Définition 0.0.1 (Séries entières) *Soit (a_n) une suite complexe. La série entière de coefficients a_n est la série $\sum a_n z^n$, avec z un paramètre réel ou complexe.*

Remarque 0.0.1
1. *Il y aura deux façons de voir une série entière.*
   Soit on regarde cela comme une série et on cherche z telle que celle-ci soit convergente. Nous verrons cela dans le premier paragraphe.
   Soit nous regarderons ceci comme la série de fonctions $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
2. *On rappelle que : $0^0 = 1$ et que : $0^n = 0$ si n est dans $\mathbb{N}^*$.*
   Si on note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $f(0) = a_0$.

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si A n'est pas majoré, on notera $\sup(A) = +\infty$.

1 Rayon de convergence d'une série entière

1.1 Rayon de convergence et premières propriétés

Proposition 1.1.1 (Lemme d'Abel) *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

Démonstration :

Remarque 1.1.1
1. *On prendra garde qu'il faut que $|z| < |z_0|$ soit une inégalité stricte.*
2. *Si on note $I = \{r \in \mathbb{R}_+,$ la suite $(a_n r^n)$ soit bornée$\}$, alors I est un intervalle de $\mathbb{R}_+$. En effet soient α, β dans I tels que $\alpha < \beta$. Pour tout r de $[\alpha, \beta]$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée, car on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n r^n| \leq |a_n \beta^n|$ et cette dernière quantité est bornée, car β est dans I. Donc r est dans I, puis nous avons : $[\alpha, \beta] \subset I$. Comme 0 est dans I, alors I est de la forme $[0, R[$ ou $[0, R]$.*

Définition 1.1.1 (Rayon de convergence) *On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ la borne supérieure (dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$) de l'ensemble $\{r \in \mathbb{R}_+,$ la suite $(a_n r^n)$ soit bornée$\}$.*
Autrement dit, le rayon de convergence vaut $+\infty$ si cet ensemble n'est pas majoré, sinon c'est un réel positif ou nul.

Proposition 1.1.2 (Rayon de convergence et caractère borné de $(a_n z^n)_n$) *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*
1. - *Si $|z| < R$, alors la suite $(a_n z^n)$ est bornée.*
   - *Si $|z| > R$, alors la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.*
2. - *Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée, alors $|z| \leq R$.*
   - *Si la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, alors $|z| \geq R$.*

Démonstration : Pour les deux premiers points, on a :
$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,$ la suite $(a_n r^n)$ soit bornée$\}$. Ainsi grâce à la remarque précédente, on a :
$\{r \in \mathbb{R}_+,$ la suite $(a_n r^n)$ soit bornée$\}$ vaut $[0, R[$ ou $[0, R]$.
Les deux derniers points sont les contraposées des deux premiers points.

Remarque 1.1.2 *1. (IMPORTANT) si (a_n) est une suite bornée, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ vérifie :*

2. *(IMPORTANT) Soit $p \in \mathbb{N}$. Multiplier (ou diviser lorsque cela est possible) une série entière par z^p ne change par le rayon de convergence : $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n z^{n+p}$ ont le même rayon de convergence, car pour $z \in \mathbb{C}^*$ fixé, les suites $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n z^{n+p})_{n\in\mathbb{N}}$, sont bornées en même temps, car on passe de l'une à l'autre en multipliant par la constante non nulle z^p.*
   Ainsi les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+p} z^n$ ont aussi le même rayon de convergence.
3. *Les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence, car : $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n z^n| = ||a_n| z^n| = |(-1)^n a_n z^n|$ et donc les suites $(a_n z^n)$, $(|a_n| z^n)$ et $((-1)^n a_n z^n)$ sont bornées en même temps.*
4. *Si a_n est nulle à partir d'un certain rang, alors la série entière $\sum a_n z^n$ est une fonction polynôme de la forme $z \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ et son rayon de convergence vaut $+\infty$, car pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car elle est nulle à partir d'un certain rang.*
5. *ATTENTION : on ne peut rien dire sur la caractère borné de $(a_n R^n)_{n\in\mathbb{N}}$, car I est de la forme $[0, R[$ ou $[0, R]$.*

Exemple 1.1.1 *1. Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} z^n$ vaut 1, car $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si : $r \in [0, 1]$.*

2. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Quel est le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$?*

Proposition 1.1.3 (Série géométrique) *Soit $z \in \mathbb{C}$. Si : $|z| < 1$, alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.*

Démonstration : Voir le cours sur les séries géométriques.

Exemple 1.1.2 *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$.*

1. *Montrer que la famille $(z^{2p+3q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ est sommable et calculer sa somme $S(z)$.*
2. *Montrer que $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^n$, avec d_n le nombre de façon d'écrire $n = 2p + 3q$, avec $p, q \in \mathbb{N}$.*

Proposition 1.1.4 (Convergence de la série $\sum a_n z^n$) *$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et R son rayon de convergence.*

1.
   - *Pour $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.*
   - *Pour $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.*
2.
   - *Si la série $\sum a_n z^n$ converge, alors $|z| \leq R$.*
   - *Si la série $\sum a_n z^n$ diverge, alors $|z| \geq R$.*

Démonstration :

Remarque 1.1.3 1. *(IMPORTANTE) Si $\sum a_n$ diverge, alors*

2. *Attention dans la preuve précédente, on ne peut pas dire directement que si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge, car on ne sait pas si la suite $(a_n R^n)$ est bornée pour pouvoir utiliser le lemme d'Abel.*
3. *Là encore les inégalités sont strictes dans les hypothèses de 1..*

Corollaire 1.1.1 (Rayon de convergence défini par la convergence de $\sum a_n z^n$) *Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ peut s'écrire aussi :*
$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,$ *la série* $\sum a_n r^n$ *soit convergente (absolument)*$\}$.

Exemple 1.1.3 1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$.*

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Suivant la parité de n, on a :
$a_n = \sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ou $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Dans tous les cas, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = b_n$. Or nous avons : $b_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge. Ainsi on a : $R \leq 1$.
Par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leq \sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \sqrt{n} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$, car par concavité de $\ln$, on a : $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$. Ainsi la suite (a_n) est bornée et donc $R \geq 1$, puis : $R = 1$.

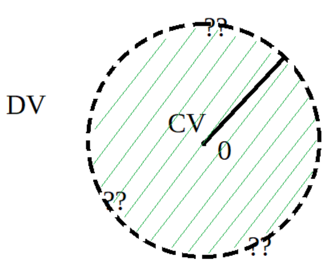
2. *Soit (a_n) une suite complexe telle que le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ soit strictement positif. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.*

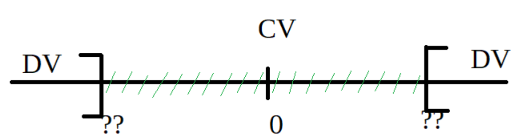
Définition 1.1.2 (Exponentielle) *Pour z dans $\mathbb{C}$, définit l'exponentielle de z par :* $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. *Son rayon de convergence vaut $+\infty$, car la série converge pour tout z de $\mathbb{C}$ (voir le cours sur les séries)*

Remarque 1.1.4
1. *Ceci peut servir de définition pour e^z avec z dans $\mathbb{C}$. Nous verrons plus tard que cette définition coïncide bien avec la définition connue de l'exponentielle réelle ou complexe.*
2. *Nous avons montré dans le chapitre sur les séries à l'aide d'un produit de Cauchy que :* $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Exemple 1.1.4 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer* $S = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Définition 1.1.3 (Disque/ intervalle ouvert de convergence)
1. *On appelle disque ouvert de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ le disque ouvert $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$, où R est son rayon de convergence.*
   Si $R = 0$, le disque ouvert est $\emptyset$, si $R = +\infty$, c'est $\mathbb{C}$ tout entier.
2. *On appelle intervalle (ouvert) de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ l'intervalle $]-R, R[$, où R est son rayon de convergence.*
   Si $R = 0$, cet intervalle est vide, si $R = +\infty$, c'est $\mathbb{R}$ tout entier.





Remarque 1.1.5 *Attention, sur le cercle $\{z \in \mathbb{C},\ |z| = R\}$, on ne peut rien dire sur la convergence de la série entière.*
Par exemple, montrer que les trois séries entières suivantes ont pour rayon de convergence 1, mais sur le cercle $\{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$, on ne peut rien dire sur la convergence des séries : $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$ *et* $\sum \frac{z^n}{n^2}$, *on a des comportements différents.*

Pour $|z| < 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{|z|^n}{n^2} \leq \frac{|z|^n}{n} \leq |z|^n$. *Comme $\sum |z|^n$ converge, alors les trois séries convergent (absolument).*
Pour $|z| > 1$ et $k \in [\![0,2]\!]$, on a : $\frac{|z|^n}{n^k} = \frac{e^{n\ln|z|}}{n^k} \underbrace{\to}_{n\to+\infty} +\infty$, *par croissance comparée ($\ln|z| > 0$) donc les trois séries divergent grossièrement. Ainsi $R = 1$.*

- *Pour $|z| = 1$:* $\sum z^n$ *diverge grossièment, car on n'a pas* $\lim_{n\to+\infty} z^n = 0$.
- *Pour $z = 1$:* $\sum \frac{z^n}{n} = \sum \frac{1}{n}$ *qui diverge, mais pour $z = -1$:* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *converge, grâce au TSSA.*

Sur le cercle de convergence, on peut avoir des comportement différents.

- *Pour $|z| = 1$:* $\sum \frac{|z^n|}{n^2} = \sum \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Définition 1.1.4 (Fonctions développables en série entière (DSE)) *Soit $f : A \to \mathbb{C}$, avec A une partie de $\mathbb{C}$.*
Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est développable en série entière sur $]-r, r[$ (avec $]-r, r[$ inclus dans A) ou sur $D(0, r)$ (avec $D(0, r)$ inclus dans A), s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R supérieur ou égal à r telle que respectivement :

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ ou } \forall z \in D(0, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Dire que f est DSE au voisinage de 0 signifie qu'il existe $r > 0$ tel que f soit DSE sur $]-r, r[$ ou $D(0, r)$.

Exemple 1.1.5

1. $\exp$ *et* $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ *sont développable en série enitère sur respectivement $\mathbb{C}$ et $D(0, 1)$.*
2. *IMPORTANT. Soit f décomposable en série entière sur $]-R, R|$, avec :*
   $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$*, où $a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$, montrer que $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x^p}$ se prolonge en une fonction décomposable en série entière sur $]-R, R[$.*

   Montrer que $h : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ se prolonge en une fonction décomposable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1.6 *Le premier exemple montre qu'une fonction peut être décomposable en série entière sans l'être forcément sur tout son intervalle de définition.*

1.2 Opérations sur les séries entières et rayon de convergence

1.2.1 Somme de deux séries entières

Proposition 1.2.1 (Somme de deux séries entières) *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b. Alors la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence R tel que*

Lorsque $R_a \neq R_b$, alors $R =$

Si on a z dans $\mathbb{C}$ avec $|z| <$, alors : $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$.

Démonstration :

Exemple 1.2.1 *1. On suppose que la définition que l'on a donnée pour la formule de l'exponentielle coïncide avec l'exponentielle connue. En déduire que les fonctions* cos, sin, ch *et* sh *sont décomposables en séries entières et on déterminera le rayon de convergence de celles-ci.*

De même : $\cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$.

$\mathrm{ch}\,(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \underbrace{(1+(-1)^k)}_{=0 \text{ si } k \text{ impair}} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \times 2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$.

De même : $\mathrm{sh}\,(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$.

Ces séries convergent pour tout x *de* $\mathbb{R}$, *donc le rayon de convergence est* $+\infty$.

Remarque 1.2.1 *Si on pose* $\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, $\mathrm{ch}\,(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$, $\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ *et* $\mathrm{sh}\,(z) == \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ *pour* $z \in \mathbb{C}$, *alors* $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\mathrm{ch}\,(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$, $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ *et* $\mathrm{sh}\,(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$.

2. Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^r$ *de rayon de convergence* $R > 0$. *Sur un ensemble approprié, exprimer* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{pn} z^{pn}$ *en fonction de* f, *avec* p *dans* $\mathbb{N}^*$.

Corollaire 1.2.1 (Somme de deux fonctions DSE) *Si* f *et* g *sont développables en série entière au voisinage de* 0, *alors* $f+g$ *l'est aussi.*

1.2.2 Produit de Cauchy

Proposition 1.2.2 (Produit de Cauchy) *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R_a *et* R_b. *Alors la série entière produit de Cauchy* $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$, *avec :*

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *a un rayon de convergence R tel que :*

De plus : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| <$ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n =$

Démonstration : Pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ convergent absolument, donc la série produit de Cauchy $\sum d_n$ aussi avec $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = c_n z^n$ et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ converge absolument et : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

Exemple 1.2.2 *Soit $(D_n)_n$ une suite vérifiant : $D_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$. On admet que D_n est positif (cela sera prouvé dans le premier cours de probabilité)*

On note $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} z^n$.

1. *Montrer que le rayon de convergence de S vaut au moins 1.*
2. *Montrer que pour z dans $\mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, on a : $S(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$.*

Corollaire 1.2.2 (Produit de deux fonctions DSE) *Si f et g sont développables en série entière au voisinage de 0, alors fg l'est aussi.*

1.2.3 Composition de série entière (hors programme)

Il n'y a pas de théorèmes au programme sur la composition de séries entières. On peut vous demander de traiter des cas particuliers cependant. En général pour s'en sortir, il faut utiliser des familles sommables avec deux indices. Voici un exemple :

Exemple 1.2.3 1. *Montrer que $f : x \mapsto e^{e^x}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.*

2. *Soit* $f : z \mapsto \sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \in \mathbb{R}_+^*$. *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que :* $|z_0| > R$. *Montrer que :* $g : z \mapsto f(z_0 + z)$ *est développable en série entière.*

   Soit $z \in \mathbb{C}$ *tel que l'on ait :* $|z| < R - |z_0|$. *On a :* $|z_0| + |z| < R$, *donc la série* $\sum |a_n|(|z_0| + |z|)^n$ *converge. Par ailleurs, on a :* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|(|z_0| + |z|)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z_0|^{n-k} |z|^k \right) = \sum\limits_{0 \leq k \leq n} |a_n| \binom{n}{k} |z_0|^{n-k} |z|^k \quad (*)$.
   La famille $\left(a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} z^k \right)_{0 \leq k \leq n}$ *est sommable, donc :*
   $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} z^k \right) = \sum\limits_{k=0} \left(\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n z_0^{n-k} \right) z^n$, *ainsi* g *est DSE et son rayon de convergence vaut au moins* $R - |z_0| > 0$.

3. *Soit* $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *On suppose* $f(0) = 1$.
   Par définition du rayon de convergence, pour $\rho \in]0, R[$, *il existe* $M \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que :*
   $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n|\rho^n < M$.

   (a) *On suppose dans cette question qu'il existe* $r \in \mathbb{R}_+^*$, *avec* $r \leq R$ *et une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tels que :*

   $\forall x \in]-r, r[,\ \dfrac{1}{f(x)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. *Trouver une relation entre* (a_n) *et* (u_n).

   (b) *Montrer que* $1/f$ *est développable en série entière au voisinage de* 0. *On pourra conjecturer une inégalité vérifiée par les* u_n.

1.2.4 La série entière $\sum na_n z^n$

Proposition 1.2.3 (La série entière $\sum na_n z^n$) *Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum na_n z^n$ ont le même rayon de convergence.*

Démonstration : Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R' celui de $\sum na_n z^n$. Soit r dans $\mathbb{R}_+$ tel que $r < R'$. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n r^n| = |a_n| r^n \leq n|a_n| r^n = |na_n r^n|$. Comme la suite $(na_n r^n)_n$ est bornée, alors la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée. Ainsi on a : $r \leq R$. Ceci étant valable pour tout r tel que $r < R'$, alors en faisant tendre r vers R', on a : $R' \leq R$.
Soit r dans $\mathbb{R}_+$ tel que $r < R$. Soit $r' = \dfrac{r+R}{2}$. On a alors $0 \leq r < r' < R$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $|na_n r^n| = \left|a_n r'^n n \left(\dfrac{r}{r'}\right)^n\right|$. Nous avons : $n\left(\dfrac{r}{r'}\right)^n = ne^{n \ln\left(\frac{r}{r'}\right)}$. Or comme : $\dfrac{r}{r'} < 1$, alors : $\ln\left(\dfrac{r}{r'}\right) < 0$ et par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} ne^{n\ln\left(\frac{r}{r'}\right)} = 0$ et donc : $na_n r^n = o(a_n r'^n)$. Par comparaison comme la série $\sum a_n r'^n$ converge absolument, alors $\sum na_n r^n$ converge aussi absolument et donc : $r < R'$. En faisant tendre r vers R, on a alors : $R \leq R'$. Ainsi on obtient $R = R'$.

Remarque 1.2.2
1. *Ainsi $\sum a_n z^n$ et $\sum \dfrac{a_n}{n} z^n$ ont aussi le même rayon de convergence, car $n\dfrac{a_n}{n} z^n = a_n z^n$.*
2. *Pour tout p dans $\mathbb{N}$, on prouve par récurrence sur p que $\sum n^p a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.*

Exemple 1.2.4 *Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Quel est le rayon de convergence de $\sum \dfrac{\sin(na)}{n} x^n$.*

1.3 Comment déterminer un rayon de convergence ?

Voici les méthodes par ordre d'importance.

1.3.1 Règle de D'Alembert

En considérant la proposition 1.1.4, on peut utiliser la règle de d'Alembert pour voir quand la série $\sum a_n z^n$ converge absolument. Ceci est assez pratique lorsque dans a_n il y a des produits ou des puissances, qui se simplifient par quotient $\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|}$. Ensuite il faut trouver z tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} > 1$.

Proposition 1.3.1 (Rayon de CV de $\sum n^\alpha z^n$) *Le rayon de convergence de $\sum n^\alpha z^n$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est*

Démonstration : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a $\frac{|(n+1)^\alpha z^{n+1}|}{|n^\alpha z^n|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha |z| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha |z| \underset{n\to+\infty}{\to} |z|$.
Si $|z| < 1$, $\sum n^\alpha z^n$ converge absolument et si $|z| > 1$, elle diverge grossièrement, grâce à la règle de d'Alembert. Ainsi $R = 1$.

Exemple 1.3.1 1. *Donner le rayon de convergence de : $\sum \frac{1}{\binom{2n}{n}} z^{2n+1}$.*

Notons R le rayon de convergence de notre série entière $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a : $\dfrac{\left|\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} z^{2(n+1)+1}\right|}{\left|\frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}\right|} = \frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(2n+2)!(n!)^2} \frac{|z|^{2n+3}}{|z|^{2n+1}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} |z|^2 \underbrace{\to}_{n\to+\infty} \frac{|z|^2}{4}$.

Si $\frac{|z|^2}{4} < 1$, soit $|z| < 2$, alors $\sum \frac{1}{\binom{2n}{n}} z^{2n+1}$ converge absolument et elle diverge grossièrement si $|z| > 2$, grâce à la règle de d'Alembert. Ainsi $R = 2$.

2. *Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On pose $a_n = a^{k^2}$ si $n = \frac{k(k+1)}{2}$ et $a_n = 0$ sinon. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$.*

3. *Donner le rayon de convergence de : $\sum n^n z^n$.*

4. *Soit (a_n) une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}a_{n+1}-1}\right) = \ell \in \mathbb{R}^*$. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$?*

1.3.2 Comparaison avec des séries entières plus simples

Donnons une proposition qui permet de comparer le terme général d'une série entière avec le terme général d'une série entière plus simple.

Proposition 1.3.2 (Comparaison de séries entières) *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques, soit R_a et R_b les rayons de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ respectivement.*

Si $a_n = O_{+\infty}(b_n)$, alors
Si $a_n \sim_{+\infty} b_n$ alors

Démonstration : On suppose que $a_n = O_{+\infty}(b_n)$.

Si : $a_n \sim b_n$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$, alors les suites (a_n/b_n) et (b_n/a_n) sont bornées (car elles convergent) et on a : $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$ et ainsi grâce au premier point $R_a \geq R_b$ et $R_b \geq R_a$.

Remarque 1.3.1 1. *Si $a_n = o_{+\infty}(b_n)$, alors*

2. *On voit que dans $\sum a_n z^n$, plus a_n est petit, plus le rayon de convergence peut être grand.*

Exemple 1.3.2 *Quel est le rayon de convergence de :*

1. *$\sum P(n)z^n$ avec $P = \sum\limits_{k=0}^{q} a_k X^k$ un polynôme de degré q.*

2. *$\sum a_n z^n$, avec $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.*

3. $\sum a_n z^n$, *avec* $a_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+t} dt$. *On donnera d'abord un équivalent de* a_n.

4. *Quel est le rayon de convergence R de* $\sum \frac{x^n}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$ *?*

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$.

Comme $\sqrt{3}$ *est irrationnel, alors :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sin(n\pi\sqrt{3}) \neq 0$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\sin(n\pi\sqrt{3})| \leq 1$, *puis :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \geq 1$. *Comme* $\sum 1.x^n$ *a un rayon de convergence qui vaut* 1, *alors* $R \leq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit* $p_n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $p_n - \frac{1}{2} \leq n\sqrt{3} \leq p_n + \frac{1}{2}$. *On prend par exemple* $p_n = \left\lfloor n\sqrt{3} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

On a donc $|n\pi\sqrt{3} - p_n\pi| \leq \frac{\pi}{2}$. *Or on a :* $\forall x \in [0, \pi/2],\ \sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$.

On a donc $|\sin(n\pi\sqrt{3})| = |\sin(n\pi\sqrt{3} - p_n\pi)| = \sin|n\pi\sqrt{3} - p_n\pi| \geq \frac{2}{\pi}|n\pi\sqrt{3} - p_n\pi| = 2|n\sqrt{3} - p_n|$.

On a donc $|a_n| \leq \frac{1}{2|n\sqrt{3} - p_n}| = \frac{n\sqrt{3} + p_n}{2|3n^2 - p_n^2|}$. *Comme* $|3n^2 - p_n^2|$ *est un entier non nul (sinon* $\sqrt{3} = p_n/n \in \mathbb{Q}$*), alors* $|3n^2 - p_n^2| \geq 1$. *On a donc* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leq \frac{1}{2}(n\sqrt{3} + p_n) \leq n\sqrt{3} + \frac{1}{4}$. *Ainsi* $a_n = O(n)$. *Or la série entière* $\sum nz^n$ *a un rayon de convergence qui vaut* 1, *donc :* $R \geq 1$. *Aini* $R = 1$.

1.3.3 Utilisation d'inégalités grâce à la définition et aux propriétés de base

Utiliser les propositions 1.1.2, 1.1.4 et 1.3.2 afin d'obtenir deux inégalités pour les rayons de convergenece.

Exemple 1.3.3 *Déterminer le rayon de convergence R de* $\sum a_n z^n$, *avec* a_n *la* n*-ème décimale de* $\sqrt{2}$.

2 Régularité de la somme et limites aux bords

Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\overline{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq R\}$ (appelé disque fermé).

2.1 Convergence normale

Proposition 2.1.1 (Convergence normale) *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence R. Soit* $\rho \in [0, R[$. *La série de fonctions* $z \mapsto \sum a_n z^n$ *converge normalement sur* $\overline{D}(0, \rho)$.

Démonstration :

Remarque 2.1.1 *1. Pour tout $(a,b) \in]-R,R[^2$ tels que $a<b$, la série entière $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur $[a,b]$. On a donc la convergence uniforme sur $[a,b]$.*

2. ATTENTION, ceci n'est valable que sur tout disque fermé inclus dans le disque <u>ouvert</u> $D(0,R)$ ou tout segment $[a,b]$ inclus dans l'intervalle <u>ouvert</u> $]-R,R[$.
Trouver un exemple de série entière qui n'est pas normalement convergente sur $]-R,R[$, avec $R \in \mathbb{R}_+^*$ son rayon de convergence.

Exemple 2.1.1 *1. **(Formule de Cauchy)** On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R>0$. Pour z dans $\mathbb{C}$, avec $|z|<R$, on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.*
Soit r tel que : $0<r<R$. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_p r^p = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ip\theta}d\theta$.

2. <u>Applications :</u>

(a) On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$ et $R=+\infty$. Montrer que f est constante.

*(b) **(Formule de Parceval)** Pour $0<r<R$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_p|^2 r^{2p} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$.*

(c) Soit $(z,r) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^*$, avec $r \neq |z|$. Calculer $I(r,z) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z-re^{it}}dt$.

(a)

i.

ii. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a grâce à ce qui précède $|a_p|r^{2p} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ip\theta}\overline{a_p}r^p d\theta$. Nous alors sommer ces intégrales.
Soit $p \in \mathbb{N}$ et on pose $v_p : \theta \mapsto \dfrac{f(re^{i\theta})e^{-ip\theta}\overline{a_p}r^p}{2\pi}$ définie sur $[0,2\pi]$.
Les fonctions v_p sont continues.
On note $M = \max\limits_{\theta\in[0,2\pi]} |f(re^{i\theta})|$ (qui existe car on a une fonction continue sur le compact $[0,2\pi]$. On a : $\|v_p\|_\infty = \dfrac{M|a_p r^p}{2\pi}$ et on a convergence normale. On peut primitiver terme à terme et donc $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} |a_p|^2 r^{2p} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} f(re^{i\theta})e^{-ip\theta}\overline{a_p}r^p\right)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{\left(\sum_{p=0}^{+\infty} e^{ip\theta}a_p r^p\right)}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta$.

iii.

2.2 Continuité

Proposition 2.2.1 (Continuité sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière et* R *le rayon de convergence de la série entière. Alors :*

1. $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est continue sur* $D(0, R)$.
2. $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est continue sur* $]-R, R[$.

Démonstration : Montrons le premier point.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $u_n : z \mapsto a_n z^n$. Soit $z_0 \in D(0, R)$. On pose $r = \dfrac{R + |z_0|}{2}$ si R est fini et $r = |z_0| + 1$ sinon. On a : $|z_0| < r < R$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n est continue sur $D(0, r)$. Comme $r < R$, on a la convergence normale de $\sum u_n$ sur $\overline{D}(0, r)$, donc sur $D(0, r)$. Ainsi $\sum u_n$ est continue sur $D(0, r)$, donc sur un voisinage de z_0. Cela étant vrai pour tout z_0 de $D(0, R)$, on a la continuité sur $D(0, R)$.

Remarque 2.2.1

1. *Si* $\sum a_n R^n$ *converge absolument, alors* $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est continue sur* $[-R, R]$.
   On note $f_n : x \mapsto a_n x^n$ *définie sur* $[-R, R]$. *Les fonctions* f_n *sont continues sur* $[-R, R]$ *et on a :* $\|f_n\|_\infty = |a_n| R^n$, *donc on a convergence normale de* $\sum f_n$ *sur* $[-R, R]$.
2. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *Si* $a_0 = a_1 = ... = a_{p-1} = 0$, *alors* $g : x \mapsto \dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{x^p}$ *qui est continue sur* $]-R, R[\setminus\{0\}$ *se prolonge en une fonction continue sur* $]-R, R[$ *en posant* $g(0) =$
3. *Soit* $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une fonction décomposable en série entière sur* $]-R, R[$. *Le développement limité de* f *à l'ordre* p *au voisinage de* 0 *est donné par :*

Le DSE d'une fonction f sur $]-R,R[$ s'apparente à un DL « d'ordre infini » en 0 (les coefficients sont les mêmes par unicité du DL) mais il y a une différence notable : un DL en 0 n'a qu'un caractère local (approximation de f quand x tend vers 0), alors que le DSE possède un caractère global (il donne une représentation exacte de f sur tout $]-R,R[$).

Exemple 2.2.1 1. *Soit* $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$. *On admet que le rayon de convergence vaut 1. Déterminer :* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1-x)f(x)$.

2. *Soit $(a_n)_{n\geq 2}$ une suite réelle telle que la série entière associée ait un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.*

   On suppose que $f : z \mapsto z + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ *est injective sur* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.

   (a) *Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z)$ est réel si et seulement si z est réel.*

   (b) *Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $Im(f(z)) > 0$ si $Im(z) > 0$.*

   (a) *Soit $z \in \mathbb{D}$. Bien entendu, si z est réel, $f(z)$ aussi car les coefficients a_n sont tous réels. Supposons inversement que $f(z) \in \mathbb{R}$. On a donc $\overline{f(z)} = f(z)$. Or, $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$. L'injectivité de f permet de conclure que $z = \bar{z}$ c'est-à-dire que $z \in \mathbb{R}$.*

   (b) *Notons alors $\mathbb{D}^+$ l'ensemble des éléments z de $\mathbb{D}$ tels que $Im(z) > 0$. La fonction $z \mapsto Imf(z)$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{D}^+$ d'après ce qu'on vient de voir. Comme D^+ est un ensemble connexe par arc, cette fonction garde donc un signe constant. Il ne reste plus qu'à déterminer ce signe. Pour cela, on prend des valeurs proches de 0 . On a pour $t > 0$ et petit : $\dfrac{f(it)}{it} = 1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n (it)^{n-1}$. Par continuité de $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n (it)^{n-1}$ en 0, on a $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{f(it)}{it} = 1$, puis $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{Im(f(it))}{t} = \lim_{t\to 0^+} Re\left(\frac{f(it)}{it}\right) = 1$ et on a donc : $Im(f(it)) > 0$ pour t assez petit. Par conséquent, $Im(f(z)) > 0$ pour tout z de $\mathbb{D}^+$.*

Proposition 2.2.2 (Identification des coefficients) *Soient* $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *et* $T(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ *deux séries entières. Soit r inférieur aux rayons de convergence de S et T et tel que :*
$\forall x \in]0,r[, S(x) = T(x)$. *Alors :* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.

Démonstration : Soit $p \in \mathbb{N}$. Grâce à la remarque précédente, sur un voisinage de 0 par valeurs supérieures, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} a_n x^n + o(x^p) = \sum_{n=0}^{p} b_n x^n + o(x^p)$. Par unicité du développement limité, on a : $a_p = b_p$.

Corollaire 2.2.1 (Unicité du DSE) *Toute fonction décomposable en série entière admet une unique décomposition.*

Exemple 2.2.2 *Soit (D_n) une suite telle que $D_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$. Déterminer la suite (D_n).*

Remarque 2.2.2 *IMPORTANTE : Le DSE d'une fonction paire (resp. impaire) est constitué de puissances paires (resp. impaires). En effet si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$, alors si f est paire (resp. impaire), alors : $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = f(-x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k x^k$ (resp.$f(x) = -f(-x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k x^k$) et donc par unicité du DSE, on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = (-1)^k a_k$ (resp.$a_k = (-1)^{k+1} a_k$) et donc $a_k = 0$ si k est impair (resp. pair).*

2.3 Étude au bord

Nous pouvons étudier le prolongement par continuité d'une série entière au bord de l'intervalle de convergence, grâce au théorème suivant.

Théorème 2.3.1 (Théorème d'Abel radial) *Si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R dans $\mathbb{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors*

Démonstration : (HORS PROGRAMME) En posant $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, quitte à considérer

$x \mapsto f(Rx) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n x^n$ au lieu de f, on peut supposer que $R = 1$.

On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, pour $n \in \mathbb{N}$, qui existe en tant que reste d'une série convergente.

Remarque 2.3.1 *Ainsi nous avons un critère pour prolonger par continuité une série entière sur* $]-R, R]$.

Exemple 2.3.1

1. *Soit* $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$. *Montrer que* S *est continue sur* $]-1, 1]$.

   S est DSE sur $]-1,1[$, donc elle est continue sur $]-1,1[$.

   Étudions la continuité en 1. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge grâce au TSSA, donc grâce au théorème d'Abel radial, on a : $\lim_{x\to 1^-} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 1^n}{n} = S(1)$. Ainsi S est aussi continue en 1.

2. *Soient* $(a_n)_n$ *et* $(b_n)_n$ *deux suites de réels positifs. Les séries entières* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$, *ont un rayon de convergence qui vaut 1 et on note* f *et* g *leurs sommes respectives lorsqu'elles existent. On suppose enfin qu'il existe* $\ell \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$.

   On suppose que la série $\sum_n b_n$ *est divergente.*

   (a) *Montrer que* $g(x) \to +\infty$ *lorsque* $x \to 1$.

   (b) *Montrer que* $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

   (c) *On suppose que* (a_n) *est de signe quelconque, que* $\lim_{x\to 1^-} f(x) = k \in \mathbb{R}$ *et que* $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

   Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = k$.

   (a) *Comme les b_n sont positifs, alors $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est croissante sur $[0,1[$ et donc $\lim_{1^-} g$ existe et vaut $L \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.*

   On suppose L réel.

   Soit $N \in \mathbb{N}$, alors par croissance de g, on a : $\forall x \in]0,1[,\ L \geq g(x)$ et $g(x) \geq \sum_{n=0}^{N} b_n x^n$.

   Ainsi on obtient : $\forall x \in]0,1[,\ L \geq \sum_{n=0}^{N} b_n x^n$. Quand x tend vers 1, on obtient : $L \geq \sum_{n=0}^{N} b_n$. Ceci étant valable pour tout N de $\mathbb{N}$, ceci contredit la divergence de la série à termes positifs $\sum b_n$. Ainsi $L = +\infty$.

   (b)

(c)

3. Donner un équivalent quand x tend vers 1 par valeurs inférieures de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

2.4 Dérivation et applications

2.4.1 Dérivation d'une série entière

Proposition 2.4.1 (Dérivation) *Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière et R le rayon de convergence de la série entière. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$, et on a :*

$$\forall x \in]-R,R[,\ f'(x) =$$

De plus f et f' ont le même rayon de convergence.

Démonstration : On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R,R[,\ f_n(x) = a_n x^n$. Soit $r \in [0,R[$.
• Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-r,r]$.
• $\sum f_n$ converge simplement sur $[-r,r]$.
• $\sum_{n\geq 1} n a_n x^n$ a le même rayon de convergence que f (proposition 1.2.3) et donc celui de $\sum_{n\geq 1} f_n'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ est R (remarque 1.1.2). Ainsi la série entière $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-r,r]$ (on rappelle que $\|f_n'\|_{\infty,[-r,r]} = n|a_n|r^{n-1}$).
On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-r,r]$ pour tout $r \in [0,R[$ et donc sur $]-R,R[$ et :
$\forall x \in]-R,R[,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, car $f_0' = 0$.

Exemple 2.4.1 1. *On rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}\,(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.*
Montrer à l'aide de ceci que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}\,'(x) = \mathrm{ch}\,(x)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. On veut montrer que la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est décomposable en série entière sur $]-1,1[$.

1. *Montrer que cette fonction est solution de l'équation différentielle d'ordre un.*
2. *Chercher toutes les solutions développables en série entière de l'équation différentielle précédente.*
3. *Quelle sont les solutions précédentes h telles que $h(0) = 1$?*
4. *Donner le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.*

2.4.2 Application : primitivation des séries entières

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout x de $]-R, R[$, comme on a convergence normale et donc uniforme de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur le segment $[0, x]$ (si $x > 0$) ou $[x, 0]$ (si $x < 0$), car il est inclus dans $D(0, R)$, et que chaque terme de la série est continu sur $[0, x]$ ou $[x, 0]$, alors on peut primitiver terme à terme :

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

Exemple 2.4.2 *Montrer que les fonctions suivantes sont décomposables en série entière dont on déterminera le rayon de convergence.*

1. $g(x) = \operatorname{Arctan}(x)$:

2. $f(x)=\ln(1+x)$ *:*

On a : $\forall x\in]-1,1[,\ f'(x)=\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n$. *Or* $\sum(-1)^nx^n$ *converge si et seulement si* $|x|<1$*, donc le rayon de convergence de* f' *vaut* 1. *Soit* $x\in]-1,1[$. *Comme* $[0,x]$ *(si* $x>0$*) ou* $[x,0]$ *(si* $x<0$*) sont inclus dans* $]-1,1[$*, on a donc convergence normale et donc uniforme de* $t\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nt^n$ *sur* $[0,x]$ *ou* $[x,0]$. *De plus pour tout* n *de* $\mathbb{N}$*, la fonction* $t\mapsto(-1)^nt^n$ *est continue sur* $[0,x]$ *ou* $[x,0]$. *On peut donc primitiver terme à terme :* $f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-1)^nt^ndt=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$. *Ainsi* f *est décomposable en série entière sur* $]-1,1[$ *et le rayon de convergence de* f *vaut* 1*, car* f *et* f' *ont le même rayon de convergence.*

En déduire que : $\ln(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ *(attention, on réfléchira avant de dire des bêtises...).*

2.4.3 Dérivées d'ordre supérieur

Proposition 2.4.2 (Dérivées supérieures d'une série entière) *Soit* f *la somme de la série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nx^n$*, de rayon de convergence* $R>0$. f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R,R[$ *et, pour tout* $k\in\mathbb{N}$*, on a* $\forall x\in]-R,R[,\ f^{(k)}(x)=$

et f *et* $f^{(k)}$ *ont le même rayon de convergence* R.

Démonstration : On montre par récurrence sur k que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]-R,R[$ et que sa dérivée k-ème est donnée par la formule ci-dessus et que son rayon de convergence vaut R.
Pour $k=0$, c'est la continuité d'une série entière.
Soit $k\in\mathbb{N}$ et on suppose la propriété vraie pour ce k. Ainsi :
$\forall x\in]-R,R[,\quad f^{(k)}(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}(m+k)(m+k-1)\dots(m+1)a_{m+k}x^m$ et le rayon de convergence de cette série entière vaut R.
Grâce au théorème de dérivation d'une série entière, $f^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$, sa dérivée a le même rayon de convergence et :
$\forall x\in]-R,R[,\ f^{(k+1)}(x)=\sum_{m=1}^{+\infty}(m+k)(m+k-1)\dots(m+1)a_{m+k}x^{m-1}=$
$\sum_{m=0}^{+\infty}(m+1+k)(m+k)\dots(m+1)a_{m+1+k}x^m$. D'où la proposition pour $k+1$.

Corollaire 2.4.1 (Une fonction DSE est $\mathcal{C}^\infty$) *Toute fonction développable en série entière sur* $]-R,R[$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur cet intervalle et ses dérivées successives sont aussi DSE sur* $]-R,R[$.

Exemple 2.4.3

1. *IMPORTANT Monter que* $h : x \mapsto \dfrac{e^x-1}{x}$ *se prolonge en une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$, *puis montrer que* $g : x \mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$ *l'est aussi.*

2. *Montrer que* $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^{p+1}}$, *avec* p *dans* $\mathbb{N}$, *est décomposable en série entière sur* $]-1,1[$ *et donner son développement.*

Remarque 2.4.1 *Dans l'exemple précédent, pour montrer que* $x \mapsto \dfrac{e^x-1}{x}$ *est continue en* 0, *cela se fait bien directement, mais les choses se compliquent ensuite pour les dérivées successives, car l'expression de* $f^{(n)}$ *est compliquée. La décomposition en série entière se révèle ici très efficace.*

2.5 Série de Taylor d'une fonction développable en série entière

Proposition 2.5.1 (Expression du DSE) *Soit* f *une fonction admettant une décomposition en série entière sur* $]-R,R[$ *sous la forme* $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$. *Alors* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R,R[$ *et, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a* $a_k =$

Ainsi : $\forall x \in]-R,R[,\ f(x) =$

Démonstration : Grâce au corollaire 2.4.2, on a :
$\forall x \in]-R,R[,\ f^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+k)(m+k-1)...(m+1)a_{m+k}x^m$. Ainsi grâce au terme en $m=0$, on a : $f^{(k)}(0) = k(k-1)... \times 1 a_k = k! a_k$, puis : $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Définition 2.5.1 *Soit* $f : I \to \mathbb{C}$ *une fonction développable en série entière au voisinage de* 0. *La série entière* $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ *est appelée série de Taylor de* f *en* 0.

Remarque 2.5.1

1. *Cette dernière proposition nous permet de retrouver l'unicité de la décomposition en série entière car il n'y a qu'une formule possible pour les* a_k.

2. *ATTENTION ! Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et même si sa série de Taylor a un rayon de convergence strictement positif, il est possible que f ne soit pas DSE (c'est-à-dire que f ne soit pas égale à la somme de sa série de Taylor).*
   Cela veut donc dire qu'être DSE est plus plus fort qu'être de classe $\mathcal{C}^\infty$.

   Donnons un contrexemple. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$. Dans le chapitre 5, nous avons vu que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$. f est-elle décomposable en série entière sur $\mathbb{R}$?

Remarque 2.5.2 *Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$. Soit $x \in]-r,r[$. La formule de Taylor Lagrange avec reste intégrale en 0 de f à l'ordre n s'écrit :*

Ainsi f est développable en série entière sur $]-r,r[$ si et seulement si

On passera souvent par l'utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange :

Exemple 2.5.1

1. *Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f : t \mapsto e^{tz}$. À l'aide de cette fonction, retrouver le développement en série entière de* exp.

   La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall k \in \mathbb{N} \forall t \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(t) = z^k e^{tz}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\forall t \in [0,1],\ |f^{(n+1)}(t)| = |z|^{n+1}|e^{tRe(z)+itIm(z)}| = |z|^{n+1}e^{tRe(z)} \leq |z|^{n+1}e^{Re(|z|)}$.

   Grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a :
   $$\left|e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| = \left|f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k\right| \leq |z|^{n+1}e^{Re(|z|)}\frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}e^{Re(|z|)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0, \text{ car la série } \sum_{n\geq 0} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ converge}$$

2. *Soient $a \in]0,1[$. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.*

3 Développement en série entière : méthodes

3.1 Développements usuels en série entière

Résumons les developpements en série entière à connaître et que l'on a démontré précédemment. Soient $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{llllll}
e^z & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} & , R = +\infty & \dfrac{1}{1-z} & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n & , R = 1 \\
\sin(x) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & , R = +\infty & \ln(1+x) & = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} & , R = 1 \\
\cos(x) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & , R = +\infty & -\ln(1-x) & = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} & , R = 1 \\
\mathrm{sh}\,(x) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & , R = +\infty & (1+x)^\alpha & = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n & , R = 1 \\
\mathrm{ch}\,(x) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} & , R = +\infty & \mathrm{Arctan}\,(x) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & , R = 1
\end{array}$$

Exemple 3.1.1 *Montrer que :* $\forall t \in \mathbb{R}, \ \mathrm{ch}\,(t) \leq e^{t^2/2}$.

3.2 Comment développer une fonction en série entière ?

3.2.1 Changement de variables

Reconnaître un DSE classique à l'aide d'un changement de variable.

Exemple 3.2.1 *Développer* $x \mapsto a^x$*, avec* $a > 0$ *en déterminant le domaine de validité.*

3.2.2 Opérations

On peut utiliser les opérations de somme et produit de séries entières. Voici deux exemples pour la somme et pour le produit on regardera les exemples 1.2.2 et 2.2.2 qui utilisent le produit de Cauchy.

Exemple 3.2.2 1. *Développement en série entière au voisinage de* 0*, en précisant le rayon de convergence, de :* $x \mapsto \sin^2(x)\cos(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. *On a :* $\sin^2(x)\cos(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} + e^{-ix})}{-8} = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})(e^{2ix} - e^{-2ix})}{-8} = \frac{(e^{3ix} - e^{-ix} - e^{ix} + e^{-3ix})}{-8} = -\frac{1}{4}\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + \frac{1}{4}\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{4}(\cos(x) - \cos(3x)) = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n}}{(2n)!}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{[1 - 9^n]}{(2n)!} x^{2n}$ *et le rayon de convergence vaut* $+\infty$.

2. *Développement en série entière au voisinage de* 0*, en précisant le rayon de convergence, de :* $g : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} - x^2\right)$.

3. *Soit* $f : x \mapsto \sqrt{1 + x + x^2}$*. Montrer que* f *est développable en série entière au voisinage de* 0*.*

3.2.3 Dérivations et intégrations

Pour la dérivation, reprendre l'exemple 2.4.3 avec $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^p}$.

Pour l'intégration :

Exemple 3.2.3 1. *Montrer que* Arcsin *est développable en série entière au voisinage de* 0 *et déterminer son développement en précisant le rayon de convergence.*

2. *Montrer que* $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(1+x)$ *est développable en série entière sur un intervalle à préciser.*

3.2.4 Équations différentielles

L'idée est de chercher une équation différentielle vérifiée par notre fonction et d'injecter $\sum a_n x^n$ dans notre équation en utilisant les formules de dérivation d'une série entière.

Exemple 3.2.4 *Soit* $f : x \mapsto e^{x^2/2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

1. *Montrer que* f *est solution d'une équation différentielle à déterminer.*
2. *Justifier que* f *est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$ *et donner ce développement.*

3.2.5 Utilisation des formules de Taylor

On utilise plus rarement cette méthode. Voir la méthode de la décomposition en série entière de la fonction exp.

Exemple 3.2.5 *Soit* $a \in]-1,1[$. *On pose :* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$.

1. *Montrer que* f *est définie sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et que pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a :* $|f^{(k)}(x)| \leq \dfrac{1}{1-|a|}$.
3. *En déduire que* f *est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$ *en utilisant une formule de Taylor.*

Remarque 3.2.1 *Un argument de sommabilité comme dans l'exemple 1.2.3 était valable.*

3.2.6 Par intégration terme à terme d'une fonction définie par une intégrale

On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}$.

On rappelle que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)dx = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de F ?
2. Développer F en série entière au voisinage de 0.
3. Trouver un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

1. Pour que la racine carrée ait un sens pour tout $t \in]0,1[$, on doit avoir x dans $[-1,1]$.
   Soit $x \in]-1,1[$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}$ est continue sur $[0,1[$ et $\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t)(1-x^2t^2)}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(1-x^2)}}\frac{1}{\sqrt{(1-t)}}$.
   Or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1-t)}}$ est intégrable sur $[0,1[$, donc par comparaison de fonctions positives, $F(x)$ existe.
   Soit $x \in \{-1,1\}$. On a : $\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-t^2)}} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2(1-t)}$. Or $t \mapsto \frac{1}{(1-t)}$ n'est pas intégrable sur $[0,1[$, donc par comparaison de fonctions positives, $F(x)$ n'est pas défini.
   On a $D_F =]-1,1[$.
2. Soit $x \in]-1,1[$. On va faire apparaître I_n.
   On pose le changement de variable $t = \cos(y)$ et donc $dt = -\sin(y)dy$, ainsi :
   $F(x) = \int_{\pi/2}^0 \frac{-\sin(y)dy}{\sqrt{(1-\cos^2(y))(1-x^2\cos^2(y))}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(y)dy}{\sqrt{\sin^2(y)}\sqrt{1-x^2\cos^2(y)}} =$
   $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(y)dy}{|\sin(y)|\sqrt{1-x^2\cos^2(y)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{1-x^2\cos^2(y)}}$, car sin est positive sur $[0,\pi/2]$.
   Soit $x \in]-1,1[$. Grâce à l'exemple 3.2.3, on a : $\forall y \in [0,\pi/2]$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2\cos^2(y)}} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^{2n}\cos^{2n}(y)$, cette décomposition étant possible, car $|x^2\cos^2(y)| \leq x^2 < 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : y \mapsto I_n x^{2n}\cos^{2n}(y)$ définie sur $[0,\pi/2]$. Nous allons intégrer terme à terme $\sum u_n$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction u_n est continue par morceaux et intégrable sur $[0,\pi/2]$ (fonction continue sur un segment).
   - La série de fonction $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $[0,\pi/2]$ vers la fonction $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2\cos^2(y)}}$ qui est continue par morceaux.

   Grâce au théorème d'intégration terme à terme pour des fonctions positives, on a dans $\mathbb{R}_+ \cup +\infty$:
   $$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} u_n(y)dy = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^{2n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(y)dy = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} I_n^2 x^{2n}.$$
   Cette dernière somme converge bien pour x dans $]-1,1[$, car $F(x)$ est bien définie grâce à la question précédente.
3. Grâce à l'exemple 2.3.1 et le résultat rappelé sur I_n, on a : $F(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi}{4n} x^{2n}$.
   On a : $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{4n}x^{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n} = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) = -\frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{1}{2}\ln(1-x)$, puis $F(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{1}{2}\ln(1-x)$.

3.3 Comment reconnaître un développement en série entière ?

3.3.1 Par reconnaissance directe

Exemple 3.3.1 *On considère la série entière* $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, *avec* $a_n = \displaystyle\frac{1}{n!}\int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1}(t-k)dt$ *et* $a_0 = 1$.

1. *Montrer que le rayon de convergence R vaut 1.*
2. *Calculer $S(x)$, pour $|x| < 1$.*

1. *On a :* $|a_n| = \frac{1}{n!}\int_0^1 t\prod_{k=1}^{n-1}(k-t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 \prod_{k=1}^{n-1} k\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}$. *donc* $R \geq 1$, *car le RCV de* $\sum \frac{x^n}{n}$ *vaut 1 (c'est le même que celui de* $\sum x^n$*).*
   Par ailleurs on a : $|a_n| \geq \frac{1}{n!}\int_0^1 t(1-t) \times \prod_{k=2}^{n-1}(k-1)\mathrm{d}t = \frac{1}{6n(n-1)}$ *et grâce à la règle de d'Alembert le rayon de convergence de* $\sum \frac{x^n}{6n(n-1)}$ *vaut 1, donc* $R \leq 1$, *puis* $R = 1$.
2.

3.3.2 Changement de variables

Reconnaître un DSE classique à l'aide d'un changement de variable.

Exemple 3.3.2 *1. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, déterminer* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

2. (a) Déterminer le rayon de convergence de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$, *puis exprimer* $S(x)$.

(b) Soit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \operatorname{ch}(\sqrt{x}) & \text{si} \quad x > 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$. *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

3.3.3 Opérations

Exemple 3.3.3 *Rayon de convergence des séries entières suivantes et expression de la somme sur $\mathbb{R}$.*

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$

2. *$\sum n^{(-1)^n} x^n$.*

3.3.4 Dérivations et intégrations

Exemple 3.3.4 (Pour la dérivation :) 1. *Donner le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^{2n+1}$.*

Soit R le rayon de convergence de cette série. Pour $x \in]-R, R[$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}(n+1)(x^2)^n$. Or la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(-1)^{n+1} y^n$ a un rayon de convergence qui vaut 1.

On a : $\forall t \in]-1,1[$, $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$. En dérivant terme à terme ce DSE (on est dans l'intervalle de convergence) : $\forall t \in]-1,1[$, $\frac{-1}{(t+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(-1)^{n+1} t^n$, puis : $\forall t \in]-1,1[$, $\frac{1}{(t+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(-1)^n t^n$.

On doit avoir x^2 dans l'intervalle de convergence de cette série entière, soit $|x^2| < 1$, soit $x \in]-1,1[$ et : $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}(n+1)(x^2)^n = \frac{-1}{(1+x^2)^2}$. Ainsi : $\forall x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^{2n+1} = \frac{-x}{(1+x^2)^2}$ et le rayon de convergence vaut 1.

2. *Déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}$.*

On considère la série entière $\sum n^3 x^n$, qui a le même rayon de convergence que $\sum x^n$ à savoir 1. Nous voulons évaluer la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 x^n$ pour $x = 1/3$.

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. En dérivant (ce qui est possible dans l'intervalle de convergence d'une série entière), on obtient : $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} =$

$\dfrac{1}{(1-x)^2}$, *puis* $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

En dérivant de nouveau, on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1} = \dfrac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4} = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$, *puis :*

$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$.

En dérivant une dernière fois, on a :

$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3x^{n-1} = \dfrac{(1+2x)(1-x)^3+3(x+x^2)(1-x)^2}{(1-x)^6} = \dfrac{(1+2x)(1-x)+3(x+x^2)}{(1-x)^4} = \dfrac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}$, *puis :* $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3x^n = \dfrac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$.

On trouve : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^3}{3^n} = \dfrac{1/3+4/9+1/27}{(2/3)^4} = \dfrac{33}{8}$.

Exemple 3.3.5 (Pour l'intégration :) *Calculer* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$ *pour* x *dans un intervalle à préciser.*

3.3.5 En passant par une équation différentielle

Exemple 3.3.6 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\dbinom{2n}{n}$ et, lorsque c'est possible, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.*

1. *Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.*
2. *Déterminer une relation entre a_{n+1} et a_n.*
3. *Calculer f sur son intervalle ouvert de convergence.*

1. *Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :* $\dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \dfrac{2n-1}{2n+1}\dfrac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{2n-1}{2n+1}\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x| = \dfrac{2(2n-1)}{n+1}|x| \underset{n\to+\infty}{\to} 4|x|$.
   Si $|x| < 1/4$, la série converge absolument et si $|x| > 1/4$, elle diverge grossièrement. Donc $R = 1/4$.
2. *Grâce au calcul précédent : $(n+1)a_{n+1} = -(4n-2)a_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.*
3. *Soit $x \in]-1/4, 1/4[$. Par dérivation terme à terme d'une série entière sur son intervalle de convergence, on a :*
   $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = a_1 - \sum_{n=1}^{+\infty}(4n-2)a_n x^n = -2 - 4x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = -2 - 4xf'(x) + 2f(x)$.
   On doit donc résoudre l'équation différentielle $f'(x) - \dfrac{2}{1+4x}f(x) = -\dfrac{2}{1+4x}$. La fonction $x \mapsto 1$ est une solution particulière.
   Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{2}{1+4x}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln|1+4x| = -\ln\sqrt{1+4x}$, donc les solutions homogènes sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{\ln\sqrt{1+4x}} = \lambda\sqrt{1+4x}$.
   On a donc : $f(x) = 1 + \lambda\sqrt{1+4x}$. Puisque $f(0) = 0$, alors :
   $\forall x \in]-1/4, 1/4[,\ f(x) = 1 - \sqrt{1+4x}$.