Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et A est une partie non vide de E. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f désignent des fonctions définies sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$.
I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Suites de fonctions

1.1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

1.1.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

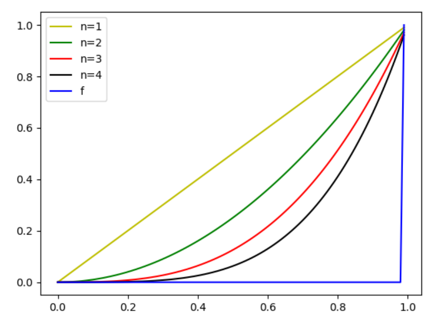
Définition 1.1.1 (Convergence simple) *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f si*

$$\forall x \in A, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

On dit alors que la fonction f est la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.1.1 *1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $f_n : \left\{ \begin{array}{lcl} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array} \right.$. Quelle est la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Faire un dessin.*

Soit $x \in [0,1[$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.
La suite (f_n) converge simplement vers
$f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & x = 1 \\ 0 & si & x \in [0,1[\end{array} \right.$.



2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $f_n : \left\{ \begin{array}{lcl} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}} \end{array} \right.$. Quelle est la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Soit $x \in [1,+\infty[$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x}$. Ainsi (f_n) converge simplement vers $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $[1,+\infty[$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $f_n(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & si & 0 \leq x < n \\ & si & x \geq n \end{array} \right.$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers f sur un intervalle I telle que chaque fonction f_n soit croissante. Alors f est croissante.

De même si toutes les fonctions f_n sont positives (respectivement T-périodiques, convexes,...), alors f est positive (respectivement T-périodique, convexes,...). Comme dans l'exemple précédent, on revient à la définition de ces notions et on passe à la limite.

5. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}$. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ sur un domaine à préciser.*

6. *Soit $A = \{u_p,\ p \geq 1\}$ une partie finie dénombrable de $\mathbb{R}$.*
   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :
   $\forall x \in A, \exists M_x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq M_x$.
   Montrer que l'on peut extraire une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement su A.
   La suite $(f_n(u_1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une suite $(f_{\phi_1(n)}(u_1))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un réel ℓ_1.
   De même, de la suite $(f_{\phi_1(n)}(u_2))_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une suite $(f_{\phi_1\circ\phi_2(n)}(u_2))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell_2 \in \mathbb{R}$.
   On réitère le procédé pour construire par récurrence des extractions ϕ_k telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{\phi_1\circ...\circ\phi_k(n)}(a_k) = \ell_k \in \mathbb{R}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\psi(n) = \phi_1 \circ ... \circ \phi_n(n)$.
   Pour $k \geq 1$ la suite $(f_{\psi(n)}(a_k))_{n\geq k}$ est une suite extraite de $(f_{\phi_1\circ...\circ\phi_k(n)}(a_k))_{n\geq k}$ qui converge vers ℓ_k. En effet, on a : $n-1 < n \leq \phi_n(n)$, puis par stricte croissance de $\phi_{k+1}\circ...\circ\phi_{n-1}$, on a : $\phi_{k+1}\circ...\circ\phi_{n-1}(n-1) < \phi_{k+1}\circ...\circ\phi_{n-1}\circ\phi_n(n)$ et $f_{\psi(n)}(a_k) = f_{\phi_1\circ...\circ\phi_k(\phi_{k+1}\circ...\circ\phi_{n-1}\circ\phi_n(n))}(a_k)$.
   La suite $(f_{\psi(n)})_{n\geq 1}$ converge simplement sur A.

Remarque 1.1.1

1. *Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur un intervalle I qui converge vers f, alors on ne peut rien dire sur la continuité de f grâce au premier point de l'exemple 1.1.1.*
2. *Si (f_n) est une suite de fonctions intégrables sur un intervalle I qui converge vers f, alors on ne peut rien dire sur l'intégrabilité de f grâce au deuxième point de l'exemple 1.1.1.*

Pour que la continuité et l'intégrabilité soient conservées, nous avons besoin de modes de convergence plus forts, ce que nous allons exposer dans les paragraphes suivants.

1.1.2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Rappelons d'abord un résulat que nous avons vu au chapitre précédent.

Proposition 1.1.1 (Norme uniforme) *Soit $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées sur A. Pour tout f de $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$, on pose*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)|.$$

Alors $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$.

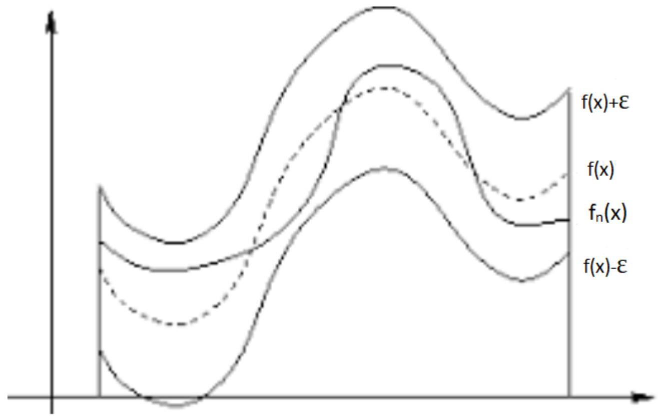
Définition 1.1.2 (Convergence uniforme)

1. *On dit que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si :*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow (\forall x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

2. *On peut reformuler cette définition de façon plus pratique. La suite de fonction* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *si : à partir d'un certain rang, les fonctions* $f_n - f$ *sont bornées et :* $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Remarque 1.1.2
1. *Dans la pratique, on utilise plutôt la deuxième définition.*
2. *Si* (f_n) *converge uniformément vers* f*, alors lorsque* n *est grand, la fonction* f_n *est donc une approximation de* f *à* ε *près en tout point :* $\forall n \geq N, \forall x \in A,\ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.



Proposition 1.1.2 (La convergence uniforme implique la convergence simple) *Si* (f_n) *converge uniformément vers* f*, alors* (f_n) *converge simplement vers* f.

Démonstration :

Remarque 1.1.3
1. *IMPORTANTE : en pratique pour montrer que* (f_n) *converge uniformément, d'abord on cherche l'éventuelle limite* f *à l'aide de la convergence simple, puis on essaye de trouver une suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* 0 *telle que :* $\forall x \in A,\ |f(x) - f_n(x)| \leq \alpha_n$*. Il est très important de vérifier que* α_n *ne dépend que de* n *et plus de* x*.*
En effet dans ce cas pour n *fixé,* $\{|f(x) - f_n(x)|,\ x \in A\}$ *est un ensemble majoré par* α_n*. Or la borne supérieure est le plus petit des majorants, donc :* $\sup\{|f(x) - f_n(x)|,\ x \in A\} \leq \alpha_n$ *et donc* $\|f - f_n\|_\infty \leq \alpha_n$*. Ainsi, quand on fait tendre* n *vers* $+\infty$*, on retrouve bien le fait que :* $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
2. *Pour* n *fixé, pour trouver la majoration par* α_n *du point précédent, on peut soit majorer pour chaque* x *à la main la quantité* $|f(x) - f_n(x)|$*, soit effectuer une étude de la fonction* $x \mapsto f(x) - f_n(x)$ *pour trouver ses variations et ensuite majorer* $|f - f_n|$ *sur* A.

Exemple 1.1.2
1. *Étude de la convergence uniforme des suites de fonctions* (f_n) *définies par*

(a) $f_n : \left\{\begin{array}{lcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} \end{array}\right.$.

Soit $x \in [0,1]$*. On a :* $\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{ne^x}{n} = e^x$*. Ainsi :* $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = (x^2+1)e^x$*. Ainsi* (f_n) *converge simplement vers* $f : x \mapsto (x^2+1)e^x$.

(b) $f_n : \left\{ \begin{array}{lll} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^\alpha x(1-x)^n \end{array} \right.$.

Soit $x \in]0,1]$. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-x)^n = 0$ *puis* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

On a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. *Ainsi la suite* (f_n) *converge simplement vers* 0.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *On a :* $\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) = n^\alpha(1-x)^n - n^{\alpha+1}x(1-x)^{n-1} = n^\alpha(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x]$. *Ainsi la fonction* f_n *est positive et croissante sur* $\left[0, \dfrac{1}{n+1}\right]$ *et décroissante sur* $\left[\dfrac{1}{n+1}, 1\right]$.

On a donc $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{n^\alpha}{n+1}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n = \dfrac{n^\alpha}{n+1}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) n+1 \times \dfrac{n+1}{n}$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) n+1 \times \dfrac{n+1}{n} = e^{-1}$, *donc* $\|f_n\|_\infty \sim \dfrac{n^{\alpha-1}}{e}$. *Ainsi on a convergence uniforme vers* 0 ($\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$) *si et seulement si* $\alpha < 1$.

(c) $f_n : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}} \end{array} \right.$.

(d) $f_n : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & si & 0 \le x < n \\ & si & x \ge n \end{array} \right. \end{array} \right.$.

2. ***(Théorème de Dini)*** *Soit K un compact de E. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}_+)$. On suppose que :*
$\forall n, p \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow [\forall x \in K,\ f_n(x) \leq f_p(x)]$. On suppose que pour tout $x \in K$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$ (pour $\varepsilon > 0$, on pourra considérer $K_n = \{x \in K,\ f_n(x) \geq \varepsilon\}$).

   Pour montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$, fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ \|f_n\|_\infty \leq \varepsilon$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \{x \in K,\ f_n(x) \geq \varepsilon\}$.

   On a $K_n = K \cap f_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$, donc c'est un fermé de K, car $f_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$ est un fermé de E en tant qu'image récirpoque d'un fermé par une application continue. Ainsi comme un fermé d'un compact est compact, alors K_n est une partie compacte.

   La décroissance de la suite (f_n) permet de dire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ K_{n+1} \subset K_n$.

   Si tous les K_n sont non vides, un exemple du chapitre 7 nous permet de dire que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est non vide et soit a un élément de cette intersection. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(a) \geq \varepsilon$. Ceci contredit l'hypothèse : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(a) = 0$ (CVS vers 0 de la suite (f_n)).

   Ainsi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_{n_0} = \emptyset$ et cela donne :

   $\forall n \geq n_0,\ K_n = \emptyset$, soit : $\forall n \geq n_0,\ \forall x \in K,\ 0 \leq f_n(x) < \varepsilon$, puis : $\forall n \geq n_0,\ \|f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$.

3. *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions k-lipschitziennes, avec $k \in \mathbb{R}_+^*$, qui convergent simplement vers une fonction f. Montrer que la convergence est uniforme.*

Remarque 1.1.4 *Pour montrer qu'une suite (f_n) ne converge pas uniformément vers une fonction f, il suffit de montrer que $\|f - f_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*
Il suffit de trouver une suite (x_n) telle que $(f(x_n) - f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Raisonnons par contraposée. On suppose que (f_n) converge uniformément vers f.
À partir d'un certain N, $f - f_n$ est bornée sur A et donc $\|f - f_n\|_\infty$ existe et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.
Soit $n \geq N$. On a donc pour toute suite (x_n) de A :
$|f(x_n) - f_n(x_n)| \leq \|f - f_n\|_\infty$. Par encadrement, on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} |f(x_n) - f_n(x_n)| = 0$. Par contraposée, si on trouve une suite (x_n) telle que $(f(x_n) - f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors on n'a pas la convergence uniforme

Exemple 1.1.3 *On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$, pour $n \in \mathbb{N}$. A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$?*

Étudions la convergence simple. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-nx^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (f_n) converge simplement vers 0.

Remarque 1.1.5 1. *La convergence uniforme est donc plus forte que la convergence simple. Il faudra donc toujours préciser le mode de convergence pour une suite de fonctions.*

2. *ATTENTION la convergence simple n'implique pas la convergence uniforme, comme le montre l'exemple précédent.*

1.1.3 Approximation uniforme

Dans ce paragraphe nous notons $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On rappelle la définition suivante :

Définition 1.1.3 (Fonction en escalier) *On dit que f est en escalier s'il existe une suite finie strictement croissante $\sigma = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, telle que f soit constante sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ (les valeurs prises par f aux points x_i n'ont pas d'importance).*
Une telle suite est appelée subdivision de $[a,b]$ adaptée à la fonction en escalier f.
On note $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Théorème 1.1.1 ($\mathcal{E}(\lceil a,b\rfloor,\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{CM}(\lceil a,b\rfloor,\mathbb{K})$) *Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$.*

Démonstration : Commençons par montrer que $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.
Soit $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Le segment $[a,b]$ étant compact, f est uniformément continue sur $[a,b]$: pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $(x,y)\in[a,b]^2$, l'inégalité $|x-y|\le\alpha$ implique $|f(x)-f(y)|\le\varepsilon$.
Prenons une subdivision $\sigma=(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, $|x_{i+1}-x_i|=\alpha$ et définissons la fonction en escalier φ par : $\begin{cases}\forall i\in[\![0,n-1]\!],\quad \forall x\in[x_i,x_{i+1}[,\quad \varphi(x)=f(x_i),\\ \varphi(b)=f(b).\end{cases}$.
Ainsi quel que soit $x\in[a,b]$, on a : $|\varphi(x)-f(x)|\le\varepsilon$, c'est-à-dire : $\|\varphi-f\|_\infty\le\varepsilon$.
En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, avec $\varepsilon=1/n$, il existe une fonction en escalier φ_n telle que $\|\varphi_n-f\|_\infty\le\dfrac{1}{n}$. Ainsi la suite (φ_n) converge uniformément vers f, car $\lim\limits_{n\to+\infty}\|\varphi_n-f\|_\infty=0$.

Soit $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Soit $\sigma=(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à la fonction f. Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, la restriction de f à $]x_i,x_{i+1}[$ est prolongeable par continuité sur $[x_i,x_{i+1}]$. On appelle f_i cette fonction prolongée. Il existe donc une fonction en escalier φ_i telle que :
$\forall x\in[x_i,x_{i+1}]$, $|f_i(x)-\varphi_i(x)|\le\varepsilon$ et donc : $\forall x\in]x_i,x_{i+1}[$, $|f(x)-\varphi_i(x)|\le\varepsilon$. Définissons la fonction en escalier φ sur $[a,b]$ par : $\begin{cases}\forall i\in[\![0,n-1]\!],\quad \forall x\in]x_i,x_{i+1}[,\quad \varphi(x)=\varphi_i(x),\\ \forall i\in[\![0,n]\!],\quad \varphi(x_i)=f(x_i)\end{cases}$.
Ainsi quel que soit $x\in[a,b]$, $|\varphi(x)-f(x)|\le\varepsilon$, c'est-à-dire : $\|\varphi-f\|_\infty\le\varepsilon$.
En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe une fonction en escalier φ_n telle que $\|\varphi_n-f\|_\infty\le\dfrac{1}{n}$: la suite (φ_n) converge uniformément vers f.

Théorème 1.1.2 (Weierstrass) *Toute fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles ou complexes, est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[a,b]$.*

Démonstration : Admis, mais sera vue en probabilité au chapitre 11.

Exemple 1.1.4 1. *Soit $F=\left\{f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\mid \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\right\}$ et $G=\mathrm{Vect}(x\mapsto \mathrm{e}^{-nx},n\in\mathbb{N}^*)$. Montrer que G est dense dans F pour la norme $\|.\|_\infty$.*

2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et (P_n) une suite de polynôme qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est une fonction polynôme.*

Remarque 1.1.6 *Le dernier exemple montre que le théorème d'approximation de Weierstrass n'est valide que sur un segment.*

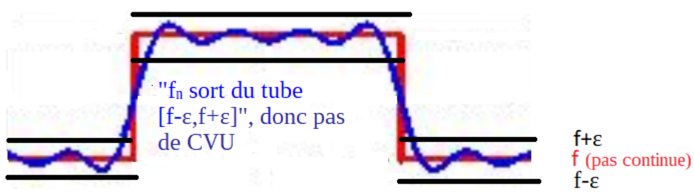
1.2 Continuité et double limite pour la convergence uniforme

Proposition 1.2.1 (Convergence uniforme et continuité) *On suppose que (f_n) converge uniformément vers f sur A.*

- *Si pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en a (avec $a \in A$), alors f est continue en a.*
- *Si pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur A, alors f est continue sur A.*

Démonstration : Il suffit de montrer la continuité de f en a, avec a dans A.

Remarque 1.2.1 *(IMPORTANTE) Grâce à la contraposée de la proposition précédente, si une suite de fonctions continues (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f qui n'est pas continue, alors la convergence n'est pas uniforme.*



Exemple 1.2.1 *Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$. A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?*

Corollaire 1.2.1 (Convergence uniforme sur des voisinages)

1. *On suppose que toutes les fonctions f_n sont continues sur A. Si pour tout a de A, il existe un voisinage V (relatif de A) de a tel que $(f_n|_V)$ converge uniformément vers $f|_V$, alors f est continue sur A tout entier.*
2. *Si $A = I$, un intervalle de $\mathbb{R}$, on adapte l'énoncé précédent : si une suite de fonctions continues (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I, alors f est continue sur I tout entier.*

Démonstration :

1. Soit $a \in A$. Soit V un voisinage de a. Comme (f_n) converge uniformément sur V et que chaque fonction f_n est continue, alors la proposition précédente nous dit que f est continue sur V et donc en particulier en a.
2. Soit $x_0 \in I$. Il existe des réels a, b tels que : $x_0 \in]a, b[\subset I$, si x_0 est dans l'intérieur de I et $x_0 \in [a, b] \subset I$ si x_0 est une borne fermée de I . Comme (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ et que chaque fonction f_n est continue, alors la proposition précédente nous dit que f est continue sur $[a, b]$. Ainsi f est en particulier continue en x_0. Ainsi f est continue en tout point x_0 de I.

Exemple 1.2.2 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.*

1. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?*
2. *Montrer que cette suite converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$.*

1. *Nous avons vu que sur $[a, +\infty[$, (f_n) converge simplement vers $f = 0$ dans l'exemple 1.1.3 et donc pour n dans $\mathbb{N}$, on a : $\forall x \in [a, +\infty[,\ |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leq \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \leq \dfrac{n+2}{n+1} e^{-na^2}$. On a donc : $\|f_n - f\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \dfrac{n+2}{n+1} e^{-na^2}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{n+1} e^{-na^2} = 0$ (car $\dfrac{n+2}{n+1} e^{-na^2} \sim_{+\infty} e^{-na^2}$), alors (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a, +\infty[$*
2. *On conclut de la même manière, car : $\forall x \in [a, b],\ |f_n(x)| \leq \dfrac{n+2}{n+1} e^{-na^2}$.*

Remarque 1.2.2 *ATTENTION, l'exemple précédent nous montre que :*

1. *l'on peut ne pas converger uniformément sur un intervalle (grâce à l'exemple 1.1.3, on n'a pas convergence uniforme sur* $\mathbb{R}_+^*$*), mais converger uniformément sur un intervalle plus petit (comme* $[a, +\infty[$*, avec* $a > 0$*). Ainsi il faut toujours préciser sur quel intervalle on converge uniformément.*
2. *la convergence uniforme sur tout segment* $[a, b]$ *inclus dans* I*, n'implique pas la convergence uniforme sur* I *tout entier. Le corollaire précédent nous donne uniquement la continuité de* f*. En effet la convergence uniforme est une propriété globale sur* I *tout entier, alors que la continuité est une propriété locale.*

Théorème 1.2.1 (Théorème de la double limite)

1. *On suppose que* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers une fonction* f *sur* A*, et soit* $a \in \overline{A}$*.*
   Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ *la fonction* f_n *admet une limite* b_n *en* a*, alors la suite* $(b_n)_n$ *converge vers* $b \in \mathbb{K}$ *et* f *admet* b *pour limite en* a *:*
   $$b = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$
   En résumé : si (f_n) *converge uniformément vers* f *et si pour tout* n *de* $\mathbb{N}$*,* $\lim\limits_a f_n = b_n$*, alors* $\lim\limits_a \lim\limits_n f_n = \lim\limits_n \lim\limits_a f_n$*.*
2. *Si* $E = \mathbb{R}$ *et* A *n'est pas majoré et* $a = +\infty$*, ou bien* A *n'est pas minoré et* $a = -\infty$ *et si* (f_n) *converge uniformément vers* f*, avec pour tout* n *de* $\mathbb{N}$*,* $\lim\limits_a f_n = b_n$*, alors* $\lim\limits_a \lim\limits_n f_n = \lim\limits_n \lim\limits_a f_n$*.*

Démonstration : Admis.

Exemple 1.2.3

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et on pose* $f_n : x \mapsto \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$*. Montrer d'une autre manière que* (f_n) *ne converge pas uniformément vers* 0 *sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*
   Si on avait convergence uniforme, comme : $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}$ *et que* 0 *est dans* $\overline{\mathbb{R}_+^*}$*, alors par le théorème de la double limite, on aurait :* $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)}_{=0} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{n+1} = 1$*, ce qui est absurde.*
2. *On pose* $f : x \mapsto 2x(1-x)$*. Étudier la convergences simple sur* $]0, 1[$ *de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $f_n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$*. Montrer que l'on n'a pas convergence uniforme sur* $]0, 1[$*, mais que l'on a la convergence uniforme sur* $[a, b] \subset]0, 1/2]$*.*

1.3 Passage à la limite dans une intégrale pour une suite de fonctions

1.3.1 État des lieux sur deux exemples

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose : $\forall t \in [0,1[,\ f_n(x) = \dfrac{t^{x-1+n}}{1+t}$. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$. Est-ce que cette limite vaut $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$?

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose : $f_n : \left\{ \begin{array}{lcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^2 x(1-x)^n \end{array} \right.$. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$. Est-ce que cette limite vaut $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$?

Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = 0$.

Soit $x \in]0,1[$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = xn^2 e^{n\ln(1-x)}$. Comme $\ln(1-x) < 0$, alors par croissance comparée : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Donc (f_n) converge simplement vers $f = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = n^2 \int_0^1 x(1-x)^n dx \underbrace{=}_{u=1-x} n^2 \int_1^0 (1-u)u^n(-du) =$

$n^2 \displaystyle\int_0^1 (u^n - u^{n+1})du = n^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \sim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1.$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq \int_0^1 f$.

Nous pouvons constater que si une suite de fonction (f_n) converge vers f, on ne peut pas dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_I f_n(x)dx$ vaut $\displaystyle\int_I f(x)dx$. Pour chercher une limite du type $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_I f_n(x)dx$, jusqu'ici, vous avez procédé par des inégalités comme dans le premier exemple. Cette méthode restera tout à fait efficace dans certains cas.

Dans ce qui suit, nous allons donner des conditions suffisantes pour avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx$.

1.3.2 Théorème de convergence dominé

Théorème 1.3.1 (Théorème de convergence dominée) *On suppose que :*

1. *pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I.*
2. *(f_n) converge simplement vers f et f est continue par morceaux sur I.*
3. ***(Domination)** il existe une fonction φ, continue par morceaux et intégrable sur I telle que :*

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq \varphi(x).$$

Alors les fonction f_n et f sont intégrables sur I et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx$.

Démonstration : Admis (mais pour ceux qui veulent « s'amuser », on pourra consulter le sujet ENS Lyon-Cachan 1993).

Remarque 1.3.1
1. *Bien veiller à ce que la fonction φ soit indépendante de n.*
2. *L'hypothèse de domination se fait en deux étapes :*
   (a) *pour x fixé dans I, trouver un majorant de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire une valeur $\varphi(x)$ qui ne dépend pas de n.*

(b) *prouver l'intégrabilité de φ sur I.*

3. *Le théorème de convergence dominé n'est pas un recours obligatoire, parfois de simples majorations permettent de conclure comme dans le premier exemple du paragraphe précédent.*

4. *ATTENTION, ne pas confondre avec* $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I \varphi(x)dx$, *qui est en général faux.*

Exemple 1.3.1 1. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^ne^{-t}}dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^ne^{-t}}$.

- *Pour tout* n *de* $\mathbb{N}^*$, f_n *est continue par morceaux sur* $[0, +\infty[$.
- (f_n) *converge simplement vers* $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad t > 1 \\ \frac{1}{2+e^{-1}} & \textit{si} \quad t = 1 \\ \frac{1}{1+t^2} & \textit{si} \quad t \in [0, 1[\end{cases}$ *qui est continue par morceaux sur* $[0, +\infty[$.
- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a :* $\forall t \in [0, +\infty[,\ |f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ *et* φ *est continue par morceaux et intégrable sur* $[0, +\infty[$.

Grâce au théorème de convergence dominé :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^ne^{-t}}dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

2. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{nx+x\sqrt{x}}dx$.

3. *Soit* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *continue. Déterminer un développement asymptotique à un terme de* $I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$.

4. (a) *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln(t)dt=I.$

(b) *On pose* $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)=\gamma$ *(voir la chapitre 3 pour l'existence). Lier* γ *et* I.

Remarque 1.3.2 *De la même manière que l'exemple précédent, on montre que pour* x *dans* $\mathbb{R}_+^*$, *on a :* $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$. *En posant* $u=t/n$ *cela revient à avoir :* $\lim_{n\to+\infty}n^x\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}dt$. *En utilisant des IPP :* $\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}dt=\frac{n}{x}\int_0^1(1-u)^{n-1}u^x dt=...=\frac{n!}{x(x+1)...(x+n-1)}\int_0^1 u^{x+n-1}dt$, *on retrouve la formule d'Euler :*
$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}=\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt.$

1.3.3 Cas de la convergence uniforme sur un segment

Proposition 1.3.1 (Convergence uniforme et intégrales sur un segment)

- *Pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$.*
- *(f_n) converge uniformément sur le segment $[a, b]$ vers f.*

Alors on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

Démonstration :

Exemple 1.3.2

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose :* $f_n : \left\{ \begin{array}{lcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^2x(1-x)^n \end{array} \right.$. *Est-ce que la convergence de (f_n) est uniforme ?*

2. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :*
   $\forall k \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^1 x^k f(x)dx = 0$. *Montrer que $f = 0$.*

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{dx}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2+2x}}}}}_{n \text{ racines}}}$.

Proposition 1.3.2 (Primitivation d'une suite de fonctions qui convergent uniformément) *On suppose que toutes les fonctions f_n sont continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$: $F_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n$ et $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$. Alors (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I.*

Démonstration : Par convergence uniforme sur tout segment de I, on peut d'abord affirmer que f est continue sur I. Soit $[\alpha, \beta]$ inclus dans I et on peut supposer sans perte de généralité que a est dans $[\alpha, \beta]$ (sinon utiliser une relation de Chasles). Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [\alpha, \beta]$. On a si $x \geq a$:
$|F_n(x) - F(x)| = |\displaystyle\int_a^x (f_n - f)| \leq \int_a^x |f_n - f| \leq \int_a^x \|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]} = (x-a)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \leq (\beta - \alpha)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]}$.
Si $x \leq a$: $|F_n(x) - F(x)| = |\displaystyle\int_a^x (f_n - f)| = |\int_x^a (f_n - f) \leq \int_x^a |f_n - f| \leq (a-x)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \leq (\beta - \alpha)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]}$.
On a donc : $\forall x \in [\alpha, \beta],\ |F_n(x) - F(x)| \leq (\beta - \alpha)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]}$, puis :
$\|F_n - F\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \leq (\beta - \alpha)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,\beta]}$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|F_n - F\|_{\infty,[\alpha,\beta]} = 0$.

Exemple 1.3.3 *Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) telle que (P_n) converge uniformémént vers f sur $[a, b]$ et (P_n') converge uniformément vers f' sur $[a, b]$.*

1.4 Dérivabilité d'une suite de fonctions

1.4.1 État des lieux sur un exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$. Montrer que (f_n) converge uniformément vers $f : x \mapsto |x|$. Est-ce que la limite simple ou uniforme f d'une suite de fonctions dérivables (f_n) est dérivable ?

1.4.2 Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions

Proposition 1.4.1 (Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions) *I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.*

1. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions telles que*
   - *pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;*
   - *la suite (f_n) converge simplement vers f sur I.*
   - *la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction h sur I,*

   alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $f' = h$, soit : $\forall x \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x)$

   et (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I.
2. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions telle que*
   - *pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;*
   - *la suite (f_n) converge simplement vers f sur I.*
   - *la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction h sur tout segment $[a,b]$ inclus I,*

   alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $f' = h$, donc : $\forall x \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x)$

   et (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I.

Démonstration : *1.* Comme (f_n') est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers h, alors h est continue sur I.
Soient $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On a : $\forall x \in I,\ f_n(x) = f_n(a) + \displaystyle\int_a^x f_n'(t)dt$ $(*)$. On a : $[a,x] \subset I$ et (f_n') converge uniformément sur le segment $[a,x]$ vers h. Ainsi on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^x f_n' = \int_a^x h$. Dans $(*)$ quand n tend vers $+\infty$, on a : $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x h(t)dt$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a : $\forall x \in I,\ f'(x) = h(x)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $g_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n' = f_n(x) - f_n(a)$ et (f_n') est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f' sur I. Grâce à la proposition précédente de primitivation, (g_n) converge uniformément vers $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f' = f(x) - f(a)$ sur tout segment de I. Enfin :
$\forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| = |g_n(x) - g(x)|$, ce qui assure aussi la convergence uniforme de (f_n) vers f sur tout segment de I.
2. Soit $x_0 \in I$. Il existe un segment $[a,b]$ tel que : $x_0 \in [a,b] \subset I$. Le premier point de cette proposition appliqué à l'intervalle $[a,b]$ prouve que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que $f'(x_0) = h(x_0)$. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de tout point x_0 de I et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

1.4.3 Dérivées d'ordre supérieur de la limite d'une suite de fonctions

Proposition 1.4.2 (Dérivabilité d'ordre supérieur de la limite d'une suite de fonctions) *I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.*

1. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I telles que :*
   - *Pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*
   - *Pour tout p dans $[\![0, k-1]\!]$, la suite de fonctions $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction g_p. Pour $p = 0$, on notera que (f_n) converge vers $f = g_0$.*
   - *La suite de fonctions $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction g_k.*

   Alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et on a : $\forall p \in [\![1, k]\!],\ f^{(p)} = g_p$.
2. *Dans les hypothèse précédentes, si on remplace le dernier point par : la suite de fonctions $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g_k sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I, alors on obtient le même résultat.*

Démonstration : Il suffit de démontrer le dernier point. Montrons cela par récurrence sur k.
Pour $k = 1$, c'est la proposition 1.4.1.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et on suppose la proposition vraie pour k. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ telle que $(f_n^{(p)})$ converge simplement vers une fonction g_p sur I pour tout p de $[\![0, k]\!]$ et telle que $(f_n^{(k+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g_{k+1} sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I. On pose $f = g_0$.
$(f_n^{(k)})$ converge simplement vers une fonction g_k sur I et $\big((f_n^{(k)})'\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g_{k+1} sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I (car $(f_n^{(k)})' = f_n^{(k+1)}$). Ainsi grâce à la proposition 1.4.1, la fonction g_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a : $g_k' = g_{k+1}$.
Montrons que $f_n^{(k)}$ converge uniformément vers g_k sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I. On notera $\|.\|_{\infty,[a,b]}$ la norme uniforme sur $[a, b]$.
$\forall x \in [a, b],\ |g_k(x) - f_n^{(k)}(x)| = \left|g_k(a) + \int_a^x g_k'(t)dt - f_n^{(k)}(a) - \int_a^x (f_n^{(k)})'(t)dt\right|$
$\leq \left|g_k(a) - f_n^{(k)}(a)\right| + \left|\int_a^x (g_k'(t)dt - (f_n^{(k)})'(t))dt\right|$.
Or on a : $\left|\int_a^x (g_k'(t)dt - (f_n^{(k)})'(t))dt\right| \leq \int_a^x |g_k'(t)dt - (f_n^{(k)})'(t)|dt = \int_a^x |g_{k+1}(t)dt - f_n^{(k+1)}(t)|dt \leq \int_a^x \|g_{k+1} - f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]}dt = (x-a)\|g_{k+1} - f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]} \leq (b-a)\|g_{k+1} - f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]}$, car on a : $\forall t \in [a, b],\ |g_{k+1}(t)dt - f_n^{(k+1)}(t) \leq \|g_{k+1} - f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]}$ et $\|g_{k+1} - f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]}$ est une constante. On a donc :
$\forall x \in [a, b],\ |g_k(x) - f_n^{(k)}(x)| \leq \left|g_k(a) - f_n^{(k)}(a)\right| + (b-a)\|g_{k+1} - f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]}$. Le membre de droite de cette inégalité étant indépendant de x, alors on a :
$\|g_k - f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]} \leq \left|g_k(a) - f_n^{(k)}(a)\right| + (b-a)\|g_{k+1} - f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]}$. Comme $(f_n^{(k+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g_{k+1} sur $[a, b]$, alors $\lim_{n\to+\infty} (b-a)\|g_{k+1} - f_n^{(k+1)}\|_{\infty,[a,b]} = 0$ et comme $f_n^{(k)}$ converge simplement vers g_k, alors $\lim_{n\to+\infty} \left|g_k(a) - f_n^{(k)}(a)\right| = 0$. Ainsi on a : $\lim_{n\to+\infty} \|g_k - f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]} = 0$ et donc $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers g_k. Cela étant valable pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, alors grâce à l'hypothèse de récurrence, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout p de $[\![1, k]\!]$, on a : $f^{(p)} = g_p$. Par ailleurs comme g_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $g_k' = g_{k+1}$, alors f est aussi de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I et en plus $f^{(k+1)} = (f^{(k)})' = g_k' = g_{k+1}$. On a donc le résultat au rang $k+1$.

Remarque 1.4.1 *IMPORTANTE : pour montrer que la limite f de (f_n) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, il faut appliquer la proposition précédente pour tout k de $\mathbb{N}^*$ et donc il faut vérifier la convergence uniforme sur I (ou sur tout segment inclus dans I) de toutes les suites des dérivées $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ (ou à partir d'un certain rang pour k).*

2 Séries de fonctions

2.1 Modes de convergence d'une série de fonctions

2.1.1 Convergence simple d'une série de fonctions

Définition 2.1.1 (Convergence simple d'une série de fonctions) *On dit que la série de fonction* $\sum f_n$ *est simplement convergente sur* A *et de somme* S *si pour tout* x *de* A*, la série* $\sum f_n(x)$ *converge et a pour somme* $S(x)$.

Autrement dit si on note $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ *la somme partielle d'ordre* n*, alors la suite de fonctions* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* S*, c'est-à-dire :* $\forall x \in A,\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = S(x)$.

Dans ce cas, on a : $\forall x \in A,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Remarque 2.1.1

1. *Si la série converge simplement, alors le reste d'ordre* n *est la fonction* $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ *qui s'écrit aussi* $R_n = S - S_n$ *et converge simplement vers 0.*
2. *Si pour tout* n *les fonctions* f_n *sont* T*-périodiques (respectivement positives, négatives, croissantes, décroissantes, paires, impaires, convexes,...), alors* $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est* T*-périodique (respectivement positive, négative, croissante, décroissante, paire, impaire, convexe,...).*

Exemple 2.1.1

1. $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ *converge simplement sur* $]1, +\infty[$.
2. *Étude de la convergence et de la somme de la série de fonctions* $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(nx)$ *sur* $]-1;1[$.

   On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[,\ |x^n \sin(nx)| \leq |x|^n$. *Comme* $\sum_{n\geq 0} |x|^n$ *converge, alors* $\sum_{n\geq 0} x^n \sin(nx)$ *converge (absolument).*

   Soit $x \in]-1,1[$. *On a :* $S(x) = Im\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{inx}\right) = Im\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{ix})^n\right) = Im\left(\frac{1}{1-xe^{ix}}\right)$, *car* $|xe^{ix}| = |x| < 1$. *Ainsi* $S(x) = Im\left(\frac{1-xe^{-ix}}{(1-xe^{ix})(1-xe^{-ix})}\right) = Im\left(\frac{1-xe^{-ix}}{1-x(e^{ix}+e^{-ix})+x^2}\right) = \frac{x\sin(x)}{1-2x\cos(x)+x^2}$.
3. *Pour* $x \in \mathbb{R}_+$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose* $u_n(x) = \operatorname{Arctan}(\sqrt{x+n}) - \operatorname{Arctan}(\sqrt{n})$.

2.1.2 Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition 2.1.2 (Convergence uniforme d'une série de fonctions) *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* A *si la suite des somme partielle* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(avec* $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$*) converge uniformément sur* A.

Proposition 2.1.1 (Convergence uniforme des restes) *Soit $\sum f_n$ une série de fonction qui converge simplement sur A.*
La série $\sum f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $R_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$) converge uniformément vers 0.

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$. La suite (S_n) converge simplement vers $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ et on a : $R_n = S - S_n$. Par définition la suite (S_n) converge uniformément vers S si et seulement si la suite $(S - S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 si et seulement si la suite (R_n) converge uniformément vers 0.

Proposition 2.1.2 (La convergence uniforme implique la convergence simple) *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A alors elle converge simplement sur A.*

Démonstration : Si la suite de fonction (S_n) converge uniformément, alors elle converge simplement grâce à la proposition 1.1.2.

Remarque 2.1.2

1. *IMPORTANTE : pour montrer que $\sum f_n$ converge uniformément, (si on n'utilise pas la convergence normale que l'on verra au paragraphe suivant) on établit la convergence simple de $\sum f_n$ puis on montre que la suite des restes (R_n) converge uniformément vers 0, on utilise que très rarement la définition avec les sommes partielles.*
2. *Pour la convergence uniforme d'une série, il suffit donc de trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendante de x qui converge vers 0 telle que : $\forall x \in A, |R_n(x)| \leq \alpha_n$.*
   En effet on aura donc $\|R_n\|_\infty \leq \alpha_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$.
   Dans ce contexte le critère spécial des séries alternées peut être très pratique, car il donne facilement une majoration des restes.

Exemple 2.1.2

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose : $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}} \end{array} \right.$. Étudier la convergence uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.*

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose : $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{nx^2}{n^3+x^2} \end{array} \right.$.*
   Étudier le mode de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$.

$\sum_{n\geq 1} \underbrace{f_n(0)}_{=0}$ *converge. Pour* $x \in \mathbb{R}^*$*, on a :* $f_n(x) \sim_{n\to+\infty} \frac{nx^2}{n^3} = \frac{x^2}{n^2}$ *Ainsi* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *(par comparaison de termes positifs).*

3. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et on pose :* $f_n : \left\{ \begin{array}{lcl} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin^2(x)\cos^n(x) \end{array} \right.$.
   (a) *Montrer* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge simplement sur* $[0,\pi]$.
   (b) *A-t-on convergence uniforme sur* $[0,\pi]$ *?*
   (a) $\sum_{n\geq 1} \underbrace{f_n(0)}_{=0}$ *et* $\sum_{n\geq 1} \underbrace{f_n(\pi)}_{=0}$ *convergent.*
   Soit $x \in]0,\pi[$*. On a :* $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq |\cos(x)|^n$*. Or :* $|\cos(x)| < 1$*, donc* $\sum_{n\geq 1} (\cos(x))^n$ *converge. Ainsi en multipliant par la constante,* $\sin^2(x)$*,* $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ *converge.*
   (b)

4. *Soit* $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$*. Montrer que l'on a convergence uniforme sur* $\mathbb{R}_+$*.*

On pose pour $n \geq 2$*,* $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$*. Pour* $x = 0$*, la série converge car* $u_n(0) = 0$*. Pour* $x > 0$ *fixé, on a* $u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *et donc la série* $\sum_n u_n(x)$ *converge.*

5. *Soient* $A \subset \mathbb{C}$ *et* (f_n) *une suite de fonctions de* A *dans* $\mathbb{C}$. *Montrer que si la série de fonctions* $S = \sum f_n$ *converge uniformément sur* A, *alors la suite* (f_n) *converge uniformément vers* 0 *sur* A.

6. *Soit* (a_n) *une suite décroissante de limite nulle, donc positive.*
Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 1} a_n \sin(nt)$ *converge uniformément sur* $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, *avec* $0 < \alpha < \pi$.

Nous avons vu dans le chapitre 3 que cette série converge.
En notant $U_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kt)$, *pour* $t \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$, *nous avons aussi vu que :*
$\forall n \in \mathbb{N},\ |U_n(t)| \leq \dfrac{2}{|1 - e^{it}|}$.

2.1.3 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 2.1.3 (Convergence normale) *Une série $\sum f_n$ de fonctions est dite normalement convergente si toutes les fonctions f_n sont bornées sur A et $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.*

Remarque 2.1.3

1. *IMPORTANT : pour montrer qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, on montre qu'il existe une série numérique $\sum \alpha_n$ convergente telle que :*
   $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A,\ |f_n(x)| \leq \alpha_n$. En effet, dans ce cas, par définition de la borne supérieure, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sup\limits_{x \in I} |f_n(x)| \leq \alpha_n$, puis : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$. Ainsi par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.
   Il s'agit donc de majorer chaque $|f_n(x)|$ par un nombre α_n indépendant de x.
   Cette méthode sera souvent employée, car il n'est pas toujours facile d'avoir $\|f_n\|_\infty$.
   Parfois à l'aide d'une étude de fonction, il sera possible de déterminer directement $\|f_n\|_\infty$.
2. *ATTENTION, si on a $f_n(x) = o(\alpha_n)$, le $o(\alpha_n)$ dépend de x ! Par exemple $x/n^3 = o(1/n^2)$, mais si cette majoration est indépendante de x, alors il existe $k \in \mathbb{R}$. tel que :*
   $\forall x \in \mathbb{R},\ x/n^2 \leq k/n \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x \leq kn$. Ceci est faut pour $x = kn + 1$.
3. *ATTENTION : la convergence normale est une notion spécifique aux <u>séries</u> de fonctions.*
4. *Ne pas confondre la convergence absolue d'une série de fonctions au point x (qui signifie que $\sum |f_n(x)|$ converge) et la convergence normale qui est une notion glabale (il faut majorer la fonction $|f_n|$ sur un intervalle pour montrer que la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge).*

Proposition 2.1.3 (La convergence normale implique la convergence uniforme) *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors la série de fonction $\sum f_n$ converge aussi uniformément sur A et donc simplement aussi.*

Démonstration :

Remarque 2.1.4 *IMPORTANT : pour établir une convergence uniforme d'une série de fonctions, il sera souvent plus simple d'établir la convergence normale.*

Exemple 2.1.3

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2 + x^2 + 2n + 1 + x^{2n+2}}$. Quelle est le mode de convergence de $\sum\limits_{n \geq 0} f_n$.*

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose :* $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+n^4x^4} \end{array} \right.$ *. La série de fonctions* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge-t-elle normalement sur* $[0,+\infty[$ *? On utilisera deux méthodes.*

Remarque 2.1.5 *La convergence uniforme n'implque pas la convergence normale. En effet, dans l'exemple 2.1.2, nous avons vu que pour* $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$*, on a la convergence uniforme de* $\sum_{n\geq 1} f_n$*, mais* $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *permet d'affirmer que l'on n'a pas la convergence normale.*

Proposition 2.1.4 (La convergence normale implique la convergence absolue) *Si la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge normalement sur A, alors pour tout x de A, la série numérique* $\sum f_n(x)$ *converge absolument.*

Démonstration : Soit $x \in A$. On a : $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$. Comme la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, alors $\sum |f_n(x)|$ aussi.

2.2 Régularité de la somme d'une série de fonctions

2.2.1 Continuité de la somme d'une série de fonctions

Proposition 2.2.1 (Continuité d'une série de fonctions) *Soient* $\sum f_n$ *une série de fonctions et $a \in A$.*

1. - *Si pour tout n, la fonction f_n est continue sur A (resp. en a).*
   - *Si* $\sum f_n$ *converge uniformément ou normalement sur A.*

   Alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur A (resp. en a).*
2. - *Si pour tout n, la fonction f_n est continue sur A.*
   - *Si pour tout a de A, il existe un voisinage V (relatif de A) de a tel que* $\sum f_n|_V$ *converge uniformément ou normalement .*

   Alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur A.*
3. *Si $A = I$, un intervalle de $\mathbb{R}$:*
   - *si pour tout n, la fonction f_n est continue sur I.*
   - *si* $\sum f_n$ *converge uniformément ou normalement sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I.*

   Alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur I.*

Démonstration : Comme la convergence normale implique la convergence uniforme, il suffit de montrer la proposition pour la convergence uniforme. On a les deux premiers résultats grâce à la proposition 1.2.1 et le corollaire 1.2.1 en les appliquant à la suite de fonctions (S_n), avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

Exemple 2.2.1 1. *Étude de la continuité de* $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et on pose* $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

- *Chaque fonction* u_n *est continue sur* $\mathbb{R}_+$.
- *Nous avons vu dans l'exemple 2.1.2 que* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}_+$.

Ainsi $g = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$.

2. *Déterminer* $\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+x^2+2n+1+x^{2n+2}}$.

3. *Montrer que* $h : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(nx)e^{-n^2x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.

4. *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *et on pose* $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$, *avec* $n^z = e^{z\ln(n)}$. *Montrer que* ζ *est définie sur* $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 1\}$, *puis montrer qu'elle y est continue.*

5. ***(Développement eulérien de*** *cotan)*

Soient les fonctions f, g et D définies sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ par :

$$f(x) = \pi cotan(\pi x) = \pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}, \quad g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right).$$ *On pose $D = f - g$.*

(a) *Montrer que g converge simplement sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.*

(b) *Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.*

(c) *Montrer que g est impaire et périodique de période 1.*

(d) *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on a $D\left(\frac{x}{2}\right) + D\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2D(x)$.*

(e) *Montrer que la fonction D se prolonge par continuité en une fonction $\widetilde{D}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\widetilde{D}(0) = 0$.*

(f) *Justifier l'existence de $\alpha \in [0,1]$ tel que $\widetilde{D}(\alpha) = M$, où $M = \sup_{t\in[0,1]} \widetilde{D}(t)$, puis montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \widetilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = M.$$

(g) *Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \quad \pi x cotan(\pi x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{x^2-n^2}$.*

(a) *Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Les termes de la série sont bien définis. De plus quand $n \to +\infty$, on a : $u_n(x) = \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = \frac{2x}{x^2-n^2} = O(1/n^2)$. La série définissant $g(x)$ est donc absolument convergente donc convergente.*

(b)

(c) *Soit* $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. *On a bien* $-x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ *et*

$$g(-x) = \frac{1}{-x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{-x+n} + \frac{1}{-x-n}\right) = -\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right) = -g(x)$$

Ainsi g *est impaire.*
Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. *On a bien* $x+1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. *On a :*

$$\frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+1+n} + \frac{1}{x+1-n}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right) + \frac{1}{x+N+1} - \frac{1}{x-N}$$

or $\frac{1}{x+N+1} - \frac{1}{x-N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. *Ainsi par unicité de la limite :* $g(x+1) = g(x)$, *donc* g *est* 1*-périodique.*

(d)

(e)

(f)

(g)

2.2.2 Dérivabilité de la somme d'une série de fonctions

Proposition 2.2.2 (Dérivation terme à terme) *I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

- *pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*
- *la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur I*
- *la série $\sum f_n'$ converge uniformément ou normalement sur I (ou sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I).*

Alors la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Démonstration : On suppose le premier point et le fait que la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$. Sur I la fonction S_n est dérivable

en tant que somme finie de fonctions dérivables sur I et on a : $S'_n = \sum_{k=0}^{n} f'_k$. On pose $S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ et $S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k$. Ces deux quantités existent car $\sum f_n$ converge simplement sur I et $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de I, donc si x_0 est dans I, on peut trouver des réels a et b tels que : $x_0 \in [a,b] \subset I$ puis comme $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ elle cette série converge simplement sur $[a,b]$ et en particulier en x_0. Ainsi pour tout x_0 de I, $\sum f'_n(x_0)$ existe.
(S_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et (S_n) converge simplement vers S. D'autre part (S'_n) converge uniformément vers S_1 sur tout segment inclus dans I. Ainsi grâce à la proposition 1.4.1, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $S' = S_1$, d'où : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Remarque 2.2.1 *(IMPORTANTE) Pour les deux propositions précédentes, il sera plus simple d'essayer de montrer la convergence normale. La convergence uniforme se montre souvent pour des séries du type* $\sum (-1)^n u_n$, *car grâce au théorème spécial des séries alternées, il est possible de majorer les restes* R_n *et ainsi de montrer que :* $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$.

Exemple 2.2.2

1. *Quelle est la monotonie de* $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *?*

   Montrons que cette fonction de de classe $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *On constate que :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$.
   - *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* u_n *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
   - *Nous avons vu la convergence simple dans l'exemple 2.1.2.*
   - *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ |u'_n(x)| = \frac{1}{(x+n)^{3/2}} \le \frac{1}{n^{3/2}}$, *puis :* $\|u'_n\|_\infty \le \frac{1}{n^{3/2}}$, *donc la série* $\sum_{n\ge1} \|u'_n\|_\infty$ *converge, puis on a la convergence normale de* $\sum_{n\ge1} u'_n$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

   Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *donc* f *aussi.*

   On a par ailleurs : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2(x+n)^{3/2}}$ *qui vérifie les hypothèses du TSSA, car* $\left(\frac{1}{2(x+n)^{3/2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et de limite nulle.*
   Ainsi $f'(x)$ *est du signe de son premier terme, donc :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) \le 0$ *et donc* f *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$.

2. *Dans l'exemple 1.1.1, on a vu que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\ge1}$ *converge simplement vers une fonction* f *sur* $A = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, *avec* $f_n : x \mapsto \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}$. *Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* A.

3. *Soit* $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On pose :* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b],\ f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)dt$.

   Exprimer $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *en fonction de* f_0.

4. *Montrer que* $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ *n'est pas dérivable en* 0.

5. ***(Fonction de Van Der Waerden : une fonction continue sur $\mathbb{R}$ nulle part dérivable)***
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, paire, 2-périodique définie par : $\forall x \in [-1,1],\ g(x) = |x|$.

   (a) *Montrer que g est 1-lipschitzienne.*

   (b) *Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n x)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.*

   (c) *Montrer que si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors F est dérivable en un point x si et seulement si $\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h,k>0}} \frac{F(x+h)-F(x-k)}{h+k}$ existe.*

   (d) *Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $k_n = \lfloor 4^n x \rfloor$, $a_n = k_n 4^{-n}$ et $b_n = a_n + 4^{-n}$. En étudiant le taux d'accroissement de f entre a_n et b_n, en déduire que f n'est pas dérivable en n.*

   (a) *Soient $x, y \in \mathbb{R}$.*
Si on a : $|x-y| \geq 1$, alors comme $g(x)$ et $g(y)$ sont dans $[0,1]$, alors $|g(x)-g(y)| \leq 1 \leq |x-y|$.
Si on a : $|x-y| < 1$. Si x et y sont dans un intervalle du type $[-1+2k, 1+2k]$, avec k dans $\mathbb{Z}$, alors par périodicité : $|g(x)-g(y)| = |g(x-2k) - g(y-2k)| = ||x-2k| - |y-2k|| \leq |(x-2k)-(y-2k)| = |x-y|$, car $x-2k$ et $y-2k$ sont dans $[-1,1]$.
Si x est dans un intervalle $[-1+2k, 1+2k]$ et y dans $[-1+2(k-1), 1+2(k-1)]$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On rainsonnera de la même manière avec : $y \in [-1+2k, 1+2k]$ et $x \in [-1+2(k-1), 1+2(k-1)]$.
On a $|g(x)-g(y)| = |g(x-2k) - g(y-2(k-1))| = ||x-2k| - |y-2(k-1)||$. Or on a : $y \leq -1+2k \leq x$. Ainsi $x - y = |x-y| < 1$, donc $x - 2k < y + 1 - 2k = 0$ et
$y - 2(k-1) > x - 1 \geq -1 + 2k - 2k + 2 - 1 = 0$. On a donc :
$|g(x)-g(y)| = |2k - x - y + 2(k-1)| = |4k-2-x-y|$.
On a : $2y \leq -2+4k \leq 2x$, puis $y - x \leq -2+4k-x-y \leq x-y$, d'où : $|g(x)-g(y)| \leq 1$.

   (b) *Si la limite quand (h,k) tend vers $\left(0^+, 0^+\right)$ existe et vaut ℓ. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :*
$(0 < h \leq \eta)$ ET $(0 < k \leq \eta) \Rightarrow \left|\frac{F(x+h)-F(x-k)}{h+k} - \ell\right| \leq \varepsilon$.
On fixe h tel que : $0 < h \leq \eta$. Par continuité de F on a quand k tend vers 0 : $\left|\frac{F(x+h)-F(0)}{h} - \ell\right| \leq \varepsilon$. Ce qui donne par définition de la limite : $\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(0)}{h})\ell$, puis $F'_d(x) = \ell$. De même on montre que $F'_g(x) = \ell$. Ainsi F est dérivable en x.
Supposons que F est dérivable en x. Pour $\varepsilon > 0$, il existe alors $\eta > 0$ tel que :
$\forall h \in \mathbb{R}^*, |h| < \eta \Longrightarrow f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < f'(x) + \varepsilon$.
Pour h, k tels que $0 < h < \eta$ et $0 < k < \eta$, on a :
$f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < f'(x) + \varepsilon$ et $f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x-k)-f(x)}{-k} < f'(x) + \varepsilon$.
Comme $\frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \times \frac{h}{h+k} + \frac{f(x-k)-f(x)}{-k} \times \frac{k}{h+k}$ avec $\frac{h}{h+k}$ et $\frac{k}{h+k}$ positifs de somme égale à 1 , on obtient

$$f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k} < f'(x) + \varepsilon$$

ce qui prouve que $\frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k}$ tend vers $f'(x)$ quand (h,k) tend vers $\left(0^+, 0^+\right)$.

   (c) *Les séries qui définissent $f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont des sommes finies, car $g\left(4^k a_n\right) = g\left(4^k b_n\right) = 0$ pour $k > n$. Nous pouvons donc écrire :*

$$T_n = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \underbrace{4^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(g\left(4^k b_n\right) - g\left(4^k a_n\right)\right)}_{=R_n} + 3^n \left(g(k_n+1) - g(k_n)\right)$$

Nous allons montrer que T_n tend, en valeur absolue, vers $+\infty$. L'idée est que dernier terme de la somme va dominer R_n (on utilise que g est 1 -lipschitzienne) :

$$\left|4^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(g\left(4^k b_n\right) - g\left(4^k a_n\right)\right)\right| \leq 4^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k 4^k (b_n - a_n) = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{3^n - 1}{2}$$

On a donc :

- *si k_n est pair, $T_n = 3^n + R_n \geq 3^n - \frac{3^n-1}{2} = \frac{3^n+1}{2}$;*
- *si k_n est impair, $T_n = -3^n + R_n \leq -3^n + \frac{3^n-1}{2} = -\frac{3^n+1}{2}$.*

Ceci prouve que $\lim_{n\to+\infty} |T_n| = +\infty$, donc g n'est pas dérivable en x, grâce à la question précédente, car $T_n = \frac{f(x+h_n)-f(x-k_n)}{h_n+k_n}$, où $h_n = b_n - x$ et $k_n = x - a_n$ qui tendent vers 0 par valeurs supérieures

   (d)

2.2.3 Dérivées d'ordre supérieur de la somme d'une série de fonctions

Proposition 2.2.3 (Série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$) *Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. On suppose que*

- *pour tout n de $\mathbb{N}$ la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*
- *pour tout j dans $[\![0, k-1]\!]$, la série de fonction $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I.*
- *la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément ou normalement sur I (ou sur tout segment inclus dans I).*

On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Alors S est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et : $\forall j \in [\![1, k]\!], \forall x \in I,\ S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$.

Démonstration : Repasser par les sommes partielles comme dans la preuve de la proposition 2.2.2 et utiliser ensuite la proposition 1.4.2 relatifs aux suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Corollaire 2.2.1 (Série de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$) *On suppose que :*

- *pour tout n, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*
- *pour tout k de $\mathbb{N}$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément ou normalement sur I (ou sur tout segment inclus dans I).*

On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Alors S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et : $\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$.

Remarque 2.2.2 *1. Dans le corollaire précédente, il est suffisant d'avoir la converge uniforme ou normale de $\sum f_n^{(k)}$ à partir d'un certain rang pour k et convergence simple avant.*

2. IMPORTANTE : souvent lorsque l'on travaille sur un intervalle I ouvert ou non borné, on montrera la convergence normale sur tout segment inclus dans I.

Exemple 2.2.3 *1. On pose $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{x}{k}\right) e^{-x/\sqrt{k}}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et on pose $f_k : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{x}{k}\right) e^{-x/\sqrt{k}}$.

- *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_k est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.*
- *On a $\sum_{k\geq 1} \underbrace{f_k(0)}_{=0}$ qui converge.*

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $f_k(x) \sim_{k\to+\infty} \frac{x}{k\sqrt{k}} = \frac{x}{k^{3/2}}$. Par comparaison de séries à termes positifs (à partir d'un certain rang), $\sum_{k\geq 1} f_k(x)$ converge.

$\sum_{k\geq 1} f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

- *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_k'(x) = \frac{1}{k\sqrt{k}} \cos\left(\frac{x}{k}\right) e^{-x/\sqrt{k}} - \frac{1}{k} \sin\left(\frac{x}{k}\right) e^{-x/\sqrt{k}}$.*

$\sum_{k\geq 1} f_k'(0) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ converge.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $\left|\frac{1}{k\sqrt{k}} \cos\left(\frac{x}{k}\right) e^{-x/\sqrt{k}}\right| \leq \frac{1}{k\sqrt{k}}$, donc $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k\sqrt{k}} \cos\left(\frac{x}{k}\right) e^{-x/\sqrt{k}}$ converge. Par ailleurs $\frac{1}{k} \sin\left(\frac{x}{k}\right) e^{-x/\sqrt{k}} \sim_{k\to+\infty} \frac{x}{k^2}$. Par comparaison de séries à termes positifs (à partir d'un certain rang), $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{x}{k}\right) e^{-x/\sqrt{k}}$ converge.

Ainsi $\sum_{k\geq 1} f_k'$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

- *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :*

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_k''(x) = -\frac{1}{k^2\sqrt{k}} \sin\left(\frac{x}{k}\right) e^{-x/\sqrt{k}} - 2\frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{x}{k}\right) e^{-x/\sqrt{k}} + \frac{1}{k\sqrt{k}} \sin\left(\frac{x}{k}\right) e^{-x/\sqrt{k}}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f_k''(x)| \leq \frac{1}{k^2\sqrt{k}} + \frac{2}{k^2} + \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq \frac{1}{k\sqrt{k}} + \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{1}{k\sqrt{k}} = \frac{4}{k\sqrt{k}}$. On a donc $\|f_k''\|_\infty \leq \frac{4}{k\sqrt{k}}$. Par comparaison $\sum_{k\geq 1} \|f_k''\|_\infty$ converge.

On a par conséquent la convergence normale et donc uniforme de $\sum_{k\geq 1} f_k''$ sur $\mathbb{R}_+$.

f est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour x dans $]1, +\infty[$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et calculer ses dérivées successives.

3. Soit $\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$*. Montrer que* ϕ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

2.3 Séries de fonctions et intégrales

2.3.1 Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Théorème 2.3.1 (Intégration terme à terme des fonctions positives) *On suppose que :*

- *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$*, la fonction* f_n *est continue par morceaux et intégrable sur* I *et positive.*
- $\sum f_n$ *converge simplement vers* S *qui est continue par morceaux sur* I*.*

Alors

$$\int_I \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)dt = \int_I S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$

Les séries étant à termes positifs, la relations ci-dessus est dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *et l'intégrabilité de* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *équivaut à* $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt < +\infty$.

Démonstration : Admis.

Remarque 2.3.1 *Ce théorème s'adapte aux fonctions négatives.*

Exemple 2.3.1

Montrer que $\int_0^1 t^{-t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Théorème 2.3.2 (Intégration terme à terme) *On suppose que :*

- *pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur I.*
- $\sum f_n$ *converge simplement vers S qui est continue par morceaux sur I.*
- $\sum \int_I |f_n(t)|dt$ *converge.*

Alors S est intégrable sur I et :

$$\int_I (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t))dt = \int_I S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$

Démonstration : Admis.

Exemple 2.3.2 *1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}dt$.*

Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

2. *Soit* $\sum a_n$ *une série absolument convergente à termes complexes. On pose* $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On rappelle que $t \mapsto t^n e^{-t}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$ *et que* $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.

Montrer que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

- *Pour tout* n *de* $\mathbb{N}$, *la fonction* f_n *est continue par morceaux et intégrable, grâce au résultat rappelé.*
- $\sum f_n$ *converge simplement vers* f.
  Montrons que f *est continue.*
  Soit $\psi_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ *définie sur* $\mathbb{R}_+$, *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.
  On a : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \psi_n'(t) = t^{n-1} e^{-t}(n-t)$. *Ainsi* ψ_n *est positive et admet un maximum en* n, *donc :* $\|f_n\|_\infty = \frac{|a_n| n^n e^{-n}}{n!} \sim \frac{|a_n| n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = \frac{|a_n|}{\sqrt{2\pi n}} = o(|a_n|)$. *Ainsi* $\sum f_n$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}_+$ *et tous les* f_n *sont continues, donc* f *est continue.*
- *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On a :* $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{|a_n|}{n!} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt}_{=n!} = |a_n|$. *Ainsi* $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ *converge, car* $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ *converge.*

D'après le théorème d'intégration terme à terme, f *est intégrable et*
$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt}_{=n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Parfois, on ne peut pas utiliser le résultat du théorème car on n'a pas la convergence de $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ qui converge.
Il faut revenir au théorème de convergence dominé avec les sommes partielles.

Exemple 2.3.3 *Montrer que :* $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

Remarque 2.3.2 *1. En reprenant l'exemple 1.3.1, on aurait pu éviter le théorème de convergence dominé, en écrivant :* $\int_0^1 S_N(t)dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt + \int_0^1 \frac{(-1)^{N+2}t^{N+x}}{1+t}dt$ *et utiliser* $\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{N+x}}{1+t}dt = 0$.

2. Si on prend $x = 1$, *on trouve que :* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2)$.

2.3.2 Convergence uniforme d'une série de fonctions sur un segment

Proposition 2.3.1 (Primitivation terme à terme sur un segment)

- *Pour tout* n *de* $\mathbb{N}$, *la fonction* f_n *est continue sur* $[a,b]$.
- *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément ou normalement sur le segment* $[a,b]$.

Alors la série $\sum \int_a^b f_n$ *converge et :* $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$.

Démonstration : Pour tout t dans $[a,b]$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)$.

• La fonction S_n est continue sur $[a,b]$ comme somme finie de fonctions continues.

• Par hypothèse, (S_n) converge uniformément vers une fonction $S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ sur $[a,b]$ (la convergence normale implique la convergence uniforme).

Grâce à la proposition 1.3.1, on peut écrire : $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b S_n(t)dt = \int_a^b S(t)dt$.

Or par linéarité de l'intégrale (on a un nombre fini de termes), on a : $\int_a^b S_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(t)dt$. On a donc la propriété par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$.

Remarque 2.3.3 *Cette dernière proposition est bien moins utilisée que le théorème 2.3.2.*

Exemple 2.3.4 *Montrer que* $\int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{x+k}}dx = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p}} - \frac{1}{\sqrt{2p}+\sqrt{2p-1}}\right)$.

Proposition 2.3.2 (Primitivation d'une série de fonctions qui convergent uniformément) *On suppose que toutes les fonctions f_n sont continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I. On a : $\forall x \in I$,* $\displaystyle\int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)dt.$

Démonstration : C'est une conséquence de la proposition 1.3.2 appliquée à la suite des sommes partielles.

2.4 Comportement asymptotique des séries de fonction.

2.4.1 Recherche d'une limite aux bornes de l'intervalle de définition d'une série de fonctions

- Par utilisation du théorème de la double limite.

Théorème 2.4.1 (Théorème de la double limite) *1. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément (ou normalement) sur A de somme S, et soit $a \in \overline{A}$.*

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n admet une limite b_n en a, alors la série $\sum b_n$ converge et :

$$\lim_{x \to a} S(x) = \lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

2. Si $E = \mathbb{R}$ et que ou bien A n'est pas majoré et $a = +\infty$, ou bien A n'est pas minoré et $a = -\infty$ et si $\sum f_n$ converge uniformément (ou normalement) sur A de somme S et si pour tout n de $\mathbb{N}$, $\lim_a f_n = b_n$, alors la série $\sum b_n$ converge et :

$$\lim_{x \to a} S(x) = \lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Démonstration : Comme la convergence normale implique la convergence uniforme, alors le théorème 1.2.1 appliqué à la suite de fonctions (S_n) donne le résultat.

Exemple 2.4.1 *1. Soit $h : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)}$.. Déterminer $\lim_{0^+} h$.*

2. Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$. La fonction S converge-t-elle uniformément sur $]-1, 1]$?

Supposons que cette série converge uniformément sur $]-1, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{(-1)^n x^n}{n} = \frac{1}{n}$. Par le théorème de la double limite en -1, on aurait la convergence de $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$, ce qui est absurde. Nous n'avons donc pas convergence uniforme sur $]-1, 1]$.

3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$*, avec* $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

- Par majoration/minoration :

Exemple 2.4.2 *1. La fonction* $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ *est-elle dérivable en* 0 *?*

Remarque 2.4.1 *De la même manière, on montre que* $\lim\limits_{x\to1^+} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$*, en évoquant encore la décroissance et donc l'existence d'une limite* ℓ *en* 1*. Ainsi on a :*
$\forall x \in]1,+\infty[, \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \ell$*. On fait tendre* x *vers* 1*, puis* N *vers* $+\infty$*, pour avoir* $+\infty = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \leq \ell$*.*

2. On reprend la fonction $g : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}e^{-nx}}{n}$ *qui converge sur* $\mathbb{R}_+$*. Déterminer* $\lim\limits_{+\infty} g$*.*

2.4.2 Recherche d'équivalents

- À l'aide d'un encadrement utilisant une comparaison série et intégrale.
On se fixe x. Si la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, on peut comparer les sommes partielles de la série $\sum f_n(x)$ avec une intégrale, en encadrant pour chaque n la quantité $f_n(x)$. Bien comprendre qu'ici x est considéré comme une constante et que c'est n qui varie. Ainsi « n

devient t ».

Cela permet aussi de trouver des limites.

Exemple 2.4.3 *1. (a) Déterminer un équivalent de* ζ *en* 1*, avec* $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *avec* $n \geq 2$*. On pose* $u_n(x) = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^x}\right)$*. Montrer que la suite* (u_n) *converge simplement vers une fonction* u *sur* $\mathbb{R}_+^*$*. Montrer que* u *est continue en* 1.

(c) Soit $\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$*. Déterminer* $\phi(1)$.

2. Donner un équivalent en 0 *par valeurs supérieures de* $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$.

- En cherchant un équivalent potentiel et en concluant par un argumuent de comparaison.

Exemple 2.4.4 *1. Donner un équivalent en* 0 *par valeurs supérieures de* $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$.

2. Déterminer un équivalent en -1 *de* $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^{3/2}+(x+n)^{1/2}}$.

3 Extension aux fonctions vectorielles

Nous allons étendre les définitions vues avant avec des fonctions f_n à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. Les propositions étendues seront données sans preuves, car ce sont les mêmes que lorsque l'on avait des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, sauf qu'il faut remplacer les modules ou les valeurs absolues par une norme $\|.\|_F$ sur F.

3.1 Suites et séries de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie et A une partie de E. Pour toute application f bornée de A dans F, on définit : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in A} \|f(x)\|_F$.

Les normes sur F étant équivalentes, les normes ainsi définies dans $\mathcal{B}(A,F)$ (ensemble des fonctions bornées de A dans F) sont équivalentes.

Définition 3.1.1 (Extension des définitions sur les modes de convergences)

1. (a) *Une suite $(f_n)_n$ d'applications de A dans F converge simplement lorsque pour tout $x \in A$ la suite $(f_n(x))_n$ converge dans F.*
   (b) *La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f lorsque la suite $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ converge vers 0.*
2. (a) *Une série $\sum u_n$ d'applications de A dans F converge simplement lorsque pour tout $x \in A$ la série $\sum u_n(x)$ converge.*
   (b) *Si on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$, la série $\sum u_n$ converge uniformément si la suite (S_n) converge uniformément.*
   Cela revient à dire que la suite des restes d'ordre n converge uniformément vers 0.
   (c) *La série $\sum u_n$ converge normalement lorsque la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.*

Proposition 3.1.1 (Implications des différents modes de convergence)

1. *La convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la converge simple.*
2. *La convergence uniforme d'une série de fonctions implique la converge simple.*
3. *La convergence normale d'une série de fonctions implique la converge uniforme.*
4. *Si $\sum u_n$ converge normalement, alors pour tout x de A, la série $\sum u_n(x)$ converge absolument (la série $\sum \|u_n(x)\|_F$ converge).*

3.1.1 Continuité et double limite pour la convergence uniforme

Proposition 3.1.2 (Convergence uniforme et continuité)

1. *On suppose que (f_n) converge uniformément vers f sur A.*
   - *Si pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en a (avec $a \in A$), alors f est continue en a.*
   - *Si pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur A, alors f est continue sur A.*

   Le dernier point reste valable si on a la convergence uniforme au voisinage de tout point de A.
2. *On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément (ou normalement) de somme S sur A.*
   - *Si pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en a (avec $a \in A$), alors $S = \sum f_n$ est continue en a.*
   - *Si pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur A, alors $S = \sum f_n$ est continue sur A.*

   Le dernier point reste valable si on a la convergence uniforme au voisinage de tout point de A.

Corollaire 3.1.1 (Continuité de l'exponentielle)

- *L'application* exp *est continue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *L'application* exp *est continue dans $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.*

Démonstration :

Pour la continuité sur $\mathcal{L}(E)$, il suffit de prendre une base $\mathcal{B}$ de E et poser $\|u\|_2 = \|Mat_{\mathcal{B}}(u)\|_2$ et de reprendre la démonstration précédente.

Théorème 3.1.1 (Théorème de la double limite)

1. *On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur A, et soit $a \in \overline{A}$ (si $A \subset \mathbb{R}$, on peut éventuellement avoir $a = +\infty$ ou $a = -\infty$).*
   Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n admet une limite b_n en a, alors la suite $(b_n)_n$ converge vers $b \in F$ et f admet b pour limite en a : $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$.
2. *On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément (ou normalement) sur A de somme S, et soit $a \in \overline{A}$ (si $A \subset \mathbb{R}$, on peut éventuellement avoir $a = +\infty$ ou $a = -\infty$).*
   Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n admet une limite b_n en a, alors la série $\sum b_n$ converge et :
   $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.

4 Résumé des théorèmes pour $f_n : I \to \mathbb{K}$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$

On note $\mathcal{L}^1(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur I, $\mathcal{C}_{pm}(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I, on notera CV : converge, CVS : convergence simple, CVU : convergence uniforme, CVN : convergence normale

4.1 Suites de fonctions

Théorèmes	Hypothèses			Conclusion
	Régularité	CV ou intégrabilité	Contrôle	
Continuité	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0(I)$		(f_n) CVU sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$f = \lim f_n \in \mathcal{C}^0(I)$
Dérivabilité	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I)$	(f_n) CVS sur I	(f_n') CVU sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$f = \lim f_n \in \mathcal{C}^1(I)$ $f' = \lim f_n'$
Dérivabilité d'ordre supérieur	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^k(I)$	(f_n),...,$(f_n^{(k-1)})$ CVS sur I	$(f_n^{(k)})$ CVU sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$f = \lim f_n \in \mathcal{C}^k(I)$ $\forall l \in [\![0,k]\!] f^{(l)} = \lim f_n^{(l)}$
Double limite		$\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_a f_n = b_n$ $a \in \overline{I}$	(f_n) CVU sur I	$\lim\limits_a \lim\limits_n f_n = \lim\limits_n \lim\limits_a f_n$
Intégration (CV dominée)	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n, f \in \mathcal{C}_{pm}(I)$	(f_n) CVS vers f sur I	$\exists \varphi \in \mathcal{L}^1(I)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\| \leq \varphi$	$\lim \int_I f_n = \int_I f$ $f \in \mathcal{L}^1(I)$
Intégration sur $[a,b]$	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0([a,b])$		(f_n) CVU sur $[a,b]$	$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n$

4.2 Séries de fonctions

On notera $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Théorèmes	Hypothèses			Conclusion
	Régularité	CV ou intégrabilité	Contrôle	
Continuité	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0(I)$		$\sum f_n$CVU ou CVN sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$\sum f_n \in \mathcal{C}^0(I)$
Dérivation terme à terme	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I)$	$\sum f_n$ CVS sur I	$\sum f_n'$CVU ou CVN sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$\sum f_n \in \mathcal{C}^1(I)$ $\left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'$
Dérivation d'ordre k terme à terme	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^k(I)$	$\sum f_n$,...,$\sum f_n^{(k-1)}$ CVS sur I	$\sum f_n^{(k)}$CVU ou CVN sur I ou tout $[a,b] \subset I$	$\sum f_n \in \mathcal{C}^k(I)$ $\left(\sum f_n\right)^{(l)} = \sum f_n^{(l)},\ l \in [\![0,k]\!]$
Double limite		$\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_a f_n = b_n$ $a \in \overline{I}$	$\sum f_n$ CVU ou CVN sur I	$\sum b_n$ converge $\sum \lim\limits_a f_n = \sum b_n = \lim\limits_a(\sum f_n)$
Intégration terme à terme cas positif	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n, S \in \mathcal{C}_{pm}(I)$ f_n à valeurs dans $\mathbb{R}_+$	$\sum f_n$CVS vers S $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{L}^1(I)$		$\int_I \left(\sum f_n\right) = \sum \int_I f_n$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$
Intégration terme à terme	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n, S \in \mathcal{C}_{pm}(I)$	$\sum f_n$CVS vers S $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{L}^1(I)$	$\sum \int_I \|f_n\|$ CV	$\int_I \left(\sum f_n\right) = \sum \int_I f_n$
Primitivation terme à terme sur $[a,b]$	$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0([a,b])$		$\sum f_n$CVU ou CVN sur $[a,b]$	$\int_a^b \left(\sum f_n\right) = \sum \int_a^b f_n$