n) de A telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \inf(A)$.

Remarque 1.2.1 1. *Pour montrer que $\sup(A) \leq M$, il suffit de montrer que pour tout élément $x \in A$, on a : $x \leq M$.*
   En effet ceci signifie que M est un majorant et comme $\sup(A)$ est le plus petit majorant, on obtient l'inégalité : $\sup(A) \leq M$.

   De même pour montrer que $\inf(A) \geq m$, il suffit de montrer que pour tout élément $x \in A$, on a : $x \geq m$.
2. *Pour montrer que $\sup(A) \geq M$, il suffit de trouver une suite (x_n) de A telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = M$, car : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq \sup(A)$, puis $M \leq \sup(A)$ par passage à la limite.*
   De même pour montrer que $\inf(A) \leq m$, il suffit de (x_n) de A telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = m$.
3. *Par conséquent, si on veut montrer que $M = \sup(A)$ ou $m = \inf(A)$, on peut montrer ceci à l'aide des deux types d'inégalités précédentes.*
4. *(IMPORTANT) Si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et k un réel positif, alors $\sup(kA) = k\sup(A)$.*

Exemple 1.2.1 $[0,1[$ *a une borne supérieure et inférieure, car* $[0,1[$ *est non vide et majoré. On a :* $\inf[0,1[= \min[0,1[= 0$ *et* $\sup[0,1[= 1$, *mais* $\max[0,1[$ *n'existe pas car* 1 *n'est pas dans* $[0,1[$.

1.3 Parties entières

Définition 1.3.1 *Soit $x \in \mathbb{R}$. L'unique entier relatif n vérifiant $n \leq x < n+1$ s'appelle la **partie entière** de x que l'on note $\lfloor x \rfloor$ et parfois $E(x)$. C'est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.*

Remarque 1.3.1 *On pose $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ que l'on appelle la partie fractionnaire de x et qui vérifie : $0 \leq \{x\} < 1$.*

Exemple 1.3.1 1. $\lfloor 1.01 \rfloor = 1,\ \lfloor -3 \rfloor = -3,\ \lfloor -1.5 \rfloor = -2.$
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\left\lfloor (\sqrt{3}+1)^{2n+1} \right\rfloor = (\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$, puis étudier la convergence de la série $\sum \sin\left(\pi(\sqrt{3}+1)^{2n+1}\right)$.*

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer qu'il existe $q \in [\![1, N]\!]$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que $|qx - p| < \dfrac{1}{N}$. On pourra considérer $mx - \lfloor mx \rfloor$, avec m dans $\mathbb{N}$.

2 Normes et distances

2.1 Normes

Définition 2.1.1 (Norme) *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle norme sur E une application $N : E \to \mathbb{R}$ telle que :*

- *Positivité : $\forall x \in E,\ N(x) \geq 0$.*
- *Séparation : $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.*
- *Homogénéité : $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.*
- *Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.*

Le couple (E, N) est alors un espace vectoriel normé.

Remarque 2.1.1 *1. La norme peut être aussi notée $x \mapsto \|x\|$.*

2. $N(0_E) = 0$, car $N(0_E) = N(0 \times 0_E) = |0| \times N(0_E) = 0$.

3. On a alors pour $x_1, \dots, x_n \in E$ l'inégalité triangulaire généralisée : $N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(x_i)$.
Ceci se prouve par récurrence. Pour $n = 2$, ceci vient de la définition.
Si on suppose la proposition vraie pour un certain $n \geq 2$, alors pour $x_1, \dots, x_{n+1}$ dans E, on a : $N\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) \leq N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + N(x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} N(x_i) + N(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} N(x_i)$, d'où la propriété au rang $n+1$.

4. On a : $\forall x, y \in E,\ |N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$. En effet :

5. Un vecteur x est dit unitaire lorsque $N(x) = 1$. Pour tout $x \neq 0_E$, le vecteur $\dfrac{x}{N(x)}$ est unitaire.

Proposition 2.1.1 (Norme associée à un produit scalaire) *Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $(.|.)$. L'application : $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est une norme.*

Proposition 2.1.2 (Quelques normes sur $\mathbb{K}^n$) *Sur $\mathbb{K}^n$: pour tout $u=(u_1,\dots,u_n)$ dans $\mathbb{K}^n$, on pose :*

1. $\|u\|_1=\sum_{k=1}^{n}|u_k|$;
2. $\|u\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|u_k|^2}$;
3. $\|u\|_\infty=\max_{1\le k\le n}(|u_k|)$.

Cela définit des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration : • Pour $\|.\|_\infty$: preuve similaire à cette même norme pour les matrices. Voir l'exemple ci-dessous.

• Pour $\|.\|_1$: -Positivité : $\forall u\in\mathbb{K}^n,\ \|u\|_1=\sum_{k=1}^{n}|u_k|\geq 0$.

-Séparation : Soit $u\in\mathbb{K}^n$ tel que : $\|u\|_1=\sum_{k=1}^{n}|u_k|=0$. Alors comme tous les termes de la somme sont positifs, alors : $\forall k\in[\![1,n]\!],\ |u_k|=0$, donc : $u=0$.

-Homogénéité : $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall u\in\mathbb{K}^n,\ \|\lambda u\|_1=\sum_{k=1}^{n}|\lambda u_k|=\sum_{k=1}^{n}|\lambda|\times|u_k|=|\lambda|\sum_{k=1}^{n}|u_k|=|\lambda|\|u\|_1$.

Inégalité triangulaire : $\forall u,v\in\mathbb{K}^n,\ \|u+v\|_1=\sum_{k=1}^{n}|u_k+v_k|\leq\sum_{k=1}^{n}(|u_k|+|v_k|)=\sum_{k=1}^{n}|u_k|+\sum_{k=1}^{n}|v_k|=\|u\|_1+\|v\|_1$.

• Pour $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$:

Sur $\mathbb{R}^n$, on a le produit scalaire canonique : $(u|v)=\sum_{k=1}^{n}u_kv_k$. Ainsi : $\|u\|_2=\sqrt{(u|u)}$.

sur $\mathbb{C}^n$: La positivié, la séparation et l'homogénéité se montrent comme pour $\|.\|_1$. Reste l'inégalité triangulaire :

$\forall u,v\in\mathbb{C}^n,\ \|u+v\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|u_k+v_k|^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(|u_k|+|v_k|)^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|u_k|^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|v_k|^2}$, en utilisant l'inégalité triangulaire de $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ avec les vecteurs de $\mathbb{R}^n$: $(|u_1|,...,|u_n|)$ et $(|v_1|,...,|v_n|)$.

Exemple 2.1.1 *Voici les normes usuelles utilisées pour certains espaces découlant des normes précédentes.*
Si E est un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, on définit ainsi trois normes sur E par $\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|$, $\|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}$ et $\|x\|_\infty=\max_{1\le k\le n}(|x_k|)$ où $x_1,\dots,x_n$ sont les coordonnées de $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ dans $\mathcal{B}$.

Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En identifiant une matrice $[a_{ij}]_{1\le i,j\le n}$ avec un élément de $\mathbb{K}^{n^2}$ et en écrivant ses coefficients en ligne : $(a_{11},a_{12},...,a_{1n},a_{21},a_{22},...,a_{2n},...,a_{n1},a_{n2},...,a_{nn})$, on peut reprendre les normes précédentes :

1. $\|A\|_1=\sum_{1\le i,j\le n}|a_{i,j}|$;
2. $\|A\|_2=\sqrt{tr(\overline{A^T}A)}=\sqrt{\sum_{1\le i,j\le n}|a_{i,j}|^2}$ *(relation vue dans le chapitre 4)* ;
3. $\|A\|_\infty=\max_{1\le i,j\le n}|a_{i,j}|$.

- *Montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme.*
- *Montrer que pour tout A,B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\|AB\|_2\leq\|A\|_2\|B\|_2$. Une norme vérifiant cela est appelé norme d'algèbre.*
- *Soit $n\geq 2$. Existe-t-il un norme $\|.\|$sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \|AB\|=\|BA\|$?*

- *On remarque que : $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \|A\|_\infty\geq 0$.*
  — *Si $\|A\|_\infty=0$, alors : $\forall i,j\in[\![1,n]\!],\ 0\leq|a_{i,j}|\leq\|A\|_\infty$, et donc $\forall i,j\in[\![1,n]\!],\ |a_{i,j}|=0$, puis : $\forall i,j\in[\![1,n]\!],\ a_{i,j}=0$, donc : $A=0$.*
  — *Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. On a :*
  $\|\lambda A\|_\infty=\max\{|\lambda a_{i,j}|,\ i,j\in[\![1,n]\!]\}=|\lambda|\times\max\{|a_{i,j}|,\ i,j\in[\![1,n]\!]\}=|\lambda|\times\|A\|_\infty$.

— *Pour* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on a :* $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$. $\|A\|_\infty + \|B\|_\infty$ *majore* $\{|a_{i,j} + b_{i,j}|,\ i, j \in [\![1, n]\!]\}$.
Ainsi :
$\|A + B\|_\infty = \max\{|a_{i,j} + b_{i,j}|,\ i, j \in [\![1, n]\!]\} \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$.

•

•

Proposition 2.1.3 (Norme uniforme) *Soit X un ensemble non vide. On note $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées allant de X dans $\mathbb{K}$. Ainsi pour tout f de $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, on peut définir $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$. Ceci définit une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, que l'on appelle norme uniforme.*

Démonstration :

Remarque 2.1.2 *Si $X = \mathbb{N}$, alors $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ que l'on munit de la norme $\|u\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$, pour u dans $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.*

Proposition 2.1.4 (Quelques normes sur $\mathcal{C}(\lfloor a, b\rceil, \mathbb{K})$) *Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$: pour tout f dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, on pose :*

1. $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ *appelée norme de la convergence en moyenne ;*
2. $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a,b]} (|f(x)|) = \max\limits_{x \in [a,b]} (|f(x)|)$;
3. $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\,dt}$ *appelée norme de la convergence en moyenne quadratique.*

   Cela définit des normes sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

Démonstration : Pour la norme $\|.\|_1$: Soit $f \in E$.

- $|f|$ est continue et positive sur $[a, b]$, donc $\|f\|_1$ existe et est positive.

- On suppose que $\int_a^b |f| = \|f\|_1 = 0$. Comme $|f|$ est continue et positive, alors $|f| = 0$, donc $f = 0$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a : $\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f| = \int_a^b |\lambda| \times |f| = |\lambda| \int_a^b |f| = |\lambda| \|f\|_1$.
- Soit $g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. On a : $\|f+g\|_1 = \int_a^b |f+g| \leq \int_a^b (|f|+|g|) = \int_a^b |f| + \int_a^b |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1$.

• Pour la norme $\|.\|_\infty$: Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. Ainsi $|f|$ est une fonction continue définie sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc elle bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes. Ce qui explique que le sup existe et c'est un max.
Pour la suite, $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ en calquant la démonstration de la proposition 2.1.3.
• La norme $\|.\|_2$ provient du produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$ (voir chapitre 1) sur $\mathbb{R}$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la positivité, l'homogénéité sont immédiates. La séparation utilise les mêmes arguments que pour $\|.\|_1$. Pour l'inégalité triangulaire, on a :
$\forall f,g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, $\sqrt{\int_a^b |f+g|^2} \leq \sqrt{\int_a^b (|f|+|g|)^2} \leq \sqrt{\int_a^b |f|^2} + \sqrt{\int_a^b |g|^2}$, en utilisant l'inégalité triangulaire dans le cas réel appliquée aux fonctions réelles $|f|$ et $|g|$.

Remarque 2.1.3 *ATTENTION, ne pas écrire $\|f(x)\|_\infty$, cela ne veut rien dire car dans $\|.\|_\infty$, nous devons mettre une fonction et non un nombre.*

2.2 Distances

Dans ce paragraphe, $(E, \|.\|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Définition 2.2.1 (Distance) *Soit $(x,y) \in E^2$. La distance entre x et y associée à la norme $\|.\|$ est le réel $d(x,y) = \|x-y\|$.*

Proposition 2.2.1 (Propriétés de la distance) *Soit $(x,y,z) \in E^3$ et d la distance associée à $\|.\|$.*

1. ***Séparation.*** *$d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$.*
2. ***Inégalité triangulaire.*** *$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.*

Définition 2.2.2 (Distance d'un point à une partie non vide) *Étant donné une partie A de E et x un élément de E, on appelle distance de x à A la borne inférieure des distances de x à tous les éléments de A (attention : cette borne n'est pas nécessairement atteinte) :*

$$d(x,A) \;=\; \inf_{a\in A} d(x,a) = \inf_{a\in A} \|x-a\|.$$

Exemple 2.2.1
1. *Sur $\mathbb{R}$, muni de la valeur absolue : $d(\sqrt{3},\mathbb{Z}) = |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$.*
   En effet : $\sqrt{3} \approx 1.73$ et 2 est l'entier le plus proche de $\sqrt{3}$.
2. *On munit ℓ^∞ (l'ensemble des suites bornées) de la norme $\|.\|_\infty$. On note c la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit E l'ensemble des suites qui convergent vers 0. Déterminer $d(c,E)$.*

Remarque 2.2.1
1. *Si x est dans A, alors $d(x,A) = 0$, car : $0 \leq d(x,A) \leq \|x - \underbrace{x}_{\in A}\| = 0$.*

2. *ATTENTION, si $d(x,A)=0$, cela n'implique pas que x est dans A. Par exemple $d(\sqrt{3},\mathbb{Q})=0$, mais $\sqrt{3}$ n'est pas dans $\mathbb{Q}$. En effet il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \sqrt{3}$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq d(\sqrt{3},\mathbb{Q}) \leq |\sqrt{3}-r_n|$ et en passant à la limite : $0 \leq d(\sqrt{3},\mathbb{Q}) \leq 0$ et donc $d(\sqrt{3},\mathbb{Q})=0$.*

2.3 Parties bornées

Définition 2.3.1 (Boule ouverte / fermée) *Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.*

1. *$\mathcal{B}(a,r)=\{x\in E,\ d(a,x)<r\}$ est la boule ouverte de centre a et de rayon r.*
2. *$\bar{\mathcal{B}}(a,r)=\{x\in E,\ d(a,x)\leq r\}$ est la boule fermée de centre a et de rayon r.*
3. *$S(a,r)=\{x\in E,\ d(a,x)=r\}$ est la sphère de centre a et de rayon r.*

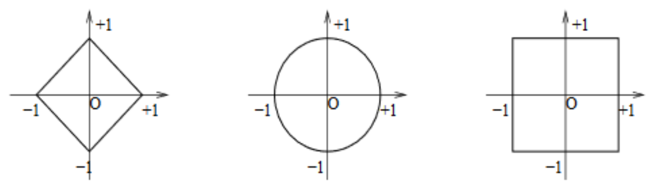
Exemple 2.3.1 1. *Quelles sont les boules ouvertes sur $\mathbb{R}$?*

Ce sont tous les intervalles $]u,v[$, avec $u,v\in\mathbb{R}$ et $u<v$.

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$. On a $\mathcal{B}(a,r)=\{x\in\mathbb{R},\ |x-a|<r\}=]a-r,a+r[=]u,v[$, avec $u=a-r$ et $v=a+r$.

Réciproquement, soient $u,v\in\mathbb{R}$ tels que $u<v$. On pose $a=\dfrac{u+v}{2}$ et $r=\dfrac{v-u}{2}>0$. On a : $\mathcal{B}(a,r)=]a-r,a+r[=]u,v[$.

2. *Sur un espace vectoriel normé les boules ouvertes et fermées dépendent de la norme choisie. Dans $\mathbb{R}^2$, représenter graphiquement les boules fermées centrées en 0 et de rayon 1 associées aux normes 1, 2 et infinie définies précédemment.*
De gauche à droite, nous représentons ces boules, respectivement pour les normes 1, 2 et infinie.



Pour $\|.\|_1$: $\overline{\mathcal{B}}_1(0,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x|+|y|\leq 1\}$. Par exemple si $x,y\geq 0$, cela donne $y\leq 1-x$, pour le quart de plan en haut à droite ; si $x\geq 0$ et $y\leq 0$, cela donne $-y\leq 1-x \Leftrightarrow y\geq x-1$, pour le quart de plan en bas à droite,...

Pour $\|.\|_2$: $\overline{\mathcal{B}}_2(0,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \sqrt{x^2+y^2}\leq 1\}$, ce qui nous donne l'intérieur (bord compris) du cercle trigonométrique.

Pour $\|.\|_\infty$: $\overline{\mathcal{B}}_\infty(0,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \max(|x|,|y|)\leq 1\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x|\leq 1 \text{ et } |y|\leq 1\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\in[-1,1] \text{ et } y\in[-1,1]\}=[-1,1]\times[-1,1]$.

Définition 2.3.2 (Partie convexe) *On suppose que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Soit $A\subset E$. La partie A est convexe si*

$$\forall (x,y)\in A^2,\ \forall t\in[0,1],\ tx+(1-t)y\in A.$$

« Quand on relie deux points quelconques x et y de A, on reste dans A. »

Exemple 2.3.2 1. *Déterminer les parties convexes de $\mathbb{R}$.*

2. *Représenter graphiquement une partie non convexe de $\mathbb{R}^2$.*

3. *Tout sous-espace vectoriel F de E est convexe.*

Soient $x,y\in F$ et $\lambda\in[0,1]$. On a : $\lambda x+(1-\lambda)y\in F$, car F est un sous-espace vectoriel de E. Ainsi F est convexe.

Proposition 2.3.1 (Convexité et Boules) *Toute boule est convexe.*

Démonstration : Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons par exemple que $\mathcal{B}(a,r)$ est convexe.

Exemple 2.3.3 *Soit $N : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie la séparation et l'homogénéité. On pose $B = \{x \in E,\ N(x) \leq 1\}$. Montrer que si B est convexe, alors N est une norme.*

Définition 2.3.3 (Parties, suites, fonctions bornées) *Soient $A \subset E$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et f une fonction d'un ensemble X à valeurs dans E.*

1. *La partie A est un ensemble borné s'il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in A,\ \|x\| \leq M$ (autrement dit A est contenue dans une certaine boule fermée. Par exemple ici, on a : $A \subset \bar{\mathcal{B}}(0, M)$).*
2. *La suite (u_n) est bornée s'il existe K dans $\mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leq K$.*
3. *La fonction f est bornée si $f(X)$ est une partie bornée de E, c'est-à-dire : il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in X,\ \|f(x)\| \leq M$.*

Remarque 2.3.1 $\bar{\mathcal{B}}(0,1)$, $\mathcal{B}(0,1)$ *et* $S(0,1)$ *sont bornées, car pour x dans ces ensembles, on a : $\|x\| \leq 1$.*

Exemple 2.3.4 *Montrer que* $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \to \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \quad \dfrac{xy}{x^2+y^2} \end{cases}$ *est bornée.*

Remarque 2.3.2 *La notion de bornée dépend de la norme choisie.*
En effet, considérons $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions continues sur $[0,1]$ définies pour tout entier naturel n par $f_n : x \mapsto \sqrt{n}x^n$.
On a : $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |\sqrt{n}x^n| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \sqrt{n}x^n = \sqrt{n}$. Ainsi $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
On a : $\|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f_n^2(t)dt} = \sqrt{\int_0^1 nt^{2n}dt} = \sqrt{\left[\frac{n}{2n+1}t^{2n+1}\right]_0^1} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \leq 1$. Ainsi $(\|f_n\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2.4 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Proposition 2.4.1 (Produit d'espaces vectoriels normés) *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, N_1), ..., (E_p, N_p)$, des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. On pose*

$$\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p, \quad N(x) \;=\; \max_{1 \le i \le p} N_i(x_i).$$

Ainsi $(E_1 \times ... \times E_p, N)$ est un espace vectoriel normé.

Démonstration : On constate que : $\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p, \quad N(x) = \|(N_1(x_1), ..., N_p(x_p))\|_\infty$, avec $\|.\|_\infty$ la norme infinie sur $\mathbb{R}^n$.
-Positivité : provient du fait $\|.\|_\infty$ est positive.
-Séparation : soit $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ tel que $N(x) = 0$. On a donc : $(N_1(x_1), ..., N_p(x_p)) = (0, ..., 0)$, car $\|.\|_\infty$ est une norme. Ainsi : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ N_i(x_i) = 0$, puis : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i = 0$, car chaque N_i est une norme.
-Homogénéité : soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$. On a $N(\lambda(x_1, \dots, x_p)) = N((\lambda x_1, ..., \lambda x_p)) = \|(N_1(\lambda x_1), ..., N_p(\lambda x_p))\|_\infty = \|(|\lambda| N_1(x_1), ..., |\lambda| N_p(x_p))\|_\infty = |\lambda| \times \|(N_1(x_1), ..., N_p(x_p))\|_\infty = |\lambda| N(x_1, ..., x_p)$, par homogénéité des N_i, puis de $\|.\|_\infty$.
-Inégalité triangulaire : soient $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$. On a :
$\forall i \in [\![1, p]\!],\ N_i(x_i + y_i) \le N_i(x_i) + N_i(y_i) \le \|(N_1(x_1), ..., N_p(x_p))\|_\infty + \|(N_1(y_1), ..., N_p(y_p))\|_\infty = N(x_1, ..., x_p) + N(y_1, ..., y_p)$, par l'inégalité triangulaire pour les N_i, puis :
$N((x_1 + y_1, ..., x_p + y_p)) = \max\{N_1(x_1 + y_1), ..., N_p(x_p + y_p)\} \le N(x_1, ..., x_p) + N(y_1, ..., y_p)$.

3 Suites d'un espace vectoriel

Dans ce paragraphe $(E, \|.\|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

3.1 Convergence de suites

Définition 3.1.1 (Convergence) *Soit (u_n) une suite d'éléments de E et $\ell \in E$. La suite (u_n) converge vers ℓ si $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - \ell\| = 0$. .*
Autrement dit : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \ge N \Rightarrow \|u_n - \ell\| \le \varepsilon$.

S'il n'existe pas d'éléments ℓ vérifiant cette propriété, la suite (u_n) diverge

Proposition 3.1.1 (Propriétés sur les suites convergentes)

1. *Toute suite (u_n) convergente de E est bornée.*
2. *Si (u_n) possède une limite alors celle-ci est unique.*
3. *Si (u_n) et (v_n) convergent vers respectivement ℓ et ℓ', alors pour tout λ dans $\mathbb{K}$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + \lambda v_n) = \ell + \lambda \ell'$.*
4. *Si (u_n) converge vers ℓ, alors $(\|u_n\|)$ converge vers $\|\ell\|$.*

Démonstration :

1. On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. La suite réelle $(\|u_n - \ell\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et donc elle est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n - \ell\| \le M$ et donc :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| = \|u_n - \ell + \ell\| \le \|u_n - \ell\| + \|\ell\| \le M + \|\ell\|$.
2. Si ℓ et ℓ' sont deux limites de (u_n) alors :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \|\ell - \ell'\| = \|(\ell - u_n) + (u_n - \ell')\| \le \|\ell - u_n\| + \|u_n - \ell'\|$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (\|\ell - u_n\| + \|u_n - \ell'\|) = 0$, donc $\|\ell - \ell'\| \le 0$, puis $\|\ell - \ell'\| = 0$, puis $\ell = \ell'$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\|(u_n + \lambda v_n) - (\ell + \lambda \ell')\| = \|(u_n - \ell) + \lambda(v_n - \ell')\| \le \|u_n - \ell\| + \|\lambda(v_n - \ell')\| = \|u_n - \ell\| + |\lambda| \|v_n - \ell'\|$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - \ell\| = \lim\limits_{n \to +\infty} \|v_n - \ell'\| = 0$ et donc par comparaison de limites réelles, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \|(u_n + \lambda v_n) - (\ell + \lambda \ell')\| = 0$.

4. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \big|\|u_n\| - \|\ell\|\big| \leq \|u_n - \ell\|$. Par encadrement, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \big|\|u_n\| - \|\ell\|\big| = 0$.

Exemple 3.1.1 *Sur $\mathbb{R}[X]$, on considère les normes $N_1(P) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$ et $N_2(P) = \sup\limits_{t\in[-1,1]} |P(t)|$, avec $P \in \mathbb{R}[X]$.*
On admet que ce sont des normes (on montrera cependant la séparation pour la norme N_1). Déterminer une suite qui converge vers 0 pour la norme N_2, mais pas pour la norme N_1.

Remarque 3.1.1 *(IMPORTANT) Cet exemple montre que la convergence dépend de la norme choisie.*

Proposition 3.1.2 (Convergence d'une suite dans un produit d'espace) *Soient $(E_1, N_1), ..., (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. On considère une suite (x_n) de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$, avec :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(p)}) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\ell_1, ..., \ell_p)$ si et seulement si pour tout k de $[\![1,p]\!]$ la suite $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k.

Démonstration : On suppose que pour tout k de $[\![1,p]\!]$, la suite $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k. On pose $\ell = (\ell_1, ..., \ell_p)$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq N(x_n - \ell) = \max\left(N_1(x_n^{(1)} - \ell_1), ..., N_p(x_n^{(p)} - \ell_p)\right) \leq N_1(x_n^{(1)} - \ell_1) + ... + N_p(x_n^{(p)} - \ell_p).$$

Les détails de cette inégalité sont dans l'exemple 4.1.1, deuxième point. Comme chaque terme du membre de droite converge vers 0, alors par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} N(x_n - \ell) = 0$.
On suppose maintenant que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\ell = (\ell_1, ..., \ell_p)$ de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$. Soit $k \in [\![1,p]\!]$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq N_k(x_n^{(k)} - \ell_k) \leq \max\left(N_1(x_n^{(1)} - \ell_1), ..., N_p(x_n^{(p)} - \ell_p)\right) = N(x_n - \ell).$$

Comme le membre de droite converge vers 0, alors par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} N_k(x_n^{(k)} - \ell_k) = 0$.

3.2 Suites extraites

Proposition 3.2.1 (Sous-suites d'une suite convergente) *Soit (u_n) une suite convergeant vers ℓ. Alors, toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.*

Démonstration : Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n). La suite réelle $(\|u_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc la suite extraite $(\|u_\varphi(n) - \ell\|)$ aussi et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.

Définition 3.2.1 (Valeur d'adhérence) *On appelle valeur d'adhérence d'une suite (u_n) tout élément de E qui est limite d'une sous-suite de (u_n).*

Remarque 3.2.1 1. *(IMPORTANT) Une suite convergente admet une unique valeur d'adhérance, grâce à la proposition précédente.*
Par contraposée, une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

2. *En utilisant les mêmes méthodes que le chapitre 3, on prouve que $x \in E$ est une valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si :*
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \; \|u_n - x\| \leq \varepsilon \;\; (*)$.
Cela revient aussi à dire que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, \; \|u_n - x\| \leq \varepsilon\}$ est infini.

4 Comparaison de normes

Dans ce paragraphe nous allons expliquer pourquoi une même suite peut converger pour certaines normes et pas d'autres.

4.1 Normes équivalentes

Définition 4.1.1 (Domination de normes) *Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 est dominé par N_2 s'il existe k dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que :*

$$\forall x \in E, \; N_1(x) \leq k N_2(x).$$

Exemple 4.1.1 1. *Montrer que : $\forall x \in \mathbb{K}^p, \; \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{p}\|x\|_2 \leq p\|x\|_\infty$.*

2. *Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}), \; f(0) = f(1) = 0\}$. On pose : $\forall f \in E, \; N(f) = \left(\int_0^1 (f'')^2\right)^{1/2}$.*

   (a) *Montrer que N est une norme.*

   (b) *Montrer qu'elle est dominée par $\|.\|_\infty$.*

   (a) *On pose : $\forall f, g \in E, \; \varphi(f,g) = \int_0^1 f''g''$. Montrons que cela définit un produit scalaire. φ est symétrique, bilinéaire et positive.*
   Soit $f \in E$ telle que : $\int_0^1 (f'')^2 = 0$. Comme $(f'')^2$ est continue positive, alors $f'' = 0$. Ainsi il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in [0,1], \; f(x) = ax + b$.
   De $f(0) = f(1) = 0$ on trouve $a = b = 0$, puis $f = 0$.

   (b)

Remarque 4.1.1 *Pour montrer que l'on n'a pas $N_1 \leq kN_2$, on cherche en général une suite (u_n) qui converge vers 0 ou est bornée pour N_2, mais pas pour N_1.*

Définition 4.1.2 (Normes équivalentes) *Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe α, β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que :*

$$\forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Remarque 4.1.2 *On a aussi $\dfrac{1}{\beta}N_2 \leq N_1 \leq \dfrac{1}{\alpha}N_2$. Cela revient à dire que N_1 est dominé par N_2 et que N_2 est dominé par N_1.*

Proposition 4.1.1 (Invariance du caractère borné) *Soient N_1 et N_2deux normes équivalentes sur E. Une partie A de E est bornée pour la norme N_1 si et seulement si elle est bornée pour la norme N_2.*

Démonstration : Soient α, β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que : $\forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$.
On suppose que A est bornée pour la norme N_1, donc il existe M dans $\mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in A,\ N_1(x) \leq M$.
Aisni on a : $\forall x \in A,\ N_2(x) \leq \beta M$. Ainsi A est borné pour N_2.
Si A est borné pour N_2, on conclut de la même façon en constatant que $N_1 \leq \dfrac{1}{\alpha}N_2$.

Proposition 4.1.2 (Invariance de la convergence) *Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E. Une suite (u_n) de E converge vers ℓ pour la norme N_1 si et seulement si elle converge vers ℓ pour la norme N_2.*

Démonstration : Soient α, β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que : $\forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$.
On suppose que (u_n) converge vers ℓ pour la norme N_1, ce qui revient à dire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} N_1(u_n - \ell) = 0$.
On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq N_2(u_n - \ell) \leq \beta N_1(u_n - \ell)$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(u_n - \ell) = 0$, soit (u_n) converge vers ℓ pour la norme N_2.
Pour le sens retour, on conclut de la même façon en considérant les inégalités :
$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq N_1(u_n - \ell) \leq \dfrac{1}{\alpha}N_2(u_n - \ell)$.

Remarque 4.1.3 *La proposition précédente nous dit que pour montrer la convergence d'une suite, si l'on dispose de plusieurs normes équivalentes, alors on pourra choisir la norme que l'on préfère.*

Exemple 4.1.2

1. *Étudier l'équivalence deux à deux des normes $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.*

2. *Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\right\}$ et pour $f \in E$, on pose : $N(f) = \left(\displaystyle\int_0^1 f''(t)^2\,dt\right)^{1/2}$.*
   Les normes $\|.\|_\infty$ et N_2 sont-elles équivalentes ?

3. *Soit* $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$. *On pose* $N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ *et* $N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$. *On admet que* N_1 *est une norme sur* E.
   (a) *Montrer que* N_2 *est une norme sur* E.
   (b) *Montrer que les normes* N_1 *et* N_2 *sont équivalentes.*

4. *Soit* ℓ^∞ *l'ensemble des suites réelles bornées. On pose* $N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ *et* $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ *pour tout* $u \in \ell^\infty$. *On suppose que ce sont des normes sur* ℓ^∞. *Comparer ces deux normes.*

4.2 Normes en dimension finie et applications

Théorème 4.2.1 (Équivalence des normes en dimension finie) *Si* E *est de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration : Attendre le paragraphe sur la compacité.

Exemple 4.2.1 1. *Soit* $\|.\|$ *une norme sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Démontrer qu'il existe un réel* $k > 0$ *tel que :*
$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad \|AB\| \ \leq\ k\|A\|\|B\|.$

2. *Soit* $E = \mathbb{R}[X]$. *Si* $P \in \mathbb{R}[X]$, *on note* $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$. *On définit* $N_\infty(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$ *et* $\|P\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}(|p_k|)$ *et on admettra que cela définit des normes.*

   Soit E_n *l'ensemble des polynômes normalisés (dont le coefficient dominant est égal à* 1*) de degré* n. *On pose* $a_n = \inf_{P\in E_n} N_\infty(P)$.

   (a) *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$.

   (b) *Montrer que la suite* (a_n) *est décroissante.*

   (c) *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

3. *Soient* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie et* $f \in \mathcal{L}(E)$. *On suppose que* $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$. *Montrer que :* $\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq C\|f^2(x)\|$.

Corollaire 4.2.1 (Convergence en dimension finie) *Si* E *est de* *dimension finie*, *la convergence et la limite d'une suite ne dépendent pas de la norme choisie.*

Démonstration : Découle de la proposition 4.1.2.

Remarque 4.2.1 *De même la proposition 4.1.1 nous dit que le caractère borné d'une partie d'un espace vectoriel de dimension finie ne dépend pas de la norme chosie. Ceci est faux en dimension infinie.*

Proposition 4.2.1 (Convergence composante par composante) *Soient (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E de dimension finie et $(e_1,\dots,e_p)$ une base de E. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $u_n=\sum_{i=1}^{p}u_{n,i}e_i$, avec les $u_{n,i}$ dans $\mathbb{K}$.*
La suite (u_n) est convergente si et seulement si pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, la suite $(u_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un scalaire ℓ_i. Le cas échéant, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sum_{i=1}^{p}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n,i}\right)e_i=\sum_{i=1}^{p}\ell_ie_i$.

Démonstration : On peut munir E de la norme $\|.\|_1$, c'est-à dire que pour $x=\sum_{i=1}^{p}x_ie_i$, on pose : $\|x\|_1=\sum_{k=1}^{p}|x_k|$. Comme E est de dimension finie, n'importe quel choix de norme convient (corollaire 4.2.1).
Si (u_n) converge vers $\ell=\sum_{i=1}^{p}\ell_ie_i$, alors pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, on a :
$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_{n,i}-\ell_i|\leq\sum_{k=1}^{p}|u_{n,k}-\ell_k|=\|u_n-\ell\|_1$, et donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_{n,i}-\ell_i|=0$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n,i}=\ell_i$.
Inversement, si pour tout $i\in[\![1,p]\!]$ la suite $(u_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un scalaire ℓ_i, alors on a :
$\forall n\in\mathbb{N},\quad \|u_n-\ell\|_1=\sum_{i=1}^{p}|u_{n,i}-\ell_i|$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\|u_n-\ell\|_1=0$, car le nombre de termes p dans la somme reste fixe.

Exemple 4.2.2 *1. Soit $B=\begin{pmatrix}\lambda&0&1\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. On suppose $|\lambda|<1$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}B^n$.*

Montrons par récurrence que B^n est de la forme $\begin{pmatrix}\lambda^n&0&u_n\\0&\lambda^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Pour $n=0$, on a $B^0=I_3$ et $u_0=0$ convient.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et on suppose qu'il existe $u_n\in\mathbb{K}$ tel que $B^n=\begin{pmatrix}\lambda^n&0&u_n\\0&\lambda^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

On a : $B^{n+1}=BB^n=\begin{pmatrix}\lambda&0&1\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^n&0&u_n\\0&\lambda^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^{n+1}&0&\lambda u_n+1\\0&\lambda^{n+1}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

La récurrence nous fournit : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\lambda u_n+1$ (1). C'est une suite arithmético-géométrique.

Cherchons une suite constante (c) vérifiant (1). On a : $c=\lambda c+1(2)$, soit $c=\dfrac{1}{1-\lambda}$, car $\lambda\neq 1$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (1) si et seulement si : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-c=\lambda(u_n-c)$ (en effectuant $(1)-(2)$). Ainsi $(u_n-c)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison λ, donc :

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n-c=\lambda^n(u_0-c)$, puis : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda^n(u_0-c)+c$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda^n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=c=\dfrac{1}{1-\lambda}$. On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}B^n=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{1-\lambda}\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2. Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et on pose $R_n=\begin{pmatrix}1&-a/n\\a/n&1\end{pmatrix}$, pour n dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que :
$\forall n\in\mathbb{N},\forall\theta\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos(n\theta)&-\sin(n\theta)\\\sin(n\theta)&\cos(n\theta)\end{pmatrix}$ (à faire par récurrence).
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n^n$.

Remarque 4.2.2 *Dans les exemples précédents nous n'avons pas défini de normes pour la convergence, car en dimension finie (ici $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), la convergence est indépendante de la norme choisie.*

5 Séries dans un espace vectoriel normé

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels ou d'éléments d'un espace vectoriel normé E.

5.1 Convergence de série

Définition 5.1.1 (Série, somme partielle, reste, somme)

- *On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.*
- *Pour n fixé, S_n s'appelle somme partielle de la série $\sum u_n$.*
- *On dit que la série $\sum u_n$ converge lorsque la suite $(S_n)_n$ converge.*

  Sa limite est alors appelée somme de la série et notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

  La différence $R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé reste d'ordre n de la série.
- *Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle diverge.*

Remarque 5.1.1 *Le reste d'une série tend vers* 0.

Proposition 5.1.1 (Condition nécessaire de convergence) *Si la série $\sum u_n$ converge, alors (u_n) tend vers* 0.

Démonstration : En écrivant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1}$, on voit que (u_n) est la différence de deux suites ayant la même limite dans E, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Proposition 5.1.2 (Divergence grossière) *Si (u_n) ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge. On dit dans ce cas que la série diverge grossièrement.*

Démonstration : C'est la contraposée de la proposition précédente.

Définition 5.1.2 (Série téléscopique) *La série $\sum u_n$ est téléscopique lorsqu'il existe une suite $(v_n)_n$ telle que $u_n = v_{n+1} - v_n$ pour tout entier n.*

Proposition 5.1.3 (Convergence des séries télescopiques) *On reprend les notations de la définition précédente. La somme partielle de $\sum u_n$ vérifie par conséquent : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = v_{n+1} - v_0$.*

La série $\sum u_n$ est alors convergente si et seulement si la suite $(v_n)_n$ converge, et dans ce cas : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\right) - v_0$.

Démonstration : On a : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n} v_{k+1} - \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = \sum\limits_{l=1}^{n+1} v_l - \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = \sum\limits_{k=1}^{n+1} v_k - \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = v_{n+1} - v_0$.

La suite (v_n) converge si et seulement si la suite (v_{n+1}) converge si et seulement si la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, grâce à la relation précédente et le fait que v_0 soit une constante.

Corollaire 5.1.1 (Lien suite/série) *La suite $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente.*

Proposition 5.1.4 (Linéarité de la somme) *Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors pour tous λ, μ dans $\mathbb{K}$, la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) \;=\; \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu\sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration : Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. On a : $\sum\limits_{n=0}^{n} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda S_n + \mu T_n$. Par linéarité de la limite d'une suite, quand n tend vers $+\infty$, on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) \;=\; \lambda\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Remarque 5.1.2 *On suppose que E est de dimension finie et considère $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Soit $n \in \mathbb{N}$. En décomposant u_n dans la base $\mathcal{B}$, on a : $u_n = \sum\limits_{j=1}^{p} u_n^{(j)} e_j$, avec $u_n^{(j)}$ dans $\mathbb{K}$ pour tout j dans $[\![1, p]\!]$. Grâce à la proposition 4.2.1, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si pour tout j dans $[\![1, p]\!]$, la série numérique $\sum u_n^{(j)}$ converge. Dans ce cas :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}\right) e_j.$$

5.2 Séries absolument convergentes

Dans ce paragraphe, on suppose E de dimension finie.

Définition 5.2.1 (Série absolument convergente) *On dit que la série* $\sum u_n$ *converge absolument si la série à termes positifs* $\sum \|u_n\|$ *converge.*

Remarque 5.2.1 *En dimension finie, comme toutes les normes sont équivalentes, alors la notion d'absolue convergence ne dépend pas de la norme choisie.*

Théorème 5.2.1 (L'absolue convergence implique la convergence) *Si E est de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration : Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Soit $n \in \mathbb{N}$. En décomposant u_n dans la base $\mathcal{B}$, on a : $u_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} u_n^{(j)} e_j$, avec $u_n^{(j)}$ dans $\mathbb{K}$ pour tout j dans $[\![1, p]\!]$. On munit E de la norme $\|.\|_\infty$: si $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j$, avec $\lambda_1, ..., \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$, on pose $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq j \leq p} |\lambda_j|$. Ainsi on a :
$\forall j \in [\![1, p]\!], \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n^{(j)}| \leq \|u_n\|_\infty$. Si $\sum \|u_n\|_\infty$ converge (en dimension finie la notion d'absolue convergence est indépendante de la norme choisie), alors par comparaison, la série numérique $\sum u_n^{(j)}$ converge absolument, donc elle converge grâce aux résultats connus sur les séries à valeurs dans $\mathbb{K}$. La remarque 5.1.2 permet de conclure.

Exemple 5.2.1 *Soit A une algèbre de dimension finie munie d'une norme $\|.\|$. On suppose que : $\forall u, v \in A,\ \|u.v\| \leq \|u\|.\|v\|$.*

1. *Soit $u \in A$ tel que : $\|u\| < 1$. Montrer que la série $\sum u^n$ converge.*
2. *Montrer que pour tout u de A, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.*

1.

2. *On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left\|\dfrac{u^n}{n!}\right\| \leq \dfrac{\|u\|^n}{n!}$. De plus la série exponentielle $\sum \dfrac{\|u\|^n}{n!}$ converge (c'est $e^{\|u\|}$). Donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge absolument et donc converge, car A est de dimension finie et cela est indépendant de la norme choisie.*

5.3 Exponentielle de matrice ou d'endomorphisme

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 5.3.1 (Série exponentielle de matrice/endomorphisme)

- *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La série $\sum \dfrac{A^n}{n!}$ converge (absolument) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge (absolument) dans $\mathcal{L}(E)$.*

Démonstration : • On utilise l'exemple 5.2.1 avec l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de $\|.\|_2$. Par équivalence des normes en dimension finie, on a le résultat quelque soit la norme.
• Soit $\mathcal{B}$ une base de E et on note $n = \dim(E)$. Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, on définit la norme $N(u) = \|Mat_{\mathcal{B}}(u)\|_2$, qui est encore une norme d'algèbre. On conclut comme précédemment.

Définition 5.3.1 (Exponentielle de matrice/endomorphisme)

- *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose*
$$e^A = \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!},$$ *que l'on appelle exponentielle de A.*

- *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose* $e^u = \exp(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$, *que l'on appelle exponentielle de u.*

Proposition 5.3.2 (Exponentielle d'une matrice diagonale) *Soit $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Alors :* $\exp(D) = diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$.

Démonstration : On a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $D^k = diag(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k)$. Ainsi :

$$\exp(D) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} = diag\left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!}, ..., \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_n^k}{k!}\right) = diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}).$$

Exemple 5.3.1

1. *On a :* $\exp(0_{\mathcal{L}(E)}) =$ *et :* $\exp(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) =$
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente, alors :* $\exp(A) =$
3. *Soient $t \in \mathbb{R}$ et* $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. *Déterminer* $\exp(tA)$.

   Grâce à la relation admise dans l'exemple 4.2.2, deuxième point, on a :

   $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$, *puis :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{t^n A^n}{n!} = \begin{pmatrix} \dfrac{t^n \cos(n\theta)}{n!} & -\dfrac{t^n \sin(n\theta)}{n!} \\ \dfrac{t^n \sin(n\theta)}{n!} & \dfrac{t^n \cos(n\theta)}{n!} \end{pmatrix}$. *Or on a :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n e^{in\theta}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(te^{i\theta})^n}{n!} = e^{te^{i\theta}} = e^{t\cos(\theta)} e^{it\sin(\theta)} = e^{t\cos(\theta)}(\cos(t\sin(\theta)) + i\sin(t\sin(\theta))) = e^{t\cos(\theta)}\cos(t\sin(\theta)) + ie^{t\cos(\theta)}\sin(t\sin(\theta))$. *Ainsi, on obtient :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n\cos(n\theta)}{n!} = Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n e^{in\theta}}{n!}\right) = e^{t\cos(\theta)}\cos(t\sin(\theta))$ *et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n\sin(n\theta)}{n!} = Im\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n e^{in\theta}}{n!}\right) = e^{t\cos(\theta)}\sin(t\sin(\theta))$.

   On a donc : $\exp(tA) = e^{t\cos(\theta)} \begin{pmatrix} \cos(t\sin(\theta)) & -\sin(t\sin(\theta)) \\ \sin(t\sin(\theta)) & \cos(t\sin(\theta)) \end{pmatrix}$.
4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 - 3A + 2I_n = 0$. Déterminer* $\exp(A)$.

5. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose* $U_k = \left(I_n + \dfrac{A}{k}\right)^k$. *Étudier la convergence et la limite de la suite* (U_k).

6. *Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que l'exponentielle réalise une bijection entre les matrices nilpotentes et les matrices unipotentes (c'est-à-dire les matrices qui s'écrivent $I_n + N$, avec N nilpotente).*

Proposition 5.3.3 (Exponentielle de matrices/endomorphismes qui commutent)

- *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors :*

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B).$$

- *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $uv = vu$. Alors :*

$$\exp(u + v) = \exp(u)\exp(v).$$

Démonstration : Attendre le chapitre 14 sur les équations différentielles.

Exemple 5.3.2

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\exp(A)$ est inversible et déterminer son inverse.*

2. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Calculer $\exp(\lambda I_n + N)$.*

6 Topologie

Dans ce paragraphe E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

6.1 Parties ouvertes et fermées

6.1.1 Parties ouvertes

Définition 6.1.1 (Partie ouverte) *Soit $A \subset E$. La partie A est une partie ouverte de E si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \subset A$.*

Remarque 6.1.1 *(IMPORTANT) E et $\emptyset$ sont des ouverts de E.*

Proposition 6.1.1 (Ouverts et boules) *Soient $a \in E$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\mathcal{B}(a, R)$ est un ouvert de E.*

Démonstration :

Exemple 6.1.1 *Tout intervalle borné $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, nous avons vu dans l'exemple 2.3.1 que tout intervalle ouvert borné est une boule ouverte, donc c'est un ouvert de $\mathbb{R}$ grâce à la proposition précédente.*
Plus généralement tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrons maintenant que $]a, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $x \in]a, +\infty[$. On pose $r = x - a > 0$. On a :
$\mathcal{B}(x, r) =]x - r, x + r[\subset]a, +\infty[$. On raisonne de même pour les autres intervalles de $\mathbb{R}$.

Proposition 6.1.2 (Union et intersection d'ouverts)

1. *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert : soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts. Alors $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ est un ouvert.*

2. *Une intersection <u>finie</u> d'ouverts est un ouvert. Soit* $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ *une famille d'ouverts. Alors* $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ *est un ouvert.*

Démonstration :

1. Soit $x \in \bigcup_{i\in I} V_i$. Il existe $j \in I$ tel que : $x \in V_j$. Comme V_j est ouvert, il existe un $r > 0$ tel que : $\mathcal{B}(x,r) \subset V_j$ et donc : $\mathcal{B}(x,r) \subset V$.
2.

Remarque 6.1.2 *Une intersection infinie d'ouverts n'est pas forcément un ouvert. Par exemple :*

Exemple 6.1.2 1. *Est-ce que* $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < |x| < 1 \ \ et \ \ |y| \leq 1\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *pour la norme* $\|.\|_2$ *?*

Non. Soit $a = (1/2, 1)$ *qui est dans* B*. Cependant :* $\forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathcal{B}(a,r) \not\subset B$*, car par exemple* $(1/2, 1 + r/2)$ *est dans* $\mathcal{B}(a,r)$*, mais pas dans* B*, car* $|1 + r/2| > 1$*.*

2. *Soit* $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *et* $U = \{f \in E,\ f(0) > 0\}$*. Montrer que* U *n'est pas un ouvert pour la norme* $\|.\|_1$*.*

3. *Soient* A *et* B *deux parties d'un espace vectoriel normé et* $A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$*. On suppose* A *ouverte. Montrer que* $A + B$ *est ouverte.*

Remarque 6.1.3 *Toujours préciser dans quel espace on est ouvert. Par exemple* $]0,2[$ *est ouvert dans* $\mathbb{R}$*, mais ne l'est pas dans* $\mathbb{C}$*, car* 1 *est dans* $]0,2[$*, mais :* $\forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathcal{B}_{\mathbb{C}}(1,r) \not\subset]0,2[$*. Par exemple on a :* $1 + ir/2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}(1,r)$*, mais :* $1 + ir/2 \notin]0,2[$*.*

Proposition 6.1.3 (Produit d'ouverts) *Soient* $(E_1, N_1), ..., (E_p, N_p)$ *des espaces vectoriels normés sur* $\mathbb{K}$*. Soient* $\Omega_1, ..., \Omega_p$ *des ouverts de* $E_1, ..., E_p$ *respectivement. Alors* $\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_p$ *est un ouvert de* $E = E_1 \times ... \times E_p$*.*

Démonstration : On reprend les notations de la proposition 2.4.1.
Soit $x = (x_1, ..., x_p) \in \Omega_1 \times ... \times \Omega_p$. Ainsi pour tout k de $[\![1,p]\!]$, il existe r_k dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x_k, r_k) \subset \Omega_k$ (chaque Ω_k étant un ouvert de E_k). On pose $r = \min\limits_{1 \leq k \leq p} r_k$ et donc $r > 0$.
Soit $y = (y_1, ..., y_p) \in B(x,r)$. On a alors $N_k(y_k - x_k) \leq N(y-x) < r \leq r_k$. Ainsi on a y_k dans $B(x_k, r_k)$ et donc dans Ω_k. Par conséquent y est dans Ω, puis : $B(x,r) \subset \Omega$.

Proposition 6.1.4 (Invariance de la notion d'ouvert pour deux normes équivalentes) *Soient* N_1 *et* N_2 *deux normes équivalentes de* E*. Alors l'ensemble des ouverts de* (E, N_1) *est le même que l'ensemble des ouverts pour* (E, N_2)*.*

Démonstration : On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $N_1 \leq kN_2$. Montrons que tout ouvert pour N_1 est un ouvert pour N_2.

Corollaire 6.1.1 (Ouverts en dimension finie) *Si E est de dimension finie, alors la notion d'ouvert est indépendante de la norme choisie.*

Démonstration : En dimension finie, comme toutes les normes sont équivalentes, cela provient de la proposition précédente.

6.1.2 Parties fermées

Définition 6.1.2 (Partie fermée) *Une partie* F *de* E *est dite fermé dans* E *si son complémentaire* $E \backslash F$ *est un ouvert de* E*.*

Remarque 6.1.4 *(IMPORTANTE)* E *et* $\emptyset$ *sont des fermés de* E*.*

Exemple 6.1.3

1. *Soit* $x \in E$*, alors* $\{x\}$ *est un fermé de* E *(et donc* $E \setminus \{x\}$ *est un ouvert).*

2. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$*. Les intervalles* $]-\infty, a]$*,* $[a,b]$ *et* $[b, +\infty[$ *sont fermés dans* $\mathbb{R}$*, car leurs complémentaires dans* $\mathbb{R}$ *sont respectivement* $]a, +\infty[$*,* $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ *et* $]-\infty, b[$ *qui sont des ouverts de* $\mathbb{R}$ *(*$]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ *étant un ouvert en tant que réunion de deux ouverts).*
3. $\mathbb{Z}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}$*, car*

Remarque 6.1.5 *ATTENTION, une partie qui n'est pas ouverte n'est pas forcément fermée, tout comme une partie qui n'est pas fermée, n'est pas forcément ouverte. Il existe des parties qui sont ni ouvertes, ni fermées :*

Proposition 6.1.5 (Fermés et boules et sphères)

1. *Toute boule fermée est un fermé.*
2. *Toute sphère est un fermé.*

Démonstration :

1. Soient $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $U = E \setminus \overline{\mathcal{B}}(a,r)$. Montrons que U est un ouvert de E. Soit $x \in U$. On a alors $\|x-a\| > r$, car x n'est pas dans $\overline{\mathcal{B}}(a,r)$. On pose $R = \|x-a\| - r > 0$. Soit $y \in \mathcal{B}(x,R)$. On a $\|y-a\| = \|(y-x)-(x-a)\| \geq |\|y-x\| - \|x-a\|| = |\|x-a\| - \|y-x\|| \geq \|x-a\| - \|y-x\| > \|x-a\| - R = r$. Ainsi y n'est pas dans $\overline{\mathcal{B}}(a,r)$, donc y est dans U. Ainsi : $\mathcal{B}(x,R) \subset U$. Donc U est un ouvert de E car pour chaque x de U, il existe $R > 0$ tel que : $\mathcal{B}(x,R) \subset U$. Ainsi $\overline{\mathcal{B}}(a,r)$ est un fermé de E.

2. Soient $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $V = E \setminus S(a,r) = \mathcal{B}(a,r) \cup (E \setminus \overline{\mathcal{B}}(a,r))$ qui est la réunion de deux ouverts grâce au point précédent. Ainsi V est un ouvert de E, donc $S(a,r)$ est un fermé de E.

Proposition 6.1.6 (Union et intersection de fermés)

1. *Une intersection quelconque de fermés est un fermé, autrement dit soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E, alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un fermé de E.*
2. *Une réunion finie de fermés est un fermé, autrement dit soit $(F_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille finie de fermés de E, alors $\bigcup\limits_{i\in[\![1,p]\!]} F_i$ est un fermé de E*

Démonstration :

1. $E \setminus \bigcap\limits_{i\in I} F_i = \bigcup\limits_{i\in I} (E \setminus F_i)$ est un ouvert de E en tant que réunion quelconque des ouverts $E \setminus F_i$.
2. $E \setminus \bigcup\limits_{i\in[\![1,p]\!]} F_i = \bigcap\limits_{i\in[\![1,p]\!]} (E \setminus F_i)$ est un ouvert de E en tant qu'intersection finie des ouverts $E \setminus F_i$.

Exemple 6.1.4

1. *Soient $x_1, ..., x_n \in E$. Alors $\{x_1, ..., x_n\}$ est une partie fermée de E.*

   Dans l'exemple précédent, nous avons vu que pour tout i de $[\![1,p]\!]$, le singleton $\{x_i\}$ est un fermé de E, donc $\{x_1, ..., x_n\} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{x_i\}$ l'est aussi en tant que réunion finie de fermés.

2. *$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1 \ \text{ et }\ (x-1)^2+y^2 = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.*

   On a : $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1\} = \overline{B}((0,0),1)$ et

   $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-1)^2+y^2 = 1\} = S((1,0),1)$ qui sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$ et donc $G = F_1 \cap F_2$ est un fermé en tant qu'intersection de fermés.

Remarque 6.1.6 *Une union infinie de fermés n'est pas forcément un fermé. Par exemple,*

Proposition 6.1.7 (Produit de fermé) *Soient $(E_1, N_1), ..., (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Soient $F_1, ..., F_p$ des fermés de $E_1, ..., E_p$ respectivement. Alors $F = F_1 \times ... \times F_p$ est un fermé de $E = E_1 \times ... \times E_p$.*

Démonstration : On reprend les notations de la proposition 2.4.1.
Montrons que $E \setminus F$ est un ouvert de E. Soit $x = (x_1, ..., x_p) \in E \setminus F$. Ainsi il existe k de $[\![1, p]\!]$ tel que x_k ne soit pas dans F_k. Or $E_k \setminus F_k$ est un ouvert de E_k, donc il existe r_k dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $B(x_k, r_k) \subset E_k \setminus F_k$. Soit $y = (y_1, ..., y_p) \in B(x, r_k)$. On a alors : $N_k(y_k - x_k) \leq N(y - x) < r_k$ par définition de la norme sur un espace produit. Ainsi on a y_k dans $B(x_k, r_k)$ et donc dans $E_k \setminus F_k$. Par conséquent y n'est pas dans F, donc : $B(x, r) \subset E \setminus F$.

Proposition 6.1.8 (Invariance de la notion fermé pour deux normes équivalentes) *Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes de E. Alors l'ensemble des fermés de (E, N_1) est le même que l'ensemble des fermés pour (E, N_2).*

Démonstration : F est une fermé de (E, N_1) si et seulement si $E \setminus F$ est un ouvert de (E, N_1) si et seulement si $E \setminus F$ est un ouvert de (E, N_2) (grâce à la proposition 6.1.4) si et seulement si F est un fermé de (E, N_2).

Corollaire 6.1.2 (Fermés en dimension finie) *Si E est de dimension finie, alors la notion de fermé est indépendante de la norme choisie.*

Démonstration : En dimension finie, comme toutes les normes sont équivalentes, cela provient de la proposition précédente.

6.2 Voisinages, intérieur, adhérence

6.2.1 Voisinages

Définition 6.2.1 (Voisinage d'un point) *On appelle voisinage d'un point x de E toute partie V de E qui contient une boule ouverte de centre x (rappelons qu'une boule a un rayon strictement positif). On note $\mathcal{V}_E(x)$ ou $\mathcal{V}(x)$ la collection de tous les voisinages de x dans E ; ainsi V est dans $\mathcal{V}_E(x)$ signifie que :*

$$\exists r > 0, \quad \forall y \in E, \quad \|y - x\| < r \;\Rightarrow\; y \in V.$$

Exemple 6.2.1

1. *Les boules ouverts $\mathcal{B}(x, r)$ ou les boules fermée $\overline{\mathcal{B}}(x, r)$ sont des voisinages de x (avec $r > 0$).*
2. *Un ouvert U est un voisinage de chacun de ses points x :*

6.2.2 Intérieur

Définition 6.2.2 (Point intérieur) *Soient $A \subset E$ et $x \in A$.*

1. *x est un point intérieur à A s'il existe une boule ouverte non vide centrée en x incluse dans A. C'est-à-dire : $\exists r \in \mathbb{R}_+^*,\ B(x, r) \subset A$.*
   Autrement dit x est intérieur à A si A est un voisinage de x.
2. *L'intérieur de A, noté $\overset{\circ}{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A.*

Exemple 6.2.2 *Déterminer l'ensemble des points intérieurs de $A = [0, 1[\cup [3, 7] \cup]8, 9[$.*
$\overset{\circ}{A} =]0, 1[\cup]3, 7[\cup]8, 9[$.

Proposition 6.2.1 (L'intérieur est un ouvert) *$\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de E.*

Démonstration :

Remarque 6.2.1 1. *On a :* $\overset{\circ}{A} \subset A$.

2. $\overset{\circ}{A}$ *est le plus grand ouvert inclus dans* A.
En effet, soit U *un ouvert inclus dans* A. *Soit* $x \in U$. *Par définition d'un ouvert, il existe* $r \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que :* $B(x,r) \subset U$, *puis :* $B(x,r) \subset A$, *donc* x *est dans* $\overset{\circ}{A}$ *et donc :* $U \subset \overset{\circ}{A}$.

Exemple 6.2.3 1. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E *et* A *une partie de* E. *Montrer que si* $\overset{\circ}{F}$ *n'est pas vide, alors* $F = E$.

2. *Soit* C *un partie convexe de* E. *Montrer que* $\overset{\circ}{C}$ *est convexe.*

Proposition 6.2.2 (Lien entre intérieur et ouvert) *Une partie* A *de* E *est un ouvert de* E *si et seulement si :* $A = \overset{\circ}{A}$.

Démonstration : Cela découle du dernier point de la remarque précédente, car si A est un ouvert de E, alors le plus grand ouvert inclus dans A est A lui-même et donc $A = \overset{\circ}{A}$. Réciproquement si $A = \overset{\circ}{A}$, alors comme $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de E, alors A aussi.

6.2.3 Adhérence

Définition 6.2.3 (Point adhérent) *Soient* $A \subset E$ *et* $\ell \in E$.

1. *Le vecteur* ℓ *est un point adhérent à* A *si toute boule ouverte non vide centrée en* ℓ *rencontre* A *:* $\forall r > 0,\ \mathcal{B}(\ell, r) \cap A \neq \emptyset$.
2. *L'adhérence de* A, *notée* $\overline{A}$, *est l'ensemble des points adhérents à* A.

Remarque 6.2.2 1. *Tout point de* A *est adhérent à* A *(autrement dit* $A \subset \overline{A}$*) :*
Soit $x \in A$, *alors :* $\forall r > 0,\ x \in \mathcal{B}(x,r) \cap A$ *et donc :* $\forall r > 0,\ \mathcal{B}(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

2. *Ainsi un point est adhérent s'il est dans* A *ou « sur le bords de* A *».*
3. *ATTENTION :* $x \in \overline{A} \not\Rightarrow x \in A$. *Contrexemple :* $0 \in \overline{]0,1[} = [0,1]$ *et* $0 \notin]0,1[$.
4. *On a* $E \setminus \overline{A} = (E \overset{\circ}{\setminus} A)$.

Exemple 6.2.4 *Déterminer l'ensemble des points adhérents de* $A = [0,1[\cup[3,7]\cup]8,9[$.

$\overline{A} = [0,1] \cup [3,7] \cup [8,9]$.

Proposition 6.2.3 (L'adhérence est un fermé) $\overline{A}$ *est un fermé de* E.

Démonstration : On a $E \setminus \overline{A} = (E \overset{\circ}{\setminus} A)$, grâce à la remarque 6.2.2. Ainsi $E \setminus \overline{A}$ est un ouvert de E, en tant qu'intérieur d'un ensemble.

Remarque 6.2.3 $\overline{A}$ *est le plus petit fermé contenant* A. *Nous venons de voir que c'est un fermé. Soit* F *un fermé contenant* A. *Alors* $E \setminus F \subset E \setminus A$. *Ainsi* $E \setminus F$ *est un ouvert inclus dans* $E \setminus A$. *Comme* $(E \overset{\circ}{\setminus} A)$ *est le plus grand ouvert inclus dans* $E \setminus A$, *alors :* $E \setminus F \subset (E \overset{\circ}{\setminus} A) = E \setminus \overline{A}$. *En passant au complémentaire, on a :* $\overline{A} \subset F$.

Exemple 6.2.5 *Soit* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* E. *On note* $Adh(x)$ *l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite* x. *Montrer que* $Adh(x) = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n,\ n \geq p\}}$. *Que peut-on déduire de* $Adh(x)$ *?*

Proposition 6.2.4 (Lien entre adhérence et fermé) *Une partie* A *de* E *est un fermé dans* E *si et seulement si* $\overline{A} = A$.

Démonstration : Si $\overline{A} = A$, alors A est un fermé de E, car $\overline{A}$ l'est. Si A est fermé, alors A est la plus petit fermé contenant lui-même donc $\overline{A} = A$.

Proposition 6.2.5 (Caractérisation séquentielle) *Soient* $A \subset E$ *et* $\ell \in E$. *Le point* ℓ *est adhérent à* A *si et seulement s'il existe une suite d'éléments de* A *qui converge vers* ℓ.
Autrement dit : $\ell \in \overline{A} \Leftrightarrow [\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} x_n = \ell]$.

Démonstration :

Remarque 6.2.4 *Pour chercher les points adhérents d'une partie, il est plus pratique d'utiliser la caractérisation séquentielle plutôt que la définition.*

Exemple 6.2.6 *1. Montrer que la matrice nulle est dans l'adhérence de l'ensemble des matrices inversibles :* $0 \in \overline{GL_n(\mathbb{K})}$.

2. *Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$, alors $\sup(A)$ est dans $\overline{A}$.*
   En effet, il existe une suite (x_n) à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sup(A)$. Donc $\sup(A)$ est dans $\overline{A}$ par caractérisation séquentielle.
   De même on peut montrer que si A est minorée, alors $\inf(A)$ est dans $\overline{A}$.

3. *Soit $a \in E$ et $r > 0$. On a : $\overline{\mathcal{B}(a,r)} = \bar{\mathcal{B}}(a,r)$.*

   Montrons : $\overline{\mathcal{B}(a,r)} \subset \bar{\mathcal{B}}(a,r)$: soit $x \in \overline{\mathcal{B}(a,r)}$. Grâce à la caractérisation séquentielle de la limite, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{B}(a,r)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|x_n - a\| < r$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|x - a\| = \|x - x_n + x_n - a\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - a\| < \|x - x_n\| + r$. En passant à la limite, on obtient : $\|x - a\| \leq r$ et donc x est dans $\bar{\mathcal{B}}(a,r)$.

   Montrons l'autre inculsion. Soit $x \in \bar{\mathcal{B}}(a,r)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
   $\|x - a\| \leq r$ et donc $\left\|\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)(x-a)\right\| \leq \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) r < r$. Ainsi si on pose $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) x + \dfrac{a}{n+1}$, on a : $\|x_n - a\| < r$ et donc x_n est dans $\mathcal{B}(a,r)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Ainsi x est dans $\overline{\mathcal{B}(a,r)}$, d'où l'inclusion dans l'autre sens.

4. *Soit A une partie non vide de E. Montrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ aussi.*

   Remarque 6.2.5 *De la même manière, on montre que si C est une partie convexe de E, alors $\overline{C}$ l'est aussi.*

5. *Soit $x \in E$. Montrer que : $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.*

6. *Soient ℓ^∞ l'ensemble des suites complexes bornées et $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty / \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ u_n = 0\}$. On munit ℓ^∞ de la norme $\|.\|_\infty$. Déterminer $\overline{E}$.*

   Montrons que $\overline{E}$ est l'ensemble des suites de limite nulle que l'on note F.

   Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $u^{(p)}$ la suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^{(p)} = \begin{cases} x_n & \text{si} \quad n \leq p \\ 0 & \text{si} \quad n \geq p+1 \end{cases}$. On a : $\forall p \in \mathbb{N},\ u^{(p)} \in E$.

   Montrons que $\lim\limits_{p\to+\infty} \|x - u^{(p)}\|_\infty = 0$.

   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ |x_n| \leq \varepsilon$.

   Soit $p \geq N$. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - u_n^{(p)}| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \leq p \\ |x_n| & \text{si} \quad n \geq p+1 \end{cases}$. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - u_n^{(p)}| \leq \varepsilon$.

   Par conséquent : $\forall p \geq N,\ \|x - u^{(p)}\|_\infty \leq \varepsilon$, ce qui donne par définition de la limite : $\lim\limits_{p\to+\infty} \|x - u^{(p)}\|_\infty = 0$, puis $x \in \overline{E}$ et donc $F \subset \overline{E}$.

   Soit $y \in \overline{E}$. Il existe une suite $(v^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ de E telle que $\lim\limits_{p\to+\infty} \|y - v^{(p)}\|_\infty = 0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $p \in N$ tel que $\|y - v^{(p)}\|_\infty \leq \varepsilon$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ v_n^{(p)} = 0$ (cela existe car $v^{(p)}$ est dans E).

On a donc : $\forall n \geq N,\ |y_n| = |y_n - v_n^{(p)}| \leq \varepsilon$. Par définition de la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, puis : $y \in F$. On a donc $\overline{E} \subset F$.

Corollaire 6.2.1 (Caractérisation séquentielle des fermés) *Soit $A \subset E$. La partie A est une partie fermée de E si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A (on appelle cela la caractérisation séquentielle).*
Cela revient à dire que A est une partie fermée de E si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ est dans A.

Démonstration : On rappelle que A est fermé dans E si et seulement si $\overline{A} = A$. On utilise ensuite la caractérisation séquentielle de l'adhérence.

Remarque 6.2.6 *(IMPORTANT) Pour montrer que l'on a un fermé, on utilise souvent la caractérisation séquentielle. On peut dire qu'il y a stabilité par passage à la limite.*

Exemple 6.2.7
1. *Est-ce que $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < |x| < 1 \ \text{ et } \ |y| \leq 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$? Déterminer $\overline{B}$ sinon.*

   La suite $\left(\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right)_{n\geq 2}$ est une suite de B, mais : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}, 0\right) = (0,0)$, mais comme $(0,0)$ n'est pas dans B, alors par caractérisation séquentielle, B n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$.

   Soit $(x,y) \in \overline{B}$. Il existe une suite $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de B telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,y_n) = (x,y)$. Or nous avons : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < |x_n| < 1 \ \text{ et } \ |y_n| \leq 1$ et donc quand on passe à la limite nous avons : $0 \leq |x| \leq 1 \ \text{ et } \ |y| \leq 1$. Ainsi on a : $\overline{B} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| \leq 1 \ \text{ et } \ |y| \leq 1\} = [-1,1]^2$. Réciproquement soit $(x,y) \in [-1,1]^2$. Si $x \neq 0$, On considère la suite $\left(\left(\frac{nx}{n+1}, y\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Les éléments de cette suite sont bien dans B, car : $0 < \left|\frac{nx}{n+1}\right| < |x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{nx}{n+1}, y\right) = (x,y)$, donc (x,y) est dans $\overline{B}$. Si $x = 0$, on procède de même en considérant la suite $((1/n, y))_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi : $\overline{B} = [-1,1]^2$.

2. *Est-ce que $GL_n(\mathbb{K})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?*

6.2.4 Frontière

Définition 6.2.4 (Frontière) *Soit $A \subset E$. La frontière de A, notée ∂A, est l'ensemble des points de E adhérents mais non intérieurs à A, soit : $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.*

Exemple 6.2.8 $\partial \mathcal{B}(a,r) = \partial \bar{\mathcal{B}}(a,r) = S(a,r)$.

6.3 Parties denses

Définition 6.3.1 (Parties denses) *Soit A une partie de E. Une partie D de A est dite dense dans A si $\overline{D} = A$.*
Autrement dit pour tout x de A il existe une suite (d_n) à valeurs dans D telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = x$.

Exemple 6.3.1
1. *$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, car tout réel est limite d'une suite de rationnels ou d'une suite d'irrationnels.*
2. *Dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions en escalier est dense pour la norme $\|.\|_\infty$. C'est une reformulation du théorème d'approximation par des fonctions en escalier vu en première année.*
3. *Soit H un hyperplan de E. Montrer que H est soit fermé, soit dense dans E.*

4. *On note* $\ell^1 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} / \sum_{n\geq 0} |u_n| < +\infty\}$, *que l'on munit de la norme* $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$, *pour* $u \in \ell^1$. *Pour* $k \in \mathbb{N}$, *on note* $e^{(k)} = (\delta_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$. *On note* $F = vect(e^{(k)})$. *Montrer que* F *est dense dans* ℓ^1.

5. *Soit* $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *et* $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$, *muni de* $\|.\|_1$.
   (a) *Montrer que* F *est dense dans* E.
   (b) *Est-ce le cas pour* $\|.\|_\infty$?

   (a) *Soit* $g \in E$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On pose* $g_n \in F$ *telle que* $g_n(t) = g(t)$, *pour* $t \in]1/n, 1]$ *et* $g_n(t) = tng\left(\frac{1}{n}\right)$, *pour* $t \in [0, 1/n]$. g_n *est bien continue en* $1/n$, *car* $g_n(1/n) = g(1/n)$. *De plus* g_n *est dans* F. *On a :* $\|g_n - g\|_1 = \int_0^1 |g(t) - g_n(t)|dt = \int_0^{1/n} |g(t) - g_n(t)|dt \leq \int_0^{1/n} |g(t)|dt + \int_0^{1/n} tn|g(1/n)|dt$. *On a :* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/n} |g(t)|dt = \int_0^0 |g(t)|dt = 0$ *et* $\int_0^{1/n} tn|g(1/n)|dt = n|g(1/n)|.[t^2/2]_0^{1/n} = \frac{1}{2n}|g(1/n)| \underbrace{\to}_{n\to+\infty} 0 \times |g(0)| = 0$, *par continuité de* g *en* 0. *Ainsi* $\lim_{n\to+\infty} \|g_n - g\|_1 = 0$ *et donc* g *est la limite (pour la norme* $\|.\|_1$*) d'une suite de fonctions de* F. *Ainsi* F *est dense dans* E.

   (b) *Soit une suite* (f_n) *de* F *qui converge vers une fonction* $g \in E$ *pour la norme* $\|.\|_\infty$. *On a :* $\forall n \in \mathbb{N},\ |g(0)| = |f_n(0) - g(0)| \leq \|f_n - g\|_\infty$. *Quand on passe à la limite on a :* $|g(0)| \leq 0$, *donc* $g(0) = 0$. *Ainsi une fonction* g *de* E *telle que* $g(0) \neq 0$, *ne peut être une limite d'une suite de fonctions de* F. *Ainsi* F *n'est pas dense dans* E.

6. *Soit* G *un sous-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$ *non réduit à* $\{0\}$.
   (a) *On suppose que* $\inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$. *Montrer que* G *est dense dans* $\mathbb{R}$.
   On rappelle que vous avez montré en sup qu'une partie A *est dense dans* $\mathbb{R}$ *si et seulement si elle rencontre tout intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$.
   (b) *On suppose que :* $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) > 0$. *Montrer que :* $G = a\mathbb{Z}$.
   (c) *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $\frac{\theta}{\pi}$ *ne soit pas rationnel. Montrer que* $\theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.
   (d) *Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite* $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.

6.4 Topologie induite sur une partie

Définition 6.4.1 (Voisinage relatif à une partie) *Soient A une partie de E et x un élément de A. Soit V une partie de A. C'est un voisinage relatif de A du point x s'il existe un voisinage $\tilde{V}$ de x dans E tel que : $V = A \cap \tilde{V}$.*

Exemple 6.4.1

1. *Le segment $[0, 1]$ est un voisinage de 0 relatif à $\mathbb{R}_+$, car $[0, 1] = [-1, 1] \cap \mathbb{R}_+$ et $[-1, 1]$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.*
2. *Dans $\mathbb{C}$, $[-1, 3]$ n'est pas un voisinage de 1 ($[-1, 3]$ ne contient pas de disque ouvert dans $\mathbb{C}$), mais c'est un voisinage relatif dans $\mathbb{R}$, car : $[-1, 3] = \mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}(1, 2)$.*

Définition 6.4.2 (Ouvert/fermé relatif à une partie) *Soit A une partie de E.*

1. *Soit U une partie de A. C'est un ouvert relatif de A s'il existe un ouvert $\tilde{U}$ de E tel que : $U = A \cap \tilde{U}$.*
2. *Soit F une partie de A. C'est un fermé relatif de A s'il existe un fermé $\tilde{F}$ de E tel que : $F = A \cap \tilde{F}$.*

Remarque 6.4.1 *U une partie de A est un ouvert relatif si et seulement si U est un voisinage relatif de chacun de ses points.*

Exemple 6.4.2

1. *On travaille sur $\mathbb{R}$. L'intervalle $[0, 1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$, mais c'est un ouvert relatif de $[0, 1]$, car $[0, 1[=]-1, 1[\cap [0, 1]$.*
2. *On travaille sur $\mathbb{R}$. L'intervalle $]0, 1]$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$, mais c'est un fermé relatif de $]0, 2]$, car $]0, 1] = [0, 1] \cap]0, 2]$.*

Proposition 6.4.1 (Caractérisation séquentielle des fermés relatifs) *Soient A une partie de E et G une partie de A. G est un fermé relatif de A si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de G convergeant vers un élément $\ell \in A$, alors on a : $\ell \in G$.*

Démonstration : On suppose que G est un fermé relatif de A. Alors il existe F un fermé de E tel que : $G = A \cap F$. On considère une suite (x_n) d'éléments de G convergeant vers un élément $\ell \in A$. Ainsi (x_n) est aussi à valeurs dans F et par caractérisation séquentielle des fermés, on a donc : $\ell \in F$. Par suite, on a : $\ell \in F \cap A = G$.

On suppose que pour toute suite (x_n) d'éléments de G convergeant vers un élément $\ell \in A$, alors on a : $\ell \in G$. Nous allons montrer que : $G = A \cap \overline{G}$, ce qui prouvera que G est un fermé relatif de A, car $\overline{G}$ est un fermé de E.
On a déjà : $G \subset A$ et $G \subset \overline{G}$. Ainsi, on a : $G \subset A \cap \overline{G}$.
Pour l'autre inclusion, soit $\ell \in A \cap \overline{G}$. Comme ℓ est dans $\overline{G}$, alors par caractérisation séquentielle de l'adhérence, il existe une suite (x_n) à valeurs dans G qui converge vers ℓ. Comme ℓ est dans A, alors notre hypothèse nous dit que ℓ est aussi dans G. Cela prouve : $A \cap \overline{G} \subset G$.
Ainsi on conclut que : $G = A \cap \overline{G}$.

7 Limite et continuité

f désigne une application d'une partie A d'un e.v.n. $(E, \|.\|_E)$ dans un e.v.n. $(F, \|.\|_F)$.

7.1 Définition de la limite

Définition 7.1.1 (Limite en un point) *Soit $a \in \overline{A}$ et $b \in F$. La fonction f a pour limite b en a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A,\ \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon.$$

Si la limite existe, on note ceci $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{a} f = b$.

Remarque 7.1.1
1. *Si la limite existe, alors celle-ci est unique.*
2. *$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ signifie que : $\lim\limits_{x \to a} \|f(x) - b\|_F = 0$.*

Définition 7.1.2 (Limite avec $b = +\infty$ ou $b = -\infty$) *Soit $a \in \overline{A}$. Dans le cas particulier $F = \mathbb{R}$, on parle aussi de limite infinie $b = +\infty$ ou $b = -\infty$ et alors les définitions deviennent respectivement :*
$\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in A$, $\quad \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq M$ et on note cela : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
$\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in A$, $\quad \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq M$ et on note cela : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Définition 7.1.3 (Limite avec $a = +\infty$ ou $a = -\infty$) *Dans le cas particulier $E = \mathbb{R}$, on parle aussi de limite infinie en $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ (lorsque A n'est respectivement pas majorée ou minorée) et alors les définitions deviennent respectivement :*
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A$, $\quad x \geq M \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon$ et on note cela : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A$, $\quad x \leq M \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon$ et on note cela : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

Définition 7.1.4 (Limite avec $\|x\|_E \to +\infty$) *On suppose que A n'est pas bornée. On dit que la fonction admet pour limite b lorque $\|x\|_E \to +\infty$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ \|x\|_E \geq M \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon.$$

Si la limite existe, on note ceci $\lim\limits_{\|x\|_E \to +\infty} f(x) = b$.

Proposition 7.1.1 (Limites en dimension finie) *Si E et F sont de dimension finie, la notion de limite ne dépend pas de la norme choisie.*

Démonstration : Ceci découle de la caractérisation séquentielle que nous allons voir au paragraphe suivant et du théorème 4.2.1.

Remarque 7.1.2 *Ainsi pour étudier une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vous avez le choix de la norme. Par exemple si vous devez montrer que $f(x, y)$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$, vous pouvez faire appel à la norme $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. En effet, cela est intéressant dans la mesure où vous pouvez passer en polaire en écrivant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ et ainsi vous essayez de majorer $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)|$ par une fonction de $r = \|(x, y)\|_2$ qui tendra vers 0 quand (x, y) tendra vers 0. Ceci est illustré dans l'exemple suivant.*

Exemple 7.1.1 *Étudier la limite en* $(0,0)$ *de* $f:(x,y)\mapsto \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. *On donnera deux méthodes dont une utilisant les coordonnées polaires.*

Proposition 7.1.2 (Limite à valeurs dans un espace produit) *Soient* $(E_1,N_1),...,(E_p,N_p)$ *des espaces vectoriels normés,* $a\in\overline{A}$ *et* $f:A\to E_1\times...\times E_p$ *une application. On note pour tout* x *de* A : $f(x)=(f_1(x),...,f_p(x))$ *et* $\ell=(\ell_1,...,\ell_p)$. *On a :* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ *si et seulement si :* $\forall k\in[\![1,p]\!],\ \lim\limits_{x\to a} f_k(x)=\ell_k$.

Démonstration : On reprend les notations de la proposition2.4.1.
Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. On a : $N(f(x)-\ell)\le\varepsilon \Leftrightarrow \forall k\in[\![1,p]\!],\ N_k(f_k(x)-\ell_k)\le\varepsilon$. Ainsi en revenant à la définition de la limite, on a le résultat.

Définition 7.1.5 (Continuité) *Lorsque* $a\in A$ *et* f *admet une limite en* a, *alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. *Dans ce cas, on dit que la fonction* f *est continue en* a.
La fonction f *est continue sur* A *si* f *est continue en tout point de* A.

Proposition 7.1.3 (Continuité en dimension finie) *Si* E *et* F *sont de dimension finie, alors la notion de continuité ne dépend pas des normes choisies.*

Démonstration : Cela provient de la proposition 7.1.1.

Exemple 7.1.2

1. *Soit* $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$
   (a) *Montrer que* f *est bien définie sur* $\mathbb{R}^2$.
   (b) *Étude de la continuité sur* $\mathbb{R}^2$ *de* f.

2. *Étude du prolongement par continuité en* $(0,0)$ *par deux méthodes de :* $g:(x,y)\mapsto\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

3. Id_E est une application continue sur E pour tout e.v.n. E. En effet, soit $a \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in E$ tel que $\|x - a\| \leq \varepsilon$. On a donc : $\|Id_E(x) - Id_E(a)\| = \|x - a\| \leq \varepsilon$. On vient donc de montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, \; \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|Id_E(x) - Id_E(a)\| \leq \varepsilon$. Ainsi pour tout a de E, on a : $\lim\limits_{x \to a} Id_E(x) = Id_E(a)$.

Remarque 7.1.3 *ATTENTION aux erreurs suivantes :*

1. *On pose* $h(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.
   On a $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} h(x, y) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$ *et* $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} h(x, y) = \lim\limits_{y \to 0} 0 = 0$, *donc :* $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} h(x, y) \neq \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} h(x, y)$.
2. *Quand on reprend la fonction* $g : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. *Bien que* $\lim\limits_{x \to 0} g(x, 0) = \lim\limits_{y \to 0} g(0, y) = 0$, *la limite en* $(0, 0)$ *n'existe pas.*

Proposition 7.1.4 (Continuité de l'exponentielle)
- *L'application* exp *est continue dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- *L'application* exp *est continue dans* $\mathcal{L}(E)$ *dans* $\mathcal{L}(E)$, *avec* E *de dimension finie.*

Démonstration : Attendre le chapitre suivant sur les séries de fonctions.

7.2 Caractérisation par les suites

Proposition 7.2.1 (Caractérisation séquentielle) *Soit* $a \in \overline{A}$. *Soit* $f : A \to F$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. f *tend vers* ℓ *en* a.
2. *Pour toute suite* (x_n) *d'éléments de* A *qui converge vers* a, *la suite* $(f(x_n))$ *converge vers* ℓ.

Démonstration : $\underline{\Rightarrow}$ On suppose que f tend vers ℓ en a.
Soit (x_n) une suite qui converge vers a. Soit $\varepsilon > 0$.
Par définition de la limite, il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in A, \; \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon \; (*)$.
Par convergence de (x_n), il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, \; \|x_n - a\|_E \leq \eta$. On a par $(*)$:
$\forall n \geq N, \; \|f(x_n) - \ell\|_F \leq \varepsilon$. On vient de prouver que : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \; \|f(x_n) - \ell\|_F \leq \varepsilon$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.
$\underline{\Leftarrow}$ Par contraposée supposons que f ne tende pas vers ℓ en a. Il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ tel que :
$\forall \eta > 0, \exists x \in A, \; \|x - a\|_E \leq \eta$ et $\|f(x) - \ell\|_F > \varepsilon_0$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, en choisissant successivement $\eta = \dfrac{1}{n+1}$, on peut construire une suite (x_n) de A telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \; \|x_n - a\|_E \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $\|f(x_n) - \ell\|_F > \varepsilon_0$. Ceci prouve qu'il existe une suite (x_n) qui converge vers a, mais que $(f(x_n))$ ne peut pas tendre vers ℓ (sinon on aurait par passage à la limite $0 \geq \varepsilon_0$). Ainsi non 1. implique non 2., donc par contraposée, 2. implique 1..

Remarque 7.2.1 *(IMPORTANTE) La caractérisation séquentielle est aussi valable si* $a = \pm\infty$ *ou* $\ell = \pm\infty$ *lorsque respectivement* $A \subset \mathbb{R}$ *ou* $F = \mathbb{R}$.

Corollaire 7.2.1 (Caractérisation séquentielle de la continuité) *Soit $a \in A$. L'application f est continue en a si et seulement si pour toute suite (u_n) de A, telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$, on a : $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.*

Exemple 7.2.1 ***(Fonction de Thomae)*** *Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, on pose $f(x) = 0$, puis $f(0) = 1$ et enfin $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$, si (p, q) est dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, avec $p \wedge q = 1$. Étudier la continuité de f.*

Soit $x = \frac{p}{q}$, avec (p, q) est dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, tel que : $p\wedge q = 1$. Par densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, il existe une suite d'irrationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = x$. On a $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{f(x_n)}_{=0} = 0 \neq \frac{1}{q} = f(x)$. Ainsi f n'est pas continue en x. De même on montre que f n'est pas continue en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Soit $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{q_0} \leq \varepsilon$. On note S l'ensemble des nombres rationnels tels que p/q soit dans $[x-1, x+1]$, avec $1 \leq q \leq q_0$. Cet ensemble est fini (on a : $q_0(x-1) \leq p \leq q_0(x+1)$). Comme x est irrationnel, alors $\delta = \min\left(\min_{t\in S\cup\{0\}} |x-t|, 1\right) > 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que : $|x-y| < \delta$. Si y est irrationnel, alors $|f(x) - f(y)| = 0$, sinon $y = p/q$, avec (p, q) dans $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{N}^*$, avec $p\wedge q = 1$, et comme y est dans $[x-1, x+1]$ sans être dans S, alors $q > q_0$, puis : $|f(x) - f(y)| = |f(y)| = \frac{1}{q} < \frac{1}{q_0} \leq \varepsilon$.

On a donc : $\forall y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Ainsi f est continue en x.

Proposition 7.2.2 (Applications coïncidant sur un ensemble dense) *Soient $f : A \to F$ et $g : A \to F$ continues telle que : $\forall x \in D,\ f(x) = g(x)$, avec D une partie dense de A. Alors : $f = g$.*

Démonstration : Soit $x \in A$. Puisque D est dense dans A, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = g(x_n)$.
En passant à la limite, car f et g sont continues sur A, on a $f(x) = g(x)$, donc $f = g$.

7.3 Opérations sur les limites

Proposition 7.3.1 (Opérations algébriques) *Soient f et g deux fonctions définies sur A à valeurs dans F et h une fonction définie sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$ et α dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in \overline{A}$. On suppose que f, g et h admettent respectivement une limite ℓ, ℓ' et ℓ'' en a. Alors,*

1. *$f + \alpha g$ admet une limite en a et : $\lim_{x\to a}(f(x) + \alpha g(x)) = \ell + \alpha\ell'$.*
2. *hf admet une limite en a et : $\lim_{x\to a}(h(x)f(x)) = \ell''\ell$.*
3. *Si h ne s'annule pas sur une boule centrée en a, alors la fonction $\frac{f}{h}$ admet une limite en a et $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\ell}{\ell''}$.*

Ainsi si f, g et h sont continues en a (respectivement sur A), alors $f + \alpha g$ et hf sont continues en a (respectivement sur A).

Démonstration : Montrons par exemple le premier point, les autres se traitent de la même manière. Nous allons utiliser la caractérisation séquentielle de la limite. Soit (a_n) une suite qui converge vers a. Alors $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} g(a_n) = \ell'$ Alors par opération sur les limites de suites, on a : $\lim_{n\to+\infty}(f(a_n)+\alpha g(a_n)) = \ell+\alpha\ell'$. Ceci étant valable pour toute suite (a_n), la caractérisation séquentielle nous permet d'affirmer que : $\lim_{x\to a}(f(x) + \alpha g(x)) = \ell + \alpha\ell'$.

Proposition 7.3.2 (Composition) *Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, A une partie de E et B une partie de F telles que $f(A) \subset B$, g soit définies sur B et $g(B) \subset G$. Soit $a \in \overline{A}$ tel que $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Alors,*

- *$b \in \overline{B}$.*
- *Si on a : $\lim_{x\to b} g(x) = c$, alors $g\circ f$ admet une limite en a et $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.*

Ainsi si f est continue en a et g est continue en b (respectivement sur A pour f et sur B pour g), alors $g\circ f$ est continue en a (respectivement sur A).

Démonstration : On utilise encore la caractérisation séquentielle. Soit (a_n) une suite qui converge vers a. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = b$. Ceci prouve déjà que b est dans $\overline{B}$, car $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'eléments de $f(A)$ qui est inclus dans B.
Par ailleurs grâce à la caractérisation séquentielle pour g appliquée à la suite $(f(a_n))$ (qui converge vers b), on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} g(f(a_n)) = c$. Ainsi pour toute suite (a_n), on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(g\circ f)(a_n) = c$ et donc : $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$, grâce à la caractérisation séquentielle.

Remarque 7.3.1 *On retrouve grâce à la caractérisation séquentielle une foultitude de résultats plus ou moins déjà connus. Dans le désordre :*

- *Soient f, g, h définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a adhérent à $A \subset D$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*
  Si : $\forall x \in A, \quad f(x) \le g(x) \le h(x)$ et si f et h admettent pour limite ℓ en a, alors g aussi.
- *Soient f, g définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a adhérent à $A \subset D$.*
  Si : $\forall x \in A, \quad f(x) \le g(x)$ et si f a pour limite $+\infty$ en a, alors g également.
- *Soient f, g définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a adhérent à $A \subset D$.*
  Si : $\forall x \in A, \quad f(x) \le g(x)$, si f a pour limite ℓ en a et g a pour limite ℓ' en a, alors $\ell \le \ell'$.

7.4 Dimension finie : coordonnées

Proposition 7.4.1 (Composante à composante) *Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F.*
Notons $f = \sum\limits_{i=1}^{p} \varphi_i e_i$, avec les φ_i des fonctions définies sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. *Soit $a \in \overline{A}$. La fonction f admet une limite en a si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la fonction φ_i admet une limite en a. Alors, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} \lim\limits_{x\to a} \varphi_i(x) e_i$.*
   Autrement dit si on pose $\ell = \sum\limits_{i=1}^{p} \ell_i e_i$, avec l_i dans $\mathbb{K}$, alors $\lim\limits_{a} f = \ell$ si et seulement si pour tout i de $[\![1, p]\!]$, on a $\lim\limits_{a} \varphi_i = \ell_i$;
2. *Soit $a \in A$. La fonction f est continue en a si et seulement si pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, la fonction φ_i est continue en a.*
3. *La fonction f est continue sur A si et seulement si pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, la fonction φ_i est continue sur A.*

Démonstration : Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite et la proposition 4.2.1.

Exemple 7.4.1 *Comme $Id_{\mathbb{K}^n} : (x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_n)$ est continue sur $\mathbb{K}^n$, alors les applications coordonnées $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_i$ sont des applications continues sur $\mathbb{K}^n$ pour tout i de $[\![1, n]\!]$.*

Définition 7.4.1 (Fonctions polynomiales) *On dit que $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est polynomiale si elle est combinaison linéaire de fonctions de la forme $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}$, avec $k_1, ..., k_n$ dans $\mathbb{N}$. Autrement dit f est construite par combinaisons linéaires et produits des fonctions $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_i$ avec i dans $[\![1, n]\!]$.*

Exemple 7.4.2 $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{K}^3 & \to & \mathbb{K} \\ (x, y, z) & \mapsto & 2x^7y^2z + z^4 - 5x^2z^8 - 2 \end{array} \right.$ *ou*
det : $\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} & \mapsto & \sum\limits_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n} \end{array} \right.$.

Proposition 7.4.2 (Fonctions polynomiales) *Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration : Une telle fonction est construite par combinaisons linéaires et produits des fonctions $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_i$ avec i dans $[\![1, n]\!]$ qui sont continues (voir l'exemple 7.4.1).

Corollaire 7.4.1 (Continuité du déterminant) *L'application* $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est continue.*

Démonstration : En identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^{n^2}$, l'application déterminant est polynomiale.

Exemple 7.4.3 1. *Montrer que l'application* $\left\{\begin{array}{lcl} GL_n(\mathbb{K}) & \to & GL_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^{-1} \end{array}\right.$ *est continue.*

2. *Montrer que l'application* $A \mapsto \chi_A$ *est une application continue de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *dans* $\mathbb{K}[X]$. *Est-ce que cela est encore vrai pour* $A \mapsto \pi_A$ *?*

7.5 Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue

Proposition 7.5.1 (Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue) *Soit* E *et* F *deux espaces vectoriels normés et* f *une application continue d'une partie* A *de* E *dans* F. *Alors :*

1. *Soit* X *un fermé de* F, *alors* $f^{-1}(X)$ *est un fermé relatif de* A.
2. *Soit* U *un ouvert de* F, *alors* $f^{-1}(U)$ *est un ouvert relatif de* A.

Démonstration :

Remarque 7.5.1 *Soit* f *une application continue de* E *dans* $\mathbb{R}$. *Alors,*

1. *L'ensemble* $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \{x \in E,\ f(x) > 0\}$ *est une partie ouverte de* E.
2. *L'ensemble* $f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \{x \in E,\ f(x) \geq 0\}$ *est une partie fermée de* E.
3. *L'ensemble* $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E,\ f(x) = 0\}$ *est une partie fermée de* E.
4. *L'ensemble* $f^{-1}(\mathbb{R}^*) = \{x \in E,\ f(x) \neq 0\}$ *est une partie ouverte de* E.

Exemple 7.5.1 1. *Montrer que* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |y-1| < 1\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *:*

Soit $f : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & |y-1| \end{array}\right.$. *Ainsi* $A = f^{-1}(]-\infty, 1[)$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$, *car* $]-\infty, 1[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* f *est continue.*

2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y + 4\}$ *est fermé dans* $\mathbb{R}^2$ *:*

Soit $g : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 - y \end{array}\right.$ *qui est continue, car polynomiale. Ainsi* $B = g^{-1}(\{4\})$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^2$, *car* $\{4\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}$ *et* g *est continue.*

3. *Soient* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \det(M) = 1\}$ *et* $\|\cdot\|$ *une norme sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant :* $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$*. Montrer que :* $\forall M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}),\ \|M\| \geqslant 1$.

Remarque 7.5.2 *La proposition précédente est très utilisée en pratique pour montrer que des parties sont ouvertes ou fermées.*

7.6 Applications uniformément continues et lipschitziennes

7.6.1 Uniforme continuité

Définition 7.6.1 (Applications uniformément continues) *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application f d'une partie A de E dans F est dite uniformément continue sur A lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall (x, y) \in A^2, \quad \|x - y\|_E \leq \alpha \implies \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Proposition 7.6.1 (Uniforme continuité et continuité) *Toute application uniformément continue est continue.*

Démonstration : Soit $f : A \to F$ uniformément continue. Soit $a \in A$ fixé. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. L'uniforme continuité nous donne un α dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall (x, y) \in A^2, \quad \|x - y\|_E \leq \alpha \implies \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$. Ainsi : $\forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \alpha \implies \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$. Cela prouve la continuité de f en a. Cela étant valable pour tout a de A, on a la continuité de f sur A.

7.6.2 Application Lipschtzienne

Définition 7.6.2 (Fonctions lipschitziennes) *Soit $k \in \mathbb{R}_+$. La fonction f est k-lipschitzienne sur une partie A de E si*

$$\forall (x, y) \in A^2,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

Remarque 7.6.1 *Pour montrer qu'une fonction de la variable réelle est lipschitzienne, on rappelle que l'on peut utiliser les inégalités des accroissements finis (voir chapitre 5).*

Exemple 7.6.1 *Montrer que la norme est une fonction* 1*-lipschitzienne.*

Proposition 7.6.2 (L'application distance) *Soit $A \subset E$ non vide, alors l'application $x \mapsto d(x, A)$ est* 1*-lipschitzienne.*

Démonstration :

Proposition 7.6.3 (Continuité et application lipschitzienne) *Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue, donc continue.*

Démonstration : Soit $f : A \to F$ que l'on suppose k-lipschitzienne. Soit $\varepsilon > 0$. Soient $x, y \in E$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon/k$. On a donc : $\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E \leq k \times \varepsilon/k = \varepsilon$. On vient donc de montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in E, \|x - y\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$. Ainsi f est uniformément continue sur A et donc continue sur A.

Remarque 7.6.2 *La réciproque est fausse, une fonction continue n'est pas forcément lipschitzienne. Soit $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$. Si f était k-lipschitzienne, alors on aurait : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(0)| \leq k|x - 0|$ et donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2 \leq kx$ et donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x \leq k$. Ainsi $\mathbb{R}_+^*$ serait majoré par k : impossible !*

Exemple 7.6.2

1. *Soient A et B deux parties fermées de E disjointes. En utilisant $f : x \mapsto d(x, A) - d(x, B)$, montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.*

2. *On suppose que E est de dimension finie. Soit $f : E \to E$ une application k-lipschitzienne, avec k dans $[0, 1[$ (on dit que f est contractante). Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$ (f admet au moins un point fixe).*

7.6.3 Continuité des applications linéaires

Proposition 7.6.4 (Caractérisation des applications linéaires continues) *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E dans F. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$P1$: f est continue sur E.*
2. *$P2$: f est continue en 0_E.*
3. *$P3$: $\exists K \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$.*

On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

Démonstration :

Remarque 7.6.3 *(IMPORTANTE) Une application linéaire* $f : E \to F$ *est continue si et seulement si* $\left\{ \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \in E \setminus \{0\} \right\}$ *est un ensemble majoré.*

Corollaire 7.6.1 (Application linéaire lipschitzienne) *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés et* f *une application linéaire continue de* E *dans* F*. Alors* f *est lipschitzienne.*

Démonstration : Soient $x, y \in E$. Grâce à la proposition précédente, on a :
$\exists K \in \mathbb{R}+,\ \ \forall x, y \in E,\ \ \|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \ \leq\ K\|x - y\|_E.$

Exemple 7.6.3

1. *Soit* $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$*. Soit* $g \in E$ *et on considère* $\varphi : f \mapsto \varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 g(t)f(t)dt$*.*
   (a) *Étudier la continuité de* φ *pour les normes* $\|.\|_\infty$ *et* $\|.\|_2$*.*
   (b) *On considère* $U = \{f \in E,\ \displaystyle\int_0^1 f < 0\}$ *et* $F = \{f \in E,\ 2 \leq \displaystyle\int_0^1 f \leq 4\}$*. Étudier le caractère ouvert de* U *et le caractère fermé de* F *pour les normes* $\|.\|_\infty$ *et* $\|.\|_2$*.*

2. *Sur* $\mathbb{C}[X]$*, on définit une norme en posant,* $\|P\| = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$*, pour* $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$*.*

   Soit $z \in \mathbb{C}$*. Étudier la continuité la forme linéaire* $\varphi_z : \begin{cases} \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C} \\ \quad P \mapsto P(z) \end{cases}$*.*

3. *Soit* $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *et* μ *une forme linéaire positive sur* E : $\forall f \in E,\ f \geq 0 \Rightarrow \mu(f) \geq 0$. *Montrer que* μ *est continue.*

4. *Soit* $\ell^1 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} / \sum_{n\geq 0} |u_n| < +\infty\}$, *que l'on munit de la norme* $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$, *pour* $u \in \ell^1$. *Soit* ϕ *une forme linéaire continue sur* ℓ^1. *Montrer qu'il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bornée telle que :* $\forall u \in \ell^1,\ \phi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$.

7.6.4 Norme subordonnée d'une application linéaire continue

Définition 7.6.3 (Norme subordonnée) *Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire continue. On pose*

$$|||f||| = \|f\|_{op} = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

Remarque 7.6.4

1. *(IMPORTANTE), on a :* $\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq |||f|||.\|x\|_E$.
2. *Grâce à la remarque 7.6.3, cette définition a un sens.*
3. *On a bien les définitions suivantes équivalentes :*
$$\sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|f(x)\|_F = \inf\left\{k \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in E\setminus\{0\} / \ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq k\right\}.$$
On a en effet pour la première égalité de la définition de $|||f|||$:

Soit $A = \left\{k \in \mathbb{R}_+ / \ \forall x \in E\setminus\{0\},\ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq k\right\}$. *Montrons que* $\inf(A) = |||f|||$.

- $\inf(A)$ *existe, car*

-

Montrons que $|||f||| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$.

-

-

Proposition 7.6.5 (Norme subordonnée) *L'application* $f \mapsto |||f|||$ *est une norme sur* $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Démonstration :

- Positivité : vient du fait que : $\forall x \in E \setminus \{0\},\ \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \geq 0$.
- Séparation : soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ tel que $|||f||| = 0$. Ainsi : $\forall x \in E \setminus \{0\},\ 0 \leq \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq 0$, puis : $\forall x \in E \setminus \{0\},\ \|f(x)\|_F = 0$, puis : $\forall x \in E \setminus \{0\},\ f(x) = 0$. Comme $f(0) = 0$, alors $f = 0$.
- Homogénéité : soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :
  $|||\lambda f||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \dfrac{\|\lambda f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} |\lambda|.\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda|. \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda|.|||f|||$.
- Inégalité triangulaire : soient $f, g \in \mathcal{L}_c(E, F)$. Pour x dans $E \setminus \{0\}$. On a :
  $\dfrac{\|(f+g)(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} + \dfrac{\|g(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq |||f||| + |||g|||$. Ainsi $|||f||| + |||g|||$ majore $\left\{\dfrac{\|(f+g)(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \in E \setminus \{0\}\right\}$, donc :
  $|||f+g||| = \sup \left\{\dfrac{\|(f+g)(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \in E \setminus \{0\}\right\} \leq |||f||| + |||g|||$.

Exemple 7.6.4

1. $|||Id_E||| = \sup \left\{\dfrac{\|x\|_E}{\|x\|_E} = 1,\ x \in E \setminus \{0\}\right\} = 1$.
2. *Soit* $E = \mathbb{R}^n$, *avec* $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit* $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. *Soit* $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i \end{array} \right.$.

   Déterminer $|||u|||$ *pour la norme* $\|.\|_2$.

3. *Sur* $\mathbb{C}[X]$, *on définit une norme en posant,* $\|P\| = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$, *pour* $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z|$. *On pose* $\varphi_z : \begin{cases} \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C} \\ \quad P \mapsto P(z) \end{cases}$, *qui est continue grâce à l'exemple 7.6.3, avec :* $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ |\varphi_z(P)| \leq \dfrac{1}{1-|z|}$. *Déterminer* $|||\varphi_z|||$.

4. *Soit* $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, *muni de* $\|.\|_\infty$. *Pour* $f \in E$, *on pose* $\varphi(f) = \int_0^1 f - \int_{-1}^0 f$.

   (a) *Montrer que* φ *est une forme linéaire continue et calculer* $|||\varphi|||$.

   (b) *Existe-t-il* f *unitaire telle que* $|\varphi(f)| = |||f|||$ *?*

5. *Soit* (E, N) *un espace vectoriel normé.*
   (a) *Montrer qu'une forme linéaire* φ *non nulle sur* E *est continue si et seulement si son noyau est fermé.*
   (b) *Soit* φ *une forme linéaire continue sur* E*. Montrer que :* $\forall a \in E \backslash \operatorname{Ker} \varphi,\ |||\varphi||| = \dfrac{|\varphi(a)|}{d(a, \operatorname{Ker} \varphi)}$.

Proposition 7.6.6 (Norme subordonnée et norme d'algèbre) *Soient* G *un espace vectoriel normé,* $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ *et* $g \in \mathcal{L}_c(F, G)$*. Alors* $g \circ f$ *est continue et :*

$$|||g \circ f||| \leq |||g||| \times |||f|||.$$

On dit que $|||.|||$ *est une norme sous-multiplicative ou une norme d'algèbre.*

Démonstration :

7.6.5 Continuité des applications linéaires en dimension finie

Théorème 7.6.1 (Applications linéaires) *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels avec* E *de dimension finie. Toute application linéaire de* E *dans* F *est lipschitzienne et donc continue. Ainsi* $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F)$.

Démonstration : Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Montrons d'abord que f est continue pour la norme $\|.\|_1$ de E. Soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ dans E, avec $x_1, ..., x_n$ dans $\mathbb{K}$. Nous avons donc :

$\|f(x)\|_F = \|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i f(e_i)\|_F = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \times \|f(e_i)\|_F \leq M \sum_{i=1}^{n} |x_i| = M\|x\|_1$, avec $M = \max(\|f(e_1)\|_F, ..., \|f(e_n)\|_F)$. Comme en dimension finie les normes sont équivalentes, il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\|.\|_1 \leq K\|.\|_E$, donc : $\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq KM\|x\|_E$, donc f est continue.

Exemple 7.6.5 1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, ..., a_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \left|\int_0^1 P(t)dt\right| \leq k\sqrt{\sum_{i=0}^{n}(P(a_i))^2}$.*

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $N(P) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n}(P(a_i))^2}$.

N est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$, car elle provient du produit scalaire : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|Q) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$.

On a bien la symétrie, la bilinéarité et la positivité. Pour la séparation, si $0 = (P|P) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{(P(a_i))^2}_{\geq 0}$, alors : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = 0$. Ainsi P est de degré au plus n et admet au moins $n+1$ racines, donc : $P = 0$. Soit $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_n[X], N) & \to & (\mathbb{R}, |.|) \\ P & \mapsto & \int_0^1 P \end{array} \right.$. C'est une application linéaire et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, donc ψ est continue. Ainsi il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ |\psi(P)| \leq kN(P)$, soit : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \left|\int_0^1 P(t)dt\right| \leq k\sqrt{\sum_{i=0}^{n}(P(a_i))^2}$.

2. *Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme $\|.\|$. On suppose que : $\forall u, v \in A,\ \|u.v\| \leq \|u\|.\|v\|$.*

   (a) *On suppose que : $\|u\| < 1$. Démontrer que $(e-u)$ est inversible et $(e-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.*

   (b) *Montrer que l'ensemble des inversible $\mathcal{U}(A)$ de A est un ouvert de A.*

   (a)

   (b) *Soit $a \in \mathcal{U}(A)$. Soit $h \in \mathcal{A}$. On a : $a + h = a(e + a^{-1}h)$. On suppose que $\|h\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$. On a donc $\|a^{-1}h\| \leq \|a^{-1}\|.\|h\| < 1$, donc grâce à la question précédente, $(e + a^{-1}h) \in \mathcal{U}(A)$, puis par produit d'éléments inversible, on a : $a + h \in \mathcal{U}(A)$. Par conséquent, on a : $B(a, 1/\|a^{-1}\|) \subset \mathcal{U}(A)$. C'est donc un ouvert de A.*

3. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Ω_n l'ensemble des polynômes de degré n de $\mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que Ω_n est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.*

Corollaire 7.6.2 (Similitude, spectre et exponentielle)

1. *$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in GL_n(\mathbb{K}),\ P\exp(A)P^{-1} = \exp(PAP^{-1})$.*
2. *Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $Sp(\exp(A)) = \{e^{\lambda},\ \lambda \in Sp(A)\}$.*

Démonstration :

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose $S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$. On a : $PS_NP^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{PA^kP^{-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(PAP^{-1})^k}{k!}$. Ainsi $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} PS_NP^{-1} = \exp(PAP^{-1})$. Par ailleurs, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (voir l'exemple précédent), donc : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} PS_NP^{-1} = P\exp(A)P^{-1}$, car $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N = \exp(A)$.
2. A est trigonalisable (on est sur $\mathbb{C}$). Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que : $A = PTP^{-1}$, avec : $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \dots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Or : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{T^k}{k!} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & & (*) \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda_2^k}{k!} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$. Quand N tend vers $+\infty$, on a : $\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & t'_{12} & \dots & t'_{1n} \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & t'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

   Ainsi $\exp(A) = \exp(PTP^{-1}) = P\exp(T)P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & t'_{12} & \dots & t'_{1n} \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & t'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$. Ainsi $\exp(A)$ est semblable à une matrice triangulaire dont on peut lire le spectre $\{e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}\}$.

Exemple 7.6.6 1. *En reprenant la preuve précédente, on a pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:* $\det(\exp(A)) =$

2. *Montrer que* $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$.

Remarque 7.6.5 *ATTENTION, en dimension infinie, toute application linéaire n'est pas forcément continue.*
Imaginer un espace vectoriel normé et une application linéaire non continue sur celui-ci.

Imaginer une norme pour laquelle D soit continue.

Définition 7.6.4 (Norme subordonnée pour les matrices) *On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'une norme $\|.\|$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on pose :*

$$|||A||| = \|A\|_{op} = \sup\left\{\frac{\|AX\|}{\|X\|},\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\right\}.$$

Remarque 7.6.6 1. *Ceci est bien défini, car l'application $X \mapsto AX$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie, donc cette application est continue.*

2. *Comme dans la remarque 7.6.4, on montre que :*

$$|||A||| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\| = \sup_{\|X\|\leq 1} \|AX\| = \inf\left\{k \in \mathbb{R}_+,\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} / \ \frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq k\right\}.$$

Proposition 7.6.7 (Propriétés des normes subordonnées matricielles) *1. $A \mapsto |||A|||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

2. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ |||AB||| \leq |||A||| \times |||B|||$.

Démonstration : On pose $f : X \mapsto AX$ et donc $|||f||| = |||A|||$. Ainsi les propriétés sur les normes subordonnées matricielles découlent de celles des normes subordonnées pour les applications linéaires.

Remarque 7.6.7 *(IMPORTANTE) Il est pratique dans un certain nombre d'exercice de considérer des normes d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour en construire une sans avoir à faire de démonstration, considérer une norme quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Ainsi la norme $|||.|||$ associée est bien une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Exemple 7.6.7 *1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 2$. On rappelle que $\|A\|_2 = \sqrt{tr(A^TA)}$. Est-ce que cette norme peut être vue comme une norme subordonnée ?*

2. On considère $\|.\|_\infty$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Quelle est la norme subordonnée N_∞ à cette norme ?

7.6.6 Applications multilinéaires et continuité

Définition 7.6.5 (Application multilinéaire) *Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, ..., E_p, F$ des espaces vectoriels. On dit qu'une application f définie sur $E_1 \times ... \times E_p$ à valeur dans F est p-linéaire si pour tout i de $[\![1, p]\!]$, lorsque l'on fixe les vecteurs $x_1, ..., x_p$ de $E_1, ..., E_p$ sauf x_i, alors $x_i \mapsto f(x_1, ..., x_i, ..., x_p)$ est linéaire.*

Exemple 7.6.8 *1. Soit E un espace préhilbertien, l'application $(x, y) \mapsto (x|y)$ est bilinéaire.*

2. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $(A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire.

Proposition 7.6.8 (Continuité des applications multilinéaires) *Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, \|.\|_1), ..., (E_p, \|.\|_p)$, $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés et $f : E_1 \times ... \times E_p \to F$ une application p-linéaire. Alors les proposition suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe K dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que :* $\forall (x_1, ..., x_p) \in E_1 \times ... \times E_p,\ \|f(x_1, ..., x_p)\|_F \leq K\|x_1\|_1 \times ... \times \|x_p\|_p$.
2. *f est continue sur $E_1 \times ... \times E_p$.*

Démonstration : Admis. Montrons seulement que 1. implique 2., pour $p = 2$. Le résultat pour tout p se montrant ensuite par récurrence.

Proposition 7.6.9 (Continuité des applications multilinéaires en dimension finie) *On reprend les mêmes notations que la proposition précédente. Si $E_1, ..., E_p$ sont de dimension finie, alors f est continue.*

Démonstration :
On se place dans le cas $p = 2$. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E_1 et $(f_1, ..., f_m)$ une base de E_2. Traitons d'abord le cas où les normes choisies sur E_1 et E_2 sont les normes infinies.

On a donc : $\forall (x, y) \in E_1 \times E_2,\ \|f(x, y)\| \leq K\|x\|_\infty \|y\|_\infty$. Mais en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc il existe α, β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $\|.\|_\infty \leq \alpha \|.\|_1$ et $\|.\|_\infty \leq \beta \|.\|_2$.
Ainsi : $\forall (x, y) \in E_1 \times E_2,\ \|f(x, y)\|_F \leq K\alpha\beta\|x\|_1 \|y\|_2$.
La proposition précédente permet de conclure pour la continuité pour tout norme. On peut adapter cette démonstration au cas général, l'idée est la même, mais les notations sont plus lourdes. On peut faire aussi un raisonnement par récurrence dans lequel pour l'hérédité on regarde une forme bilinéaire sur $(E_1 \times ... \times E_p) \times E_{p+1}$.

Corollaire 7.6.3 (Continuité du produit matriciel/composition)
1. *L'application* $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \mapsto & AB \end{cases}$ *est continue quelque soit le choix des normes.*
2. *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimension finie. L'application* $\begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) & \to & \mathcal{L}(E, G) \\ (f, g) & \mapsto & g \circ f \end{cases}$ *est continue.*

Démonstration : Ce sont deux applications bilinéaires, dont les espaces de départ sont de dimension finie.

Exemple 7.6.9
1. *On suppose E de dimension finie. Montrer que $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs de E est un fermé de $\mathcal{L}(E)$.*

2. *Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = B$. Montrer que B est la matrice d'un projecteur.*

8 Parties compactes

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

8.1 Définition d'une partie compacte

Définition 8.1.1 (Partie compacte) *Une partie A de E est dite compacte lorsque de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de A, c'est-à-dire pour toute suite (x_n) de A, il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ dans A. Autrement dit, toute suite de A admet une valeur d'adhérence dans A.*

Exemple 8.1.1

1. *Tout singleton est compact. Plus généralement toute partie finie est compacte. En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un ensemble $\{x_1, ..., x_p\}$. Or $\mathbb{N}$ est infini, alors l'un des x_i est atteint une infinité de fois par (u_n), ce qui donne une suite extraite qui converge vers ce x_i.*
2. *Sur $\mathbb{R}$, tous les segments $[a, b]$ sont compacts. En effet, toute suite (u_n) de $[a, b]$ est bornée donc on peut extraire une suite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers ℓ, grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass. De plus, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a \leq u_{\phi(n)} \leq b$, donc en passant à la limite, on a $\ell \in [a, b]$.*
3. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose $\|P\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$ et on admet que $\|.\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. $S(0, 1)$ est-elle une partie compacte de E ?*

4. *Soient A une partie compacte de E et B une partie fermée de E. On pose $A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est une partie fermée de E.*

5. *Soit E un espace vectoriel normé et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts non vides telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ K_{n+1} \subset K_n$. Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est non vide.*

6. *Soit K une partie compacte de E et F un espace vectoriel normé. Soit $f : K \to F$ continue et injective. On pose $L = f(K)$. Montrer que $f^{-1} : L \to K$ est continue.*

Proposition 8.1.1 (CNS de convergence d'une suite d'éléments d'un compact) *Une suite d'éléments d'une partie compacte est convergente si et seulement si elle admet une seule valeur d'adhérence.*

Démonstration :

1. Soit $(x_n)_n$ une suite convergente vers x dans un compact A. Alors toutes les suites extraites de $(x_n)_n$ convergent vers x, donc $(x_n)_n$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.
2. Soit $(x_n)_n$ une suite d'un compact A, n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence x. Démontrons par l'absurde que $(x_n)_n$ converge vers x.

Proposition 8.1.2 (Compact implique fermé/borné) *Soit A une partie compacte de E. Alors A est fermée et bornée dans E.*

Démonstration :

Remarque 8.1.1 *$S(0,1)$ dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|.\|_1$ est partie fermée et bornée sans être compacte. Ainsi la réciproque de la proposition est fausse.*

Proposition 8.1.3 (Fermé d'un compact) *Toute partie fermée F d'une partie compacte A est compacte.*

Démonstration : Soit F une partie fermée d'un compact A. Considérons une suite $(x_n)_n$ d'éléments de F. Elle est donc constituée d'éléments du compact A, donc elle admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ (d'éléments de F) convergente de limite x. Or F est une partie fermée, donc la limite x est dans F. Ainsi de toute suite d'éléments de F on peut extraire une sous-suite qui converge dans F : ainsi F est bien compacte.

Proposition 8.1.4 (Produit fini de compacts) *Soient $E_1, ..., E_p$ des espaces vectoriels normés et $A_1, ..., A_p$ des parties compactes de $E_1, ..., E_p$. Alors $A_1 \times ... \times A_p$ est une partie compacte de $E_1 \times ... \times E_p$.*

Démonstration : Raisonnons pour $p = 2$.

Par récurrence, on peut généraliser ce résultat à un produit $A_1 \times \cdots \times A_p$ de compacts.

8.2 Applications continues sur une partie compacte

Proposition 8.2.1 (Image continue d'un compact) *Soit E et F deux espaces vectoriels normés et f une application d'une partie compacte A de E dans F. Si f est continue alors $f(A)$ est une partie compacte de F.*
En d'autres termes l'image continue d'un compact est un compact.

Démonstration : Soit une suite $(y_n)_n$ d'éléments de $f(A)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ tel que $f(x_n) = y_n$. Comme A est compact, de la suite $(x_n)_n$ on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un élément ℓ de A. L'application f étant continue, la suite $\big(f(x_{\varphi(n)})\big)$ converge vers $f(\ell)$, qui appartient à $f(A)$, c'est-à-dire que la suite $(y_{\varphi(n)})$, extraite de $(y_n)_n$, converge dans $f(A)$: ainsi $f(A)$ est compact.

Exemple 8.2.1 ***(Théorème de Carathéodory)*** *On suppose que E est de dimension n. On dit que $x \in E$ est une combinaison convexe des p éléments $x_1, x_2, \ldots, x_p \in E$ s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ positifs ou nuls tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.*
On note $\operatorname{conv}(H)$ d'une partie H de E l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de H.

1. *Soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ une combinaison convexe de $x_1, x_2, \ldots, x_p \in H$ avec $p \geqslant n + 2$.*

   Montrer qu'il existe p réels non tous nuls $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0$.
2. *En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H et conclure que $\operatorname{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H.*
   On pourra considérer une suite de coefficients de la forme $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ pour un réel θ bien choisi.
3. *Si H est une partie compacte de E, montrer que $\operatorname{conv}(H)$ est compacte.*

1. *La famille $(x_2 - x_1,\, x_3 - x_1, \dots,\, x_p - x_1)$ est liée car de cardinal $p-1 \geq n+1$ dans un espace vectoriel de dimension n. Il existe donc des réels non tous nuls $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_p$ tels que $\sum_{i=2}^{p} \mu_i(x_i - x_1) = 0$. En posant $\mu_1 = -\sum_{i=2}^{p} \mu_i$, on a le résultat.*

2. *Pour un indice i fixé, l'ensemble des réels θ tels que $\lambda_i - \theta\mu_i \geq 0$ est un intervalle fermé contenant 0, égal à $\mathbb{R}$ si $\mu_i = 0$,. Sinon, si $\mu_i > 0$ c'est $]-\infty, \lambda_i/\mu_i]$ et si $\mu_i < 0$, c'est $[\lambda_i/\mu_i, +\infty[$. Comme l'un au moins des μ_i est strictement positif et l'un au moins strictement négatif ($\sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0$ et tous les μ_i ne sont pas nuls) l'ensemble*
   $\{\theta \in \mathbb{R} \ / \ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_i - \theta\mu_i \geq 0\}$ est un segment (c'est $[m, M]$, avec $m = \max_{i\in[\![1,p]\!]} \{\lambda_i/\mu_i,\ \mu_i < 0\}$ et $M = \min_{i\in[\![1,p]\!]} \{\lambda_i/\mu_i,\ \mu_i > 0\}$). Choisissons pour θ l'une de ses bornes : il existe alors un indice $j \in [\![1,p]\!]$, tel que $\lambda_j - \theta\mu_j = 0$ et, pour tout $i \neq j$, $\lambda_i - \theta\mu_i \geq 0$.
   De plus, on a : $x = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \theta\mu_i)x_i$ et $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \theta\mu_i) = 1$.
   Il en ressort que x est combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H (pour $i = j$, on a un terme nul). Si ce nombre d'éléments est encore supérieur ou égal à $n+2$, on peut recommencer le raisonnement et, par une itération finie, on se ramène à une combinaison convexe d'au plus $n+1$ éléments de H.

3. *L'ensemble $\Lambda = \left\{ (t_1, \dots, t_{n+1}),\ \text{avec } t_i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n+1\} \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \right\}$ est bien un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$, car $\mathbb{R}^{n+1}$ est de dimension finie et :*
   - *il est en effet fermé car si on note $f_i : (t_1, \dots, t_{n+1}) \mapsto t_i$, pour $i \in [\![1, n+1]\!]$ et $f : (t_1, \dots, t_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} t_i$, ce sont des fonctions continues, car elles sont polynomiales et $\Lambda = \bigcap_{i=1}^{n+1} f_i^{-1}(\mathbb{R}_+) \bigcap f^{-1}(\{1\})$ qui est un fermé en tant qu'intersection de fermés (images réciproques de fermés par des applications continues).*
   - *il est borné (si $(t_1, t_2, \dots, t_{n+1} \in \Lambda$, alors : $\forall i \in [\![1, n+1]\!],\ 0 \leq t_i \leq 1$).*

   Or d'après ce qui précède, $conv(H) = \phi(\Lambda \times H^{n+1})$ avec
   $$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} & \to \quad E \\ \big((t_1, t_2, \dots, t_{n+1}),\, (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})\big) & \longmapsto \quad \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i \end{cases}$$
   qui continue sur $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ (car par exemple bilinéaire en dimension finie). De plus $\Lambda \times H^{n+1}$ est compact en tant que produit de compacts, donc $conv(H)$ est un compact de E.

Théorème 8.2.1 (Théorème des bornes atteintes) *Soit A une partie compacte non vide de E d'un espace vectoriel normé et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration : Si A est un compact de E et f une application continue sur A alors $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$. Comme elle est fermée, elle contient sa borne inférieure et sa borne supérieure (en effet $\inf(f(A))$ et $\sup(f(A))$ sont dans $\overline{f(A)} = f(A)$).

Remarque 8.2.1 *Vous avez déjà vu ce théorème en sup avec une fonction continue réelle définie sur un segment $[a, b]$.*

Exemple 8.2.2 *Soit K une partie compacte de E et $f : K \to K$ une application telle que :*
$\forall x, y \in K,\ x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

1. *Montrer que f admet un unique point fixe.*
2. *Soit $x_0 \in K$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que (x_n) converge vers α.*
3. *On suppose que K est aussi convexe et que $\forall x, y \in K,\ \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$. Montrer que f a au moins un point fixe.*

Théorème 8.2.2 (Heine) *Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Toute application continue sur un compact A de E et à valeurs dans F est uniformément continue sur A.*

Démonstration : Soit f une application continue sur le compact A. Supposons f non uniformément continue : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $(x, y) \in A^2$ tels que $\|x - y\| \leq \alpha$ et $\|f(x) - f(y)\| > \varepsilon$.

En particulier pour $\alpha = \dfrac{1}{n}$ il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ d'éléments de A telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|x_n - y_n\| \ \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|f(x_n) - f(y_n)\| \ > \ \varepsilon.$$

Comme A est compact, il existe une suite $(x_{\varphi(n)})_n$ extraite de $(x_n)_n$ qui converge vers un élément ℓ de A. Comme $\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| \leq \dfrac{1}{\varphi(n)} \leq \dfrac{1}{n}$, la suite $(y_{\varphi(n)})_n$ converge aussi vers ℓ. L'application f étant continue, les deux suites $\big(f(x_{\varphi(n)})\big)_n$ et $\big(f(y_{\varphi(n)})\big)_n$ convergent toutes deux vers $f(\ell)$, ce qui contredit l'inégalité $\|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| > \varepsilon$, car en passant à la limite, on trouve $0 \geq \varepsilon$. Donc f est uniformément continue sur A.

Exemple 8.2.3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue admettant des limites finies ℓ_1 et ℓ_2 respectivement en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue.*

8.3 Parties compactes d'un espace vectoriel de dimension finie

Proposition 8.3.1 (Équivalence des normes en dimension finie) *Si E est de dimension finie alors toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration : (hors-programme) Nous n'avons pas le droit d'utiliser le théorème 7.6.1 qui utilise l'équivalence des normes. Nous allons faire uniquement appel aux résultats de compacité du paragraphe précédent et utiliser la fait qu'une application lipschitzienne est continue.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Pour $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, avec $y_1, ..., y_n \in \mathbb{K}$, on note $N(y) = \max_{1 \le i \le n} |y_i|$. Soit $\|.\|$ une norme sur E. On va montrer que $\|.\|$ est équivalente à N. Par transitivité, cela donner l'équivalence pour toutes les normes.

On a : $\|y\| = \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|.\|e_i\| \le N(y) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|}_{=C}$.

Soit $T : \begin{cases} (\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty) & \to & (E, N) \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{cases}$.

On note $S = \{x \in \mathbb{K}^n,\ \|x\|_\infty = 1\} = [-1, 1]^n$, qui est compacte en tant que produit de compacts. On pose $S' = \{y \in E,\ N(y) = 1\}$. Comme on a : $\forall x \in \mathbb{K}^n,\ \|T(x)\| = N(x)$ et T est bijective, alors $T(S) = S'$. De plus T est continue, car elle est 1-lipschitzienne : $\forall x, x' \in \mathbb{K}^n,\ \|T(x) - T(x')\| = \|x - x'\|$, par linéarité.

Ainsi S' est compacte.

De plus on a : $\forall y, y' \in E,\ |\|y\| - \|y'\|| \le \|y - y'\| \le CN(y - y')$, donc l'application $f : y \mapsto \|y\|$ est continue pour la norme N (car 1-lipschitzienne). Par le théorème de la borne atteinte, sur S' cette application possède un minimum $y_0 \in S'$. On a donc : $\forall y \in S',\ K = \|y_0\| = f(y_0) \le f(y) = \|y\|$. Comme $y_0 \ne 0$, alors $K > 0$.

Soit $y \in E$ non nulle. On a $y/N(y)$ dans S', donc $K \le \left\| \frac{y}{N(y)} \right\|$, puis $KN(y) \le \|y\|$, par homogénéité de la norme. Cette relation est aussi vraie pour $y = 0$.

On a donc : $\forall y \in E,\ KN(y) \le \|y\| \le CN(y)$.

Théorème 8.3.1 (Caractérisation des compacts en dimension finie) *Les parties compactes d'un espace vectoriel normé E de dimension finie sont ses parties fermées bornées.*

Démonstration : On a déjà vu qu'une partie compact d'un espace vectoriel normé est toujours fermée et bornée.

Réciproquement soit A une partie fermée et bornée de E. Soient (x_n) une suite de A et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Comme en dimension finie la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme choisie, on considère la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\|_\infty = \max_{1 \le i \le p} |\lambda_i|$, avec $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on décompose x_n dans la base $\mathcal{B}$: $x_n = \sum_{i=1}^{p} x_n^{(i)} e_i$. Comme la suite (x_n) est bornée, car A est une partie bornée (le caractère borné ne dépendant pas de la norme en dimension finie), alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|x_n\|_\infty \le M$. Cela signifie que : $\forall i \in [\![1, p]\!], \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n^{(i)}| \le M$. Il en résulte que la suite $(x_n^{(1)}, ..., x_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[-M, M]^p$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou $(\overline{D}(0, M))^p$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, avec $\overline{D}(0, M) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \le M\}$) qui sont des compacts en tant que produit d'espaces compacts. Ainsi on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)}^{(1)}, ..., x_{\varphi(n)}^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $(\ell_1, ..., \ell_p)$ et donc $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{i=1}^{p} \ell_i e_i$. Ainsi par caractérisation séquentielle de l'adhérence, $\sum_{i=1}^{p} \ell_i e_i$ est dans $\overline{A}$ et donc dans A, car A est fermée. Ainsi de toute suite de A, on peut extraire une suite qui converge dans A, donc A est compacte.

Exemple 8.3.1

1. *Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ et dans tout espace vectoriel normé de dimension finie, toute boule fermée $\overline{\mathcal{B}}(a, R)$, avec $R > 0$ est une partie compacte en tant que fermé borné d'un espace vectoriel de dimension finie.*
2. *Est-ce que les parties suivantes sont compactes dans $\mathbb{R}^2$: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^4 = 1\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^3 = 1\}$?*

3. *On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'une norme $\|.\|$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $|||A||| = \|AX_0\|$.*

4. *On suppose E de dimension finie $f : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Alors il existe $x_0 \in E$ tel que : $f(x_0) = \min_{x \in E} f(x)$*

*Application : **(Théorème de D'Alembert-Gauss)** Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ non constant, avec $a_n \neq 0$ et $n \geq 1$. On raisonne par l'absurde et on suppose que P ne s'annule jamais sur $\mathbb{C}$*

(a) *Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que : $|P(z_0)| = \min_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$.*

(b) *On peut écrire : $P(X + z_0) = P(z_0) + b_m X^m + \sum_{k=m+1}^{n} b_k X^k$, avec $b_m \neq 0$. Montrer qu'il existe $h \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0 + h)| < |P(z_0)|$.*

(c) *Conclure.*

5. *On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme $\|.\|$. Montrer qu'il existe b dans $\mathbb{R}_+$ tels que :*
   $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ |\det(X)| \leq b\|X\|^n$.

Corollaire 8.3.1 (Suites bornées en dimension finie) *On suppose E de dimension finie. Toute suite (u_n) bornée, admet au moins une sous-suite convergente (c'est-à-dire admet au moins une valeur d'adhérence).*

Démonstration : Reprendre la deuxième partie de la preuve du théorème précédente (lorsque que l'on a montré que l'on pouvait extraite une suite de (x_n) qui converge).

Corollaire 8.3.2 (Suites bornées et valeur d'adhérence en dimension finie) *On suppose E de dimension finie. Une suite (u_n) bornée converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration : Si la suite converge alors elle a une et une seule valeur d'adhérence : sa limite. Supposons maintenant que la suite $(u_n)_n$ est bornée et admet une unique valeur d'adhérence. Étant bornée, il existe $R > 0$ tel que la suite $(u_n)_n$ reste dans la boule fermée $\overline{\mathcal{B}}(0, R)$. Cette boule est compacte grâce à l'exemple précédent. La suite $(u_n)_n$ admet ainsi une limite d'après la proposition 8.1.1.

Exemple 8.3.2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n + \dfrac{u_{2n}}{2}\right) = 0$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Soit a un valeur d'adhérence de la suite. Soit $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite qui converge vers a. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2\phi(n)} = 2\left(u_{2\phi(n)} + \frac{u_{2\phi(n)}}{2}\right) - 2u_{2\phi(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} -2a$. Ainsi $-2a$ est aussi une valeur d'adhérence. En réitérant le procédéd, $(-2)^k a$ est valeur d'adhérence pour tout k de $\mathbb{N}$. Si a est non nul, cela est impossible car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi $a = 0$ est la seule valeur d'adhérence et puisque la suite est bornée, elle converge vers 0.

Proposition 8.3.2 (Sous-espace de dimension finie implique fermé) *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie E (qui n'est pas nécessairement de dimension finie). Alors F est fermé dans E.*

Démonstration : Soit (u_n) une suite convergente à valeurs dans F. Notons ℓ sa limite. Comme la suite (u_n) converge, elle est bornée. C'est ainsi une suite bornée de F qui est de dimension finie, donc on peut extraire une suite $(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers une limite ℓ' dans F. Mais comme (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell = \ell'$ et donc ℓ est dans F. Ainsi F est fermée par caractérisation séquentielle des fermés.

Exemple 8.3.3 *1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que :* $\exp(A) = P(A)$.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que : $d(x, F) = \|y - x\|$.

Application : ***(Théorème de Riesz)***

(a) On garde F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et on suppose que : $F \neq E$. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u, F) = \|u\| = 1$.

(b) En déduire que $\overline{B}(0,1)$ est compact si et seulement si E est de dimension finie.

(a) Puisque $F \neq E$, il existe un vecteur x de E n'appartenant pas à F. On a : $d(\lambda x, F) = |\lambda| d(x, F)$, car pour $\lambda \neq 0$, on a : $\{\|\lambda x - y\| \mid y \in F\} = \{|\lambda|.\|x - y/\lambda\| \mid y \in F\} = \left\{|\lambda|.\left\|x - y'\right\| \mid y' \in F\right\}$ et $y' = y/\lambda$ décrit F dans y décrit F.
Comme F est fermé dans E, alors $d(x, F) > 0$ (grâce à l'exemple 6.2.6).
Il est donc possible de choisir x vérifiant $d(x, F) = 1$, en considérant $\dfrac{x}{d(x, F)}$ au lieu de x dans la question précédente.
Pour tout vecteur $y \in F$, on a aussi $d(x - y, F) = 1$ car $\{\|x - z\| \mid z \in F\} = \{\|x - y - (z - y)\| \mid z \in F\} = \left\{\left\|x - y - z'\right\| \mid z' \in F\right\}$, car $z' = z - y$ décrit F dans z décrit F. Il ne reste plus qu'à trouver $y \in F$ tel que $\|x - y\| = 1$. Le vecteur $y \in F$ vérifiant $d(x, F) = \|x - y\|$ de la question précédente convient. Le vecteur $u = x - y$ est alors solution.

(b) Si E est de dimension finie, la boule B est compacte car fermée et bornée en dimension finie. Inversement, supposons par l'absurde que B est compacte et E de dimension infinie. Par récurrence, on construit une suite (u_n) de vecteurs de E en posant u_0 un vecteur unitaire quelconque, puis une fois $u_0, \ldots, u_n$ déterminés, on définit u_{n+1} de sorte que $d\left(u_{n+1}, \operatorname{Vect}(u_0, \ldots, u_n)\right) = \left\|u_{n+1}\right\| = 1$.
Cette construction est possible par l'étude qui précède car E est supposé de dimension infinie, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Vect}(u_0, \ldots, u_n) \neq E$.
La suite (u_n) ainsi définie est une suite d'éléments du compact B, on peut donc en extraire une suite convergente $\left(u_{\varphi(n)}\right)$. Puisque cette suite converge, alors : $\left\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\right\| \to 0$ or on a :
$\left\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\right\| \geq d\left(u_{\varphi(n+1)}, \operatorname{Vect}\left(u_0, \ldots, u_{\varphi(n+1)-1}\right)\right) \geq 1$, car $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, et comme on a des entiers, $\varphi(n+1) - 1 \geq \varphi(n)$. On a donc par passage à la limite $0 \geq 1$, ce qui est absurde.

9 Parties connexes par arcs

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie de E.

9.1 Parties connexes par arcs

Définition 9.1.1 (Chemin) *On appelle chemin de A toute application continue $\gamma : [0,1] \to A$, et arc l'ensemble des points de A atteints : $\gamma([0,1])$. Les points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont appelés extrémités de l'arc.*

Exemple 9.1.1 *Soient C une partie convexe et $x, y \in C$. Le chemin $\gamma : t \mapsto (1-t)x + ty$ est un chemin continue de C reliant x et y. Ce chemin est bien continu par opérations.*

Proposition 9.1.1 (Une relation d'équivalence) *On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur A en posant : $a\mathcal{R}b$ si et seulement s'il existe un chemin continu de A allant de a vers b.*

Démonstration :

1. Soit a dans A. Alors le chemin continu $\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & A \\ t & \mapsto & a \end{array} \right.$ va bien de a vers a tout en restant dans A. Ceci permet d'affirmer que $a\mathcal{R}a$ et donc que $\mathcal{R}$ est réflexive.
2. Soit a et b dans A tels que $a\mathcal{R}b$. Il existe alors un chemin continu $\gamma : [0,1] \to A$ de a vers b. Alors le chemin continu $\delta : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & A \\ t & \mapsto & \gamma(1-t) \end{array} \right.$ va de b vers a en restant dans A, ce qui prouve que $b\mathcal{R}a$ et la symétrie de $\mathcal{R}$.
3. Soit a, b et c dans A tels que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$. Il existe deux chemins continus $\gamma_1 : [0,1] \to A$ et $\gamma_2 : [0,1] \to A$ avec $\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = b$, $\gamma_2(0) = b$, $\gamma_2(1) = c$.
   On définit alors un chemin $\delta : [0,1] \to A$ en posant $\delta(t) = \left\{ \begin{array}{rl} \gamma_1(2t) & \text{si} \quad t \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si} \quad t \in [1/2, 1]. \end{array} \right.$ Ce chemin est continu puisque $\delta(1/2) = \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = b$ et relie a à c. Ainsi la relation $\mathcal{R}$ est transitive.

Définition 9.1.2 (Connexité par arcs)
1. *Les classes d'équivalence de cette relation d'équivalence sont appelées les composantes connexes par arcs de A.*

2. *Une partie A de E est dite connexe par arcs lorsqu'elle n'admet qu'une seule composante connexe par arcs. En d'autres termes : pour tous points a et b de A, il existe un arc d'extrémités a et b inclus dans A.*

Remarque 9.1.1 *La réunion de toutes les classes d'équivalence permet de dire que A la réunion de ses composantes connexes et de plus celles-ci sont deux à deux disjointes.*

Exemple 9.1.2
1. *Soit F une partie finie de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus F$ est connexe par arcs.*

2. *Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne classique.*
   (a) Montrer que $S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$ est connexe par arcs.
   (b) Montrer que $U = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0, R)$, avec $R > 0$, est connexe par arcs.

   (a)

(b) *Selon le programme, un dessin devrait suffire. Commentons le dessin de façon précise.*

Soient $x, y \in U$. Soit $K = \min(\|x\|, \|y\|)$. On a $K > R$. Comme précédement, on montre que $S(0, K)$ est connexe par arcs. Soit $x_1 = Kx/\|x\|$ et $y_1 = Ky/\|y\|$ qui sont dans $S(0, K)$.

L'application $t \mapsto \left[(1-t) + \frac{tK}{\|x\|}\right] x$ relie continûment x et x_1 en restant dans U, car $\left\|\left[(1-t) + \frac{tK}{\|x\|}\right] x\right\| = (1-t)\|x\| + tK \geq (1-t)K + tK = K > R$. De même on peut relier y et y_1. On peut aussi relier x_1 et y_1 par connexité par arcs de $S(0, K)$ donc on peut relier x et y.

3. *L'ensemble $\mathbb{R}^*$ admet deux composantes connexes par arcs, à savoir $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.*

Définition 9.1.3 (Partie étoilée) *Une partie A de E est dite étoilé lorsqu'il existe un point a de A tel que pour tout x de A, le segment $[a, x]$ est inclus dans A.*

Exemple 9.1.3

1. *L'espace privé d'une demi-droite est étoilé.*
2. *Un convexe C est une partie étoilée. En effet soit $x_0 \in C$ fixé. Pour tout x de C, le segment $[x_0, x]$ reste dans C.*

Proposition 9.1.2 (Connexité et parties convexes/étoilées)

1. *Une partie étoilée par rapport à un de ses points est connexe par arcs.*
2. *Une partie convexe est connexe par arcs.*

Démonstration :

1. Soit a de A tel que pour tout x de A, le segment $[a, x]$ soit inclus dans A. Soient $x, y \in A$. Soit $\gamma_1 : t \mapsto (1-t)x + ta$ est un chemin de A continue (voir exemple 9.1.1) qui relie x à a, car $[x, a]$ est inclus dans A. De même il existe un chemin reliant a à y. Par transitivité, il existe un chemin reliant x et y.

2. Grâce à l'exemple précédent, une partie convexe est étoilé, d'où le resultat.

Exemple 9.1.4 *L'ensemble des matrices nilpotentes $\mathcal{N}$ est connexe par arcs.*

Proposition 9.1.3 (Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$) *Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont*

Démonstration : Nous avons vu dans le chapitre 5, qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est convexe, donc il est connexe par arcs.

Réciproquement, soit I une partie de $\mathbb{R}$ connexe par arcs. Soient x, y deux points de I. Il existe $\gamma : [0, 1] \to I$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Ainsi grâce au théorème des valeurs intermédiaires, tous les éléments entre x et y sont atteints par γ, donc dans I. Ainsi $[x, y]$ est inclus dans I si $x \leq y$ et $[y, x]$ est inclus dans I si $y < x$. Ainsi I est un intervalle par la définition des intervalles de $\mathbb{R}$.

9.2 Image continue d'une partie connexe par arcs

Proposition 9.2.1 (Image continue d'une partie connexe par arcs) *Soit E et F deux espaces vectoriels normés et f une application continue d'une partie A de E dans F. On suppose que A est connexe par arcs.*
Alors $f(A)$ est connexe par arcs dans F.

Démonstration :

Exemple 9.2.1

1. *Soient E un espace vectoriel normé et U une partie de E. Montrer que la fonction $\mathbf{1}_U$ est continue sur E si U est à la fois ouvert et fermé dans E. En déduire les parties de E qui sont à la fois ouvertes et fermée dans E.*

   Remarque 9.2.1 *Soit $A \subset E$ tel que $\partial A = \emptyset$. On a donc $A = \overline{A} = \mathring{A}$, donc A est à la fois ouvert et fermé dans E, donc $A = E$ ou $A = \emptyset$.*

2. *Montrer qu'il n'existe pas de bijections continues de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$.*

Corollaire 9.2.1 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit E un espace vectoriel normé et f une application continue d'une partie connexe par arcs A de E dans $\mathbb{R}$. Alors $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. En d'autres termes si f atteint sur une partie connexe par arcs deux valeurs réelles c et d alors elle atteint sur cette partie toute valeur intermédiaire entre c et d.*

Démonstration : f étant continue et A connexe par arcs, alors $f(A)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$ qui est donc un intervalle.

Remarque 9.2.2 1. *Ce résultat généralise le théorème des valeurs intermédiaires vu en première année pour les fonctions continues sur un intervalle de* $\mathbb{R}$.

2. *On retrouve aussi que l'image d'un segment de* $\mathbb{R}$ *par une fonction continue est un segment de* $\mathbb{R}$*, car un segment est un compact connexe par arcs, donc l'image d'un segment est un compact connexe par arcs de* $\mathbb{R}$*, qui est un intervalle fermé borné.*

Exemple 9.2.2 *Soient* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. On pose* $A = \{(x, y) \in I \times I,\ x < y\}$.

1. *Montrer que* A *est une partie connexe par arcs de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Pour tout* (x, y) *de* A*, on pose* $g(x, y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$*. Montrer que :* $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. *En déduire que* $f'(I)$ *est un intervalle.*

10 Topologie et matrices

10.1 Rayon spectral

Exemple 10.1.1 *On munit* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ *de de la norme* $\|.\|_\infty$ *et on note* N_∞ *la norme subordonnée associée. On rappelle que dans l'exemple 7.6.7, on a vu que :* $N_\infty(A) = \max\limits_{1\le i\le n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$*, pour* $A = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$.
Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$*, on note* $\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in Sp(A)\}$.

1. *Montrer que* $\rho(A) \le N_\infty(A)$.
2. *Soient* $T = [t_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$ *est triangulaire supérieure et* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) *Déterminer la limite de la suite* $(Q_q^{-1}TQ_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ *où* $Q_q = Diag(q^n, q^{n-1}, \ldots, q)$.

(b) *En déduire qu'il existe une norme d'algèbre N_1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N_1(T) < \rho(T) + \varepsilon$.*

3. *En déduire qu'il existe une norme d'algèbre N_ε sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon$.*
4. *Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$.*

10.2 Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{C})$

Soit Γ un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{C})$ non vide. Soit $A \in \Gamma$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module 1.
2. Soit $\lambda \in Sp(A)$. Montrer que $\text{Ker}\,(A - \lambda I_n) = \text{Ker}\,(A - \lambda I_n)^2$ (Pour $Y \in \text{Ker}\,(A - \lambda I_n)^2$, calculer $A^k Y$ en s'aidant de la division euclidienne de X^k par $(X - \lambda)^k$).
3. On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A, et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ leurs multiplicités. Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} \text{Ker}\,(A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}$ et en déduire que A est diagonalisable.

1. On a : $\forall k \in N,\ A^k \in \Gamma$. Comme Γ est compact, alors la suite $(N(A^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. En reprenant la dernière question du paragraphe précédent, la suite $\left((\rho(A))^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc $\rho(A) \leq 1$. Ainsi : $\forall \lambda \in Sp(A),\ |\lambda| \leq 1$.

   De plus A^{-1} est dans Γ et $Sp(A^{-1}) = \{\lambda^{-1}, \lambda \in Sp(A)\}$. Ainsi en reprenant ce qui précède : $\forall \lambda \in Sp(A),\ |\lambda^{-1}| \leq 1$ et donc : $\forall \lambda \in Sp(A),\ 1 \leq |\lambda|$.

   On en déduit que : $\forall \lambda \in Sp(A),\ |\lambda| = 1$.

2.

3. On a : $\chi_A = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et comme les polynômes $(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux, alors grâce au lemme des noyaux, on a : $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_i I_n)^{\alpha_i} = \mathrm{Ker}\,(\chi_A(A)) = \mathbb{C}^n$ ($\chi_A(A) = 0$, grâce au théorème de Cayley-Hamilton).

   Grâce à un résultat montré au chapitre 4, sur les noyaux itérés, on a donc :

   $\forall i \in [\![1,p]\!], \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_i I_n) = \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_i I_n)^k$ et donc :

   $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_i I_n)^{\alpha_i} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_i I_n)$, ce qui fait que A est diagonalisable.

10.3 Rang

Exemple 10.3.1 *1. Montrer que l'ensemble des matrices de rang $k \leq r$ pour $r \in [\![1,n]\!]$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

2. Trouver l'adhérence de l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang égal à r.

Exemple 10.3.2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n]\!]$. On note R_p l'ensemble des matrices de rang p. Montrer que R_p est connexe par arcs.*

10.4 $GL_n(\mathbb{K})$

Exemple 10.4.1 *Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Exemple 10.4.2

1. *Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
2. *Application :*
   (a) *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible, montrer que AB et BA sont semblables, puis que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.*
   (b) *Montrer que la relation $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ est toujours vraie.*

Exemple 10.4.3 *Nous avons vu dans le paragraphe précédent que* $GL_n(\mathbb{C}) = R_n$ *est connexe par arcs. Qu'en est-il de* $GL_n(\mathbb{R})$ *?*

10.5 Matrices diagonalisables et trigonalisables

Exemple 10.5.1 *Dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense.*

Exemple 10.5.2

1. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *unitaire (coefficient dominant qui vaut un) et de degré* n*. Montrer que* P *est scindé sur* $\mathbb{R}$ *si et seulement si :* $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |Im(z)|^n$*.*
2. *Montrer que l'ensemble des matrices trigonalisables sur* $\mathbb{R}$ *est fermé dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*.*