1 Ensembles finis et dénombrables

1.1 Rappels de sup sur les ensembles finis

Définition 1.1.1 (Ensembles finis et cardinal) *Soit E un ensemble non vide. E est dit **fini**, s'il existe un entier naturel n tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$. On dit que n est le **cardinal** de E et on note $n = card(E)$ ou $n = |E|$ ou $n = \#E$.*
Si E est vide, on convient que E est fini et dans ce cas le cardinal de E est zéro.
Si E n'est pas fini, on dit que E est infini.

Proposition 1.1.1 (Applications et cardinal) *Soit E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application. Alors on a*

1. *Si f est une injection de E dans F alors $card(E) \leq card(F)$.*
2. *Si f est une surjection de E dans F alors $card(E) \geq card(F)$.*
3. *Si f est une bijection de E dans F alors $card(E) = card(F)$.*
4. *Si $card(E) = card(F)$, alors toute injection de E dans F est bijective.*
5. *Si $card(E) = card(F)$, alors toute surjection de E dans F est bijective.*

Remarque 1.1.1 *Par contraposée, si $card(E) > card(F)$, alors f n'est pas injective. Dans ce cas, il existe x_1 et x_2 dans E avec $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$. C'est le **principe des tiroirs**.*

Proposition 1.1.2 (Inclusion d'ensemble et cardinal) *Toute partie A d'un ensemble fini E est finie et on a $card(A) \leq card(E)$.*
De plus on a $A = E$ si et seulement si $card(A) = card(E)$

Proposition 1.1.3 (Opérations sur les ensembles finis) *E et F désignent des ensembles finis.*

1. *Si A est inclus dans E, alors : $card(\overline{A}) = card(E) - card(A)$, avec $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.*
2. *$card(E \cup F) = card(E) + card(F) - card(E \cap F)$;*
3. *$card(E \cup F) = card(E) + card(F)$ si E et F sont disjoints ;*
4. *$card(E \times F) = card(E) \times card(F)$;*
5. *$card(\mathcal{F}(E, F)) = card(F)^{card(E)}$, où $\mathcal{F}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications allant de E dans F.*
6. *$card(\mathcal{P}(E)) = 2^{card(E)}$, où $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E.*

Remarque 1.1.2

1. *Plus généralement, soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille d'ensembles finis deux à deux disjoints*
   ($i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$). Alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} E_i$ est fini et on a : $\displaystyle card\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} card(E_i)$.
2. *Plus généralement, si $F_1, ..., F_p$ sont des ensembles finis, alors :*
   $card(F_1 \times ... \times F_p) = card(F_1) \times ... \times card(F_p)$. Par exemple $card(E^p) = (card(E))^p$.

Exemple 1.1.1 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et S_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont toutes les racines complexes ont un module majoré par 1.*
Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in S_n$.
On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines de P éventuellement confondues.

1. *Montrer que :* $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ |a_k| \leqslant \binom{n}{k}$.

   Que peut-on dire de S_n *?*

2. *On rappelle que* P *est le polynôme caractéristique de la matrice* $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

   Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \exists Q_p \in S_n, \forall i \in [\![1, n]\!],\ Q_p(z_i^p) = 0$.

3. *Conclure que les racines non nulles de* P *sont de module* 1.

1.2 Rappels de sup sur le dénombrement

E désignera un ensemble fini de cardinal n. On pose $E = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$.

Remarque 1.2.1 *IMPORTANT : en dénombrement, les disjonctions de cas se traduisent par des sommes et les successions par des produits.*

1.2.1 Parties d'un ensemble

Nous rappelons que l'ensemble de toutes les parties de E est de cardinal 2^n.

Interprétation : Une urne contient n objets. On effectue un tirage d'un nombre indéterminé de ces objets (un tirage peut comporter aucun objet mais aussi tous les objets). Le nombre de tirages possibles est 2^n, c'est le nombre de parties de l'ensemble des n objets.

1.2.2 p-listes

Définition 1.2.1 (p-listes) *Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **p-liste de** E tout p-uplet $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de E^p.*

Interprétation :

- Une p-liste de E peut être vue comme une application de $[\![1, p]\!]$ dans E. En effet celle-ci est donnée par l'application $i \mapsto x_i$. Ainsi le nombre de p-listes de E est le nombre d'applications d'un ensemble de cardinal p dans E.
- Le nombre de p-liste de E est le nombre de possibilités de tirages successifs avec remise (l'ordre est important) de p objets de E.
- C'est aussi le nombre de rangements possibles de p objets distincts dans n cases (ou tiroirs) avec possibilité de mettre plusieurs objets dans la même case (ici le rangement de chaque objet correspond au choix d'une case, ainsi E correspond aux cases).

Proposition 1.2.1 (Nombre de p-listes) *Le nombre de p-liste est n^p.*

"Démonstration" : Pour construire une p-liste $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de E^p, on a n choix pour x_1, puis n choix pour x_2,... et n choix pour x_p. On a donc n^p façons de construire une telle p-liste de E.

Exemple 1.2.1 *1. Une urne contient n boules numérotées dont q jaunes et $n - q$ vertes. On tire successivement avec remise r boules (avec $r \leq q$). Déterminer le nombre de tirages :*

(a) avec que des boules jaunes.
(b) avec $r - 1$ boules jaunes.
(c) Au plus $r - 1$ boules jaunes.
(d) Au moins $r - 1$ boules jaunes.

(a) On a q choix pour chaque tirage (choix des boules jaunes) : q^r.
(b) Soit A_l l'ensemble des tirages pour lesquels on a pioché une boule verte au l-ème tirage et que des boules jaunes pour les autres tirages. Il y a eu $r - 1$ tirages de boules jaunes, donc q^{r-1} possibilités. Ensuite il y a $n - q$ choix de la boule verte piochée. Ainsi : $|A_l| = q^{r-1}(n - q)$. Nous nous intéressons à $\bigcup_{l=1}^{r} A_l$ et cette réunion est disjointe. Ainsi : $\left|\bigcup_{l=1}^{r} A_l\right| = \sum_{l=1}^{r} |A_l| = rq^{r-1}(n - q)$.
(c) Soit A l'ensemble des tirages avec au plus $r - 1$ boules jaunes. $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages qu'avec des boules jaunes. On note E l'ensemble de tous les tirages. Ainsi grâce à la question 1., on a $|A| = |E| - |\overline{A}| = n^r - q^r$.
(d) Soit B l'ensemble des tirages avec au moins $r - 1$ boules jaunes. On note B_1 l'ensemble des tirages avec $r - 1$ boules jaunes et B_2 l'ensemble des tirages avec r boules jaunes. On a : $B = B_1 \cup B_2$, cette union étant disjointe. Ainsi : $|B| = |B_1| + |B_2| = rq^{r-1}(n - q) + q^r$.

2. Lorsque $\mathbb{K}$ est un corps fini, la théorie des espaces vectoriels et donc ce qui a été vu dans le chapitre 4 reste valable.
Soient $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Quel est le cardinal de E ?

Remarque 1.2.2 *Nous avons vu qu'un groupe fini G tel que : $\forall g \in G,\ g^2 = e$ est commutatif et de cardinal de la forme 2^n.*
On peut retrouver ce cardinal en munissant G d'une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel avec : $\forall \lambda \in \mathbb{Z}, \forall g \in G,\ \overline{\lambda}.g = g^\lambda$. Comme G est fini, alors G est de dimension finie et on conclut grâce à l'exemple ci-dessus.

1.2.3 Arrangements (pas clairement au programme, mais utile)

Définition 1.2.2 (Arrangements) *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leq n$. On appelle **arrangement de** p **éléments de** E tout p-uplet $(x_1, x_2, ..., x_p) \in E^p$ tel que les $x_1, x_2, ..., x_p$ soient deux à deux distincts. On note A_n^p le nombre d'arrangement de p éléments de E .*

Interprétation :

- Un arrangement de p éléments de E peut être vu comme une injection de $[\![1, p]\!]$ dans E. En effet celle-ci est donnée par l'application $i \mapsto x_i$. Plus généralement A_n^p est le nombre d'injections d'un ensemble de cardinal p dans E. Ceci est au programme.
- A_n^p est le nombre de possibilités de tirages successifs (l'ordre est important) sans remise de p objets de E.
- A_n^p est aussi le nombre de rangements possibles de p objets distincts dans n cases (ou tiroirs) avec au plus un objet par case, c'est une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Proposition 1.2.2 (Nombre d'arrangements) *Pour $p \leq n$, on a :* $A_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

"Démonstration" : Pour construire un arrangement $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de E^p, on a n choix pour x_1, puis $n-1$ choix pour x_2, puis $n-2$ choix pour x_3... et enfin $n-(p-1)$ choix pour x_p. On a donc $n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$ façons de construire un tel arrangement de E.

Remarque 1.2.3

1. *Ainsi, le nombre d'injections d'un ensemble A de cardinal p dans un ensemble B de cardinal n, avec $p \leq n$ est* $\dfrac{n!}{(n-p)!}$
2. *Si $p > n$, il est impossible d'avoir un arrangement de p éléments de E car il n'y a pas d'injections de $[\![1, p]\!]$ dans E . Ainsi pour $p > n$, on a $A_n^p = 0$.*
3. *Si $p = 0$, il y a un seul arragement à p éléments car il y a une seule injection de $\emptyset$ dans E. Ainsi on a $A_n^0 = 1$.*

Exemple 1.2.2

1. *Une urne contient n boules numérotées dont q jaunes et $n-q$ vertes. On tire successivement sans remise r boules (avec $r \leq q$). Déterminer le nombre de tirages :*
   - *(a) avec que des boules jaunes.*
   - *(b) avec $r-1$ boules jaunes.*
   - *(c) Au plus $r-1$ boules jaunes.*
   - *(d) Au moins $r-1$ boules jaunes.*

   (a) On a q choix pour la première boule jaune, $q-1$ pour la deuxième,...,$q-(r-1)$ choix pour la r-ème boule jaune. Cela donne : $q \times (q-1) \times ... \times (q-r+1) = \dfrac{q!}{(q-r)!}$.

   (b) Soit A_l l'ensemble des tirages pour lesquels on a pioché une boule verte au l-ème tirage et que des boules jaunes pour les autres tirages. Les emplacements des différentes boules sont donc fixées. On a q choix pour la première boule jaune, $q-1$ pour la deuxième,...,$p-(r-2)$ choix pour la $r-1$-ème boule jaune. Cela donne : $\dfrac{q!}{(q-r+1)!}$. Il reste $n-q$ pour la boule verte que l'on va tirer. Ainsi $|A_l| = (n-q)\dfrac{q!}{(q-r+1)!}$ et en raisonnant comme dans l'exemple précédent, on trouve : $r(n-q)\dfrac{q!}{(q-r+1)!}$.

   (c) Soit A l'ensemble des tirages avec au plus $r-1$ boules jaunes. $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages qu'avec des boules jaunes. On note E l'ensemble de tous les tirages. On a :
   $|E| = n(n-1)...(n-(r-1)) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, puis : $|A| = |E| - |\overline{A}| = \dfrac{n!}{(n-r)!} - \dfrac{q!}{(q-r)!}$.

   (d) On raisonne comme dans l'exemple précédent. Soit B l'ensemble des tirages avec au moins $r-1$ boules jaunes. On note B_1 l'ensemble des tirages avec $r-1$ boules jaunes et B_2 l'ensemble des tirages avec r boules jaunes. On a : $B = B_1 \cup B_2$, cette union étant disjointe. Ainsi : $|B| = |B_1| + |B_2| = r(n-q)\dfrac{q!}{(q-r+1)!} + \dfrac{q!}{(q-r)!}$.

2. *Lorsque $\mathbb{K}$ est un corps fini, le produit matriciel reste valable et donc ce qui a été vu dans le chapitre 4 reste valable.*
   Soit p un nombre premier.
   - *(a) Donner le cardinal de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ pour $n \geq 2$.*
   - *(b) Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall M \in GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),\ M^d = I_n$.*
   - *(c) Donner le cardinal de $SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),\ \det(M) = 1\}$.*

   (a)

   (b)

(c) *On a vu dans le chapitre 2 que :* $\mathrm{card}(Im(f))\mathrm{card}(\mathrm{Ker}\,(f)) = \mathrm{card}(G)$ *si* f *est un morphisme de groupes finis.*

Dans notre cas, le morphisme est le déterminant et son image est $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, *car :* $\forall k \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*,\ \det(diag(k,1,\dots,1)) = k$.

On a donc : $\mathrm{card}\,(SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) = \dfrac{\mathrm{card}\,(GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))}{p-1} = p^{n-1}\prod_{k=0}^{n-2}(p^n - p^k)$.

1.2.4 Permutations

Définition 1.2.3 (Permutations) *On appelle* ***permutation de*** E *toute bijection de* E *dans* E.

Proposition 1.2.3 (Nombre de permutations) *Le nombre de permutations de* E *est égal à* $n!$.

Interprétation :

- Il y a $n!$ façons possibles de ranger n objets distincts dans n cases ne pouvant comporter qu'un objet. C'est le nombre de permutations que l'on peut faire suivant les différents rangements.

- C'est aussi le nombre de façons de numéroter n objets, car en reprenant l'interprétation précédente, les numéros peuvent être vus comme des cases.
- C'est le nombre de tirages ordonnés sans remises de toutes les boules d'une urne contenant n boules.

Remarque 1.2.4

Plus généralement si $n = card(E) = card(F)$ *le nombre de bijections de* E *dans* F *est* $n!$.

Exemple 1.2.3 1. *Sur un plateau circulaire aux bords numérotés de* 1 *à* $2n$, *on y place* n *pions rouges et* n *pions bleus, les pions rouges étant numérotés de* 1 *à* n *ainsi que les pions bleus. Combien existe-t-il de dispositions :*

(a) *au total ?*

(b) *en respectant l'alternance rouges/bleus ?*

(c) *de telle sorte que les numéros identiques soient côte à côte ?*

(a) *Il y a* $(2n)!$ *permutations possibles de* $2n$ *pions.*

(b) *Il y a deux configurations disjointes :* A *: les pions rouges occupent des places impaires ,* B *: les pions rouges occupent des places paires. Pour la configuration* A, *les pions rouges doivent se permuter sur les* n *places* $\{1,3,5,\dots,2n-1\}$, *ce qui fait* $n!$ *configurations pour les pions rouges. De même les pions bleus doivent se permuter sur les* n *places* $\{2,4,6,\dots,2n\}$, *ce qui fait* $n!$ *configurations et donc cela fait* $n! \times n!$ *pour* A. *On a le même résultat pour* B, *donc au total, on obtient* $2(n!)^2$.

(c) *Il y a deux configurations disjointes :* C *: les paires de nombres identiques occupent les places* $\{1,2\},\ \{3,4\},\dots,$ $\{2n-1,2n\}$ *,* D *: les paires de nombres identiques occupent les places* $\{2,3\},\ \{4,5\},\dots\{2n,1\}$. *Pour la situation* C, *il faut permuter les* n *paires de pions sur les* n *paires numérotées* $\{1,2\},\ \{3,4\},\dots\{2n-1,2n\}$, *ce qui donne* $n!$ *possibilités. Une fois les paires disposés, il y a deux configurations possibles dans l'ordre rouge-bleu ou bleu-rouge. Comme nous avons* n *paires cela fait* 2^n *façons de choisir les répartitions rouge-bleu ou bleu-rouge. Donc pour* C *(et pour* D *aussi), cela fait* $2^n n!$ *possibilités et donc au total on a* $2 \times 2^n n! = 2^{n+1} n!$ *dispositions.*

2. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* D_n *le nombre de permutations de* $[\![1,n]\!]$ *sans points fixes. On pose* $D_0 = 1$. *Montrer que :* $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_{n-k}$. *En déduire l'expression de* D_n.

1.2.5 Combinaisons

Définition 1.2.4 (Combinaison) *On appelle* ***combinaison de*** p ***éléments de*** E *toute partie de* E *comportant* p *éléments. Le nombre de combinaisons de* p *éléments de* E *est noté* $\binom{n}{p}$.

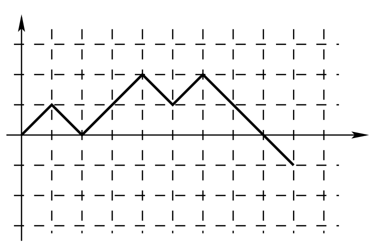
Interprétation :

- Pour $1 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p}$ est le nombre de possibilités de tirer simultanément p objets de E (on ne peut donc pas tirer deux fois le même objet et l'ordre des objets tirés ne compte pas).
- $\binom{n}{p}$ est aussi le nombre de rangements possibles de p objets identiques (indiscernables) dans n cases (ou tiroirs) avec au plus un objet par case. Ceci revient en effet à choisir p cases parmi les n possibles.

Remarque 1.2.5 *Si* $p < 0$ *ou* $p > n$, *alors on a :* $\binom{n}{p} = 0$.

Proposition 1.2.4 (Expression des coefficients binomiaux) *On a* $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

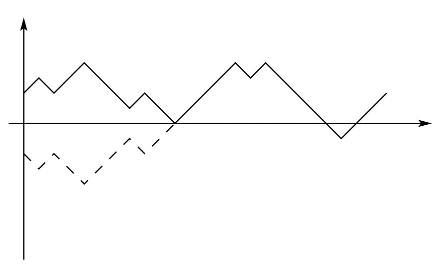
Exemple 1.2.4 *1. Dans le plan muni d'un repère orthonormal. Un chemin est une ligne brisée qui relie des points* $\{(k,\ S_k),\ 0 \leq k \leq n\}$ *de telle sorte que* $S_{k+1} = S_k + 1$ *ou* $S_{k+1} = S_k - 1$, *pour* $0 \leq k \leq n-1$, *comme le montre le schéma ci-dessous.*



Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. *On note* $N_n(a,b)$ *le nombre de chemins distincts allant de* $(0,a)$ *à* (n,b) *et on note* $C_n(a,b)$ *l'ensemble de ces chemins et* $N_n^0(a,b)$ *le nombre de chemins allant de* $(0,a)$ *à* (n,b) *et passant au moins une fois par 0 : de tels chemins contiennent* $(k,0)$ *pour un* k *tel que* $0 \leq k \leq n$ *et on note* $C_n^0(a,b)$ *l'ensemble de ces chemins.*

(a) Dtérminer $N_n(a,b)$.

(b) Montrer que si $a,\ b > 0$, *alors* $N_n^0(a,b) = N_n(-a,b)$. *On appliquera le principe de réflexion, qui consiste à associer à tout chemin de* $(0,-a)$ *à* (n,b) *passant pour la première fois en 0 à l'instant* k *le chemin de* $(0,a)$ *à* (n,b) *obtenu en changeant en leur opposé tous les points avant* k. *Voici un dessin où l'axe des* x *représente le temps et l'axe des* y *la position* S_n. *La réflexion se fait par rapport à l'axe* Ox *:*



(c) Montrer que si $b > 0$ *et de même parité que* n, *alors le nombre de chemins de* $(0,0)$ *à* (n,b) *qui ne repassent pas par 0 est égal à* $\dfrac{b}{n} N_n(0,b)$.

2. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* E *un ensemble de cardinal* n.
Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ *tels que :* $A \subset B$.

3. *Soient* $n, p \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $n \leq p$ *et* $p \geq 2$.
   (a) *Quel est le nombre de suites* $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ *de* $[\![1, p]\!]$ *strictements croissantes.*
   (b) *En déduire le cardinal* $B = \{(k_1, ..., k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n / \sum_{i=1}^{n} k_i = p\}$.

Proposition 1.2.5 (Formulaire avec les coefficients binomiaux) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Pour* $p \in [\![0, n]\!]$, *on a* $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
2. *Pour* $p \in [\![1, n-1]\!]$, *on a :* $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$.
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
4. *Pour* $p \in [\![1, n]\!]$, *on a :* $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

Exemple 1.2.5 (Formule de Vandermonde) *Soient* a *et* b *deux entiers naturels et* n *dans* $[\![1, a+b]\!]$. *Montrer que :* $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

Autre méthode avec des polynômes : *On a :* $(X+1)^{a+b} = \sum_{l=0}^{a+b} \binom{a+b}{l} X^l$ *et le coefficient* X^n *est* $\binom{a+b}{n}$.

Par ailleurs $(X+1)^{a+b} = (X+1)^a (X+1)^b = \left(\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} X^k\right)\left(\sum_{l=0}^{b} \binom{b}{l} X^l\right)$. *Cherchons le coefficient de* X^n *dans cette deuxième relation. Quand on développe celle-ci, si on prend* $\binom{a}{k} X^k$ *dans la première parenthèse, il faut prendre* $\binom{b}{n-k} X^{n-k}$ *dans la deuxième pour récupérer du* X^n. *En regardant toutes les associations possibles lors du développement, le coefficient en* X^n *dans* $(X+1)^{a+b}$ *est* $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

On retrouve $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

1.2.6 Utilisation des séries entières pour le dénombrement

Exemple 1.2.6 1. *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $p \in \mathbb{N}^*$. *Déterminer le cardinal de*

$$E_n = \{(k_1, ..., k_p) \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{p} k_i = n\}.$$

2. *Soit* u_n *le nombre de façon de parenthéser un produit* $a_1 \times a_2 \times ... \times a_n$, *c'est-à-dire le nombre de façons de choisir dans quel ordre on effectue les produits.*

   (a) *Montrer que pour* $n \geq 2$, *on a :* $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k}$.

   (b) *Soit* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$. *Si le rayon de convergence* r *est strictement positif, trouver une relation vérifiée par* f.

   (c) *En déduire que* f *est bien définie a voisinage de* 0 *et donner son expression.*

   (d) *En déduire la valeur des* u_n.

   (a)

   (b)

(c)

(d) *Soit $x \in]-1/4, 1/4[$, après réarrangement des termes dans le développement en série entière de $u \mapsto \sqrt{1-u}$, on a :* $\sqrt{1-4x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} \times \ldots \times \frac{1-2(n-1)}{2} \frac{(-4x)^n}{n!} = 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-3)}{2^n} \frac{4^n x^n}{n!} = 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \frac{x^n}{n!}$.

On en déduit que, pour tout $x \in]-1/4, 1/4[$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} x^n$.

Par unicité du DSE, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

1.3 Ensembles dénombrables

Lorsqu'il s'agit de comparer la « taille » d'ensembles finis, on dispose d'un outil efficace : le cardinal. Les choses se compliquent pour des ensembles infinis. Prenons par exemple $C = \{0; 1; 4; 9; 16; ...\} = \{k^2,\ k \in \mathbb{N}\}$. À première vue il semblerait que C soit plus petit que $\mathbb{N}$, car on a : $C \subset \mathbb{N}$. Cependant on peut dire que deux ensembles en bijection sont « de même taille ». Dans notre cas, il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et C :

$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & C \\ k & \mapsto & k^2 \end{array} \right.$ Elle est surjective, par définition de C et : $\forall k, l \in \mathbb{N},\ k^2 = l^2 \Rightarrow k = l$, car k et l sont positifs. Ainsi φ est injective.

Ainsi pour deux ensembles infinis, on pourra considérer qu'ils sont de « même taille » s'ils sont en bijection.

Définition 1.3.1 (Ensembles dénombrables) *Un ensemble infini E est dit dénombrable s'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$.*

Remarque 1.3.1

1. *Étant donnée une telle bijection $f : \mathbb{N} \to E$, on peut numéroter les éléments de E en notant, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $x_n = f(n)$. On peut alors écrire $E = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.*
2. *Un ensemble en bijection avec un ensemble dénombrable est lui-même dénombrable.*
3. *Il existe des ensembles non dénombrables : $\mathbb{R}$ ou $\{0; 1\}^{\mathbb{N}}$ (les suites à valeurs dans $\{0; 1\}$). Ainsi il y a des ensembles infinis « plus gros » que les autres et donc $\mathbb{R}$ est « plus gros que » $\mathbb{N}$.*

Exemple 1.3.1 $\{k^2,\ k \in \mathbb{N}\}$ *est donc dénombrable.*

Proposition 1.3.1 (Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$) *$\mathbb{Z}$ est un ensemble dénombrable.*

Démonstration : On numérote en effet les entiers relatifs de la façon suivante : $f(n) = 2n - 1$ et $f(-n) = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $f(0) = 0$, c'est-à-dire :

n	0	1	-1	2	-2	3	-3	...
$f(n)$	0	1	2	3	4	5	6	...

.

Proposition 1.3.2 ($\mathbb{N}^2$ est dénombrable) *L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*

Démonstration : Montrons que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (i,j) & \mapsto & 2^i(2j+1)-1 \end{array} \right.$ est bijective.

Proposition 1.3.3 (Parties infinies de $\mathbb{N}$) *Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.*

Démonstration : Soit P une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors P est non vide et possède donc un plus petit élément $f(0)$. On construit ensuite par récurrence $f(n)$ de la façon suivante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $f(0), \ldots, f(n-1)$ construits. L'ensemble $P \setminus \{f(0), \ldots, f(n-1)\}$ est non vide et possède donc un plus petit élément $f(n)$. L'application f ainsi définie de $\mathbb{N}$ dans P est strictement croissante donc injective.
Montrons qu'elle est surjective. Soit $p \in P$. Il existe au moins un entier q tel que $f(q) > p$, car sinon f serait une injection de $\mathbb{N}$ dans $[\![0,p]\!]$, ce qui est impossible. Prenons le plus petit q vérifiant cela (on a $q \geq 1$, car $f(0)$ minore P). La minimalité de q nous dit que $f(q-1) \leq p < f(q)$. Si $f(q-1) < p$, alors par définition de $f(q)$ qui est le plus petit élément de P strictement supérieur à $f(q-1)$ (et donc à $f(0), f(1), ..., f(q-1)$ par croissance de f), on a : $f(q) \leq p$, ce qui est impossible, donc $f(q-1) = p$.
En définitive f est bijective, ce qui achève de prouver que P est dénombrable.

Exemple 1.3.2 *L'ensemble des nombres premiers est une partie infinie de $\mathbb{N}$, il est donc dénombrable.*

Corollaire 1.3.1 (CNS pour qu'un ensemble soit fini ou dénombrable) *Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.*
Un tel ensemble est dit au plus dénombrable.

Démonstration : Par définition, si E est fini ou dénombrable alors il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.
Réciproquement, soit E un ensemble en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Si cette partie est finie, alors E est fini. Si elle est infinie, alors d'après la proposition précédente, elle est dénombrable et E l'est également.

Proposition 1.3.4 (Produit fini d'ensembles dénombrables) *Soient $E_1, ..., E_p$ des ensembles dénombrables. Alors $E_1 \times ... \times E_p$ est dénombrable.*
En particulier $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.

Démonstration : Cela se fait par récurrence sur p.
Montrons cela pour $p = 2$: $f : E_1 \to \mathbb{N}$ et $g : E_2 \to \mathbb{N}$ bijectives. L'application $(x,y) \mapsto (f(x), g(y))$ est alors bijective de $E_1 \times E_2$ sur $\mathbb{N}^2$, qui est lui même en bijection avec $\mathbb{N}$, donc $E_1 \times E_2$ est dénombrable.
Soit $p \geq 2$ et on suppose la proposition vraie pour p ensembles dénombrables.
Soient $E_1, ..., E_p, E_{p+1}$ des ensembles dénombrables. On pose $F = E_1 \times ... \times E_p$ qui est dénombrable grâce à l'hypothèse de récurrence. Comme $E_1 \times ... \times E_p \times E_{p+1} = F \times E_{p+1}$, alors la proposition pour $p = 2$ nous dit que $F \times E_{p+1}$ est dénombrable, ce qui donne le résultat pour $p+1$.

Proposition 1.3.5 (Réunion d'ensembles dénombrables) *Soit E un ensemble. Soient I un ensemble fini ou dénombrable et $(E_i)_{i\in\ I}$ une famille de sous-ensembles de E qui sont finis ou dénombrables. Alors $\bigcup_{i\in I} E_i$ est fini ou dénombrable.*

Démonstration : Quitte à supprimer les E_i non vides (ce qui ne change pas la réunion), on peut supposer tous les E_i non vides. Soit f_i une bijection de $[\![1,n]\!]$ ou $\mathbb{N}$, vers E_i. Si on est dans le cas $[\![1,n]\!]$, on envoit tous les $k \geq n+1$ sur un des éléments E_i, ainsi f_i devient dans tous les cas une surjection de $\mathbb{N}$ dans E_i.

Soit $f : (i,n) \mapsto f_i(n)$ qui est une surjection de $I \times \mathbb{N}$ dans $\bigcup_{i\in I} E_i$. Or $F = I \times \mathbb{N}$ est dénombrable (si I est fini de cardinal p, alors $I \times \mathbb{N}$ est en bijection avec E^p et sinon c'est le produit de deux ensembles dénombrables).

Ainsi il existe une surjection g de $\mathbb{N}$ dans $\bigcup_{i\in I} E_i$.

Soit $x \in \bigcup_{i\in I} E_i$. Comme g est surjective, alors $h(x) = \min(g^{-1}(x))$ a un sens. On a ainsi : $g \circ h = Id_{\bigcup_{i\in I} E_i}$, puis h est une injection de $\bigcup_{i\in I} E_i$ dans $\mathbb{N}$, puis $\bigcup_{i\in I} E_i$ est en bijection avec $h\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$ qui est une partie de $\mathbb{N}$, donc il est dénombrable.

Corollaire 1.3.2 ($\mathbb{Q}$ est dénombrable) *L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable.*

Démonstration :

Exemple 1.3.3 *1. Montrer que l'ensemble S des nombres complexes racines d'un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.*

2. (a) i. Montrons d'abord qu'il n'existe aucune surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$, avec E un ensemble non vide.

ii. En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

(b) Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$) n'est pas dénombrable.

(c) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{N})$, l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

(a)

i. Si une telle application existe, alors $X = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$ n'a pas d'antécédent par f. En effet s'il existe $a \in E$ tel que $f(a) = X$, alors si a est dans X, alors : $a \notin f(a) = X$, ce qui est contradictoire et si a n'est pas dans X, alors : $a \in f(a) = X$, ce qui est aussi contradictoire. Ainsi f ne peut pas exister.

ii. Il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, donc il n'y a pas de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, donc l'ensemble infini $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

(b)

(c) *Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et on pose $f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $f_A(2n) = \begin{cases} 2n+1 & si \quad 2n \in A \\ 2n & si \quad n \notin A \end{cases}$ et $f_A(2n+1) = \begin{cases} 2n & si \quad 2n+1 \in A \\ 2n & si \quad n \notin A \end{cases}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.*

On a $f_A \circ f_A = Id_{\mathbb{N}}$, donc f_A est dans $\mathcal{S}(\mathbb{N})$.

L'application $A \mapsto f_A$ est une injection de $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{N})$, car $A = \{n \in \mathbb{N},\ f_A(2n) = 2n+1\}$, donc $f_A = f_B$ implique que $A = B$.

Si $\mathcal{S}(\mathbb{N})$ était dénombrable, alors $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ s'injecterait dans $\mathbb{N}$ et serait en bijection avec une partie finie de $\mathbb{N}$, ce qui est impossible, car $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. Ainsi $\mathcal{S}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Théorème 1.3.1 (L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable) *L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ qui ne soit pas dans $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
On construit par récurrence deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \notin [a_n, b_n]$.
• On pose par exemple $a_0 = u_0 + 1$ et $b_0 = u_0 + 2$.
• Supposons construits $a_n < b_n$ avec : $u_n \notin [a_n, b_n]$. On pose $c_n = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et $d_n = \dfrac{a_n + 2b_n}{3}$. Ainsi les segments $[a_n, c_n], [c_n, d_n]$ et $[d_n, b_n]$ coupent le segment $[a_n, b_n]$ en trois parts égales et au moins l'un de ces segments ne contient pas u_{n+1} (sinon l'intersection de ces trois segments ne serait pas vide, ce qui est impossible).
Cela permet de définir $a_{n+1} < b_{n+1}$ tels que : $u_{n+1} \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$ (avec $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ l'un des trois segments $[a_n, c_n], [c_n, d_n]$ et $[d_n, b_n]$) et $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{3}$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{3^n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Ainsi les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers un réel ℓ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell \leq b_n$, soit : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell \in [a_n, b_n]$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell \neq u_n$.
Si $\mathbb{R}$ était dénombrable, il existerait une suite de réels telle que : $\mathbb{R} = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, ce qui est contradictoire avec le résultat précédent.

Remarque 1.3.2 *(IMPORTANTE) Les intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Il existe $a \in I$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $]a - r, a + r[\subset I$.*

Proposition 1.3.6 (Support d'une famille sommable) *Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbb{C}$ sommable. Alors $\{i \in I,\ u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.*

Démonstration :

Exemple 1.3.4 *Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ croissante et D l'ensemble des points de discontinuité de f. Montrer que D est au plus dénombrable.*
On commencera par montrer que c'est le cas pour $D \cap]-n, n[$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme f est croissante, elle possède une limite à gauche et à droite en tout point. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrons que la famille $\left(\lim\limits_{x^+} f - \lim\limits_{x^-} f\right)_{x\in]-n,n[}$ est sommable.
Soient $-n < x_1, \ldots, x_p < n$. On a alors :
$\lim\limits_{-n^+} f \leq \lim\limits_{x_1^-} f \leq \lim\limits_{x_1^+} f \leq \ldots \leq \lim\limits_{x_p^-} f \leq \lim\limits_{x_p^+} f \leq \lim\limits_{n^-} f$. *Ainsi les intervalles $[\lim\limits_{x_i^-} f, \lim\limits_{x_i^+} f]$, ont tous des intérieurs disjoints et inclus dans $[\lim\limits_{-n^+} f, \lim\limits_{n^-} f]$, pour $1 \leq i \leq p$.*
Ainsi en faisant la somme des longueurs de ces intervalles, on a : $\sum\limits_{i=1}^{p}(\lim\limits_{x_i^+} f - \lim\limits_{x_i^-} f) \leq \lim\limits_{n^-} f - \lim\limits_{-n^+} f$.
Cette somme est majorée par une constante indépendante du choix de p et de $x_1, \ldots, x_p$, alors la famille à termes postitifs $\left(\lim\limits_{x^+} f - \lim\limits_{x^-} f\right)_{x\in]-n,n[}$ est sommable.
Grâce à la proposition précédente, son support $D \cap]-n, n[$ est au plus dénombrable (cela correspond aux points de discontinuité, car f est discontinue en x si et seulement si $\lim\limits_{x^-} f < \lim\limits_{x^+} f$).
On a $D = \bigcup n \in \mathbb{N}^* D \cap]-n, n[$ qui est une union dénombrable d'ensembles dénombrables, donc D est dénombrable.

2 Vocabulaire sur les ensembles

2.1 Unions et intersections

Définition 2.1.1 (Intersection et union d'une famille d'ensembles) *Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble E indexée par I. Soit $x \in E$.*

1. $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ *signifie que x est au moins de l'un des A_i, ce qui s'écrit mathématiquement :*
$$\exists j \in I,\ x \in A_j.$$
2. $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ *signifie que x est dans tous les A_i, ce qui s'écrit mathématiquement :*
$$\forall j \in I,\ x \in A_j.$$

Proposition 2.1.1 (Opérations ensemblistes) *Soient $\{A_i\}_{i\in I}$, indexés par l'ensemble I et B un ensemble. On a :*

1. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$.
2. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$.
3. $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$.
4. $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$.

2.2 Lien entre vocabulaire ensembliste et probabiliste

Définition 2.2.1 (Issues) *L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations ou des observables) d'une expérience aléatoire est appelé univers. Il est souvent noté Ω.*

Exemple 2.2.1 *Donnons divers univers possibles suivant la nature de Ω.*

1. *On lance deux dés cubiques à 6 faces, ici $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ et card$(\Omega) = 36$.*
2. *On joue à pile (p) ou face (f) et on lance une pièce tant que l'on n'a pas obtenu un pile (on peut donc jouer indéfiniment !). Ici $\Omega =$*

Plutôt que de s'intéresser à chaque résultat pris isolément (c'est-à-dire un élément de Ω), on regarde plutôt un groupe de résultats possédant une propriété commune (ça devient une partie de Ω). On donne donc la définition suivante :

Définition 2.2.2 (Événements) *Un événement est un ensemble d'issues ; c'est une partie de Ω. On appelle événement élémentaire, un événement constitué d'une seule issue (c'est-à-dire un singleton).*

Exemple 2.2.2 *En reprenant l'exemple 2.2.1, identifier A dans $\mathcal{P}(\Omega)$ correspondant à l'événement cité.*

1. *« Avoir deux dés de parité différente », ici $A = \{1, 3, 5\} \times \{2, 4, 6\} \cup \{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5\}$ et card$(A) = 3^2 + 3^2 = 18$.*
2. *« Avoir pile la première fois au bout du 5ème lancé », ici*
$A =$

Définition 2.2.3 (Événements certains, impossibles, incompatibles)

1. *L'événement $\emptyset$ est appelé événement impossible. Il ne peut être réalisé quelle que soit l'issue de l'épreuve.*
2. *L'événement Ω est appelé événement certain. Il est toujours réalisé*
3. *Si $A \cap B$ est l'événement impossible (c'est-à -dire que $A \cap B = \emptyset$), on dit que les événements A et B sont incompatibles.*

Définition 2.2.4 (Système complet d'événements) *Un système complet d'événements est une partition de Ω, c'est-à-dire :*
le système $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événement si et seulement si

- *Si aucun des A_i est impossible :* $\forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset$.
- *ils sont incompatibles deux à deux :* $\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow\ A_i \cap A_j = \emptyset$.
- *Ω est la réunion des A_i :* $\Omega = \displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ *c'est-à -dire :* $\forall x \in \Omega,\ \exists i \in I, x \in A_i$.

  Autrement dit on a : $\forall x \in \Omega, \exists! i \in I,\ x \in A_i$.

Exemple 2.2.3 *1. Pour $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$, les événements élémentaires $\{\omega_1\}, ..., \{\omega_n\}$ forment un système complet d'événements (leur union donne bien Ω et ils sont deux à deux disjoints).*

2. *Le système $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements souvent utilisé si $A \neq \Omega$ et $A \neq \emptyset$.*
3. *Dans le jeu du pile ou face, si on note A_n l'événement obtenir pile pour la première fois au n-ème lancer et si on note A_∞ ne jamais obtenir pile, alors $(A_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\infty}$ est un système complet d'événements.*

3 Espaces probabilisés

Soit Ω un ensemble.

Vous avez vu en sup des probabilités sur des ensembles finis. Nous allons étudier cette année des probabilités P sur des ensembles infinis. Vous avez vu que si $A_1, ..., A_p$ sont des événements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé, alors on a : $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P(A_i)$. Nous voudrions étendre cette propriété sur une réunion dénombrable d'événements deux à deux disjoints :
$P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$.
Il est en général impossible de définir une probabilité vérifiant les axiomes souhaités pour tout événement de Ω (voir ci-dessous pour un début d'explication). Cela signifie qu'il n'est pas toujours possible de définir une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Il faudra se contenter de définir P sur une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ que l'on appelera tribu.

Nous souhaitons construire une probabilité naturelle que $[0, 1]$, qui est donnée par $P([a, b]) = b - a$, pour $0 \leq a < b \leq 1$. On a : $P([0, 1]) = 1$.

Si $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite disjointe d'intervalle, nous étendons P de la façon suivante : $P\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - a_n)$. Imaginons que l'on puisse étandre P en une probabilité sur $\mathcal{P}([0, 1])$.

On remarque tout d'abord que pour $[a, b] \subset [0, 1]$ et $x \in [0, 1]$ tels que $x + [a, b] \subset [0, 1]$, on a : $P(x + [a, b]) = P([a, b])$. On admet que cette propriété de translation se conserve à tout sous-ensemble de $[0, 1]$.

Sur $\mathbb{R}$, on introduit la relation d'équivalence : $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Toute classe d'équivalence rencontre $[1/3, 2/3]$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $p = \lfloor 3x \rfloor - 1$. On a : $p + 1 \leq 3x < p + 2$, puis $\frac{1}{3} \leq x - \frac{p}{3} < \frac{2}{3}$.

Pour chaque classe d'équivalence C, on choisit un représentant x_C dans $[1/3, 2/3]$ (cela est possible si on accepte l'axiome du choix).

On note V l'ensemble constitué des x_C. On pose $A = \displaystyle\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1/3,1/3]} (r + V)$.

Ces ensembles sont deux à deux disjoints, car si $r_1 + x_{C_1} = r_2 + x_{C_2}$, avec $r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]$ et C_1 et C_2 deux classe d'équivalences, alors $x_{C_1} \sim x_{C_2}$, donc ils sont dans la même classe d'équivalence, puis $C_1 = C_2$, puis $r_1 = r_2$.

Ainsi $P(A) = \displaystyle\sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1/3,1/3]} P(r + V) = \displaystyle\sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1/3,1/3]} P(V)$. Comme $\{r \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]\}$ est infini, pour que la dernière série converge, on doit donc avoir $P(V) = 0$, puis on a : $P(A) = 0$.

On montre maintenant que $[1/3, 2/3] \subset A$. Soit $x \in [1/3, 2/3]$ qui est dans une classe C. On a donc $r = x - x_C \in \mathbb{Q} \cap [-1/3, 1/3]$, donc on a : $x = r + x_C \in r + V \subset A$.

On a donc : $1/3 = P([1/3, 2/3]) \leq P(A) = 0$, ce qui est absurde.

3.1 Tribu

Définition 3.1.1 (Tribu) *On appelle tribu sur Ω une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que :*

- $\Omega \in \mathcal{T}$.
- *Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on a $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$.*
- *Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, l'union $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient encore à $\mathcal{T}$.*

Dans ce cas, on dit que le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est probabilisable.

Remarque 3.1.1 *1. Pour modéliser une expérience aléatoire, on aura donc besoin d'un univers Ω et de la tribu des événements $\mathcal{T}$. Il s'agit des événements que l'on peut observer.*

2. *Lorsque Ω est fini, il n'y a pas de bonnes raisons de considérer une autre tribu que $\mathcal{P}(\Omega)$ (cf première année).*
   C'est également le cas pour un univers Ω dénombrable. Au-delà, nous verrons brièvement qu'il est parfois nécessaire de prendre $\mathcal{T}$ strictement incluse dans $\mathcal{P}(\Omega)$

Exemple 3.1.1 *1. $\mathcal{P}(\Omega)$ et $\{\emptyset, \Omega\}$ sont des tribus sur Ω.*

2. *Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$.*
   Montrer qu'il existe une tribu que l'on note $\sigma(\mathcal{A})$ qui est la plus petite tribu contenant A au sens de l'inclusion, c'est-à-dire, si $\mathcal{T}$ est une tribu contenant $\mathcal{A}$, alors $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}$.
   Montrer l'unicité de $\sigma(\mathcal{A})$. On appelle $\sigma(\mathcal{A})$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.
   Posons $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{T} \text{ tribu} \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{T}}} \mathcal{T}$.
   L'intersection contient au moins un élément à savoir $\mathcal{P}(\Omega)$.
   Montrons que $\sigma(\mathcal{A})$ est bien une tribu.
   - *Soit $\mathcal{T}$ une tribu contenant A. On a $\Omega \in \mathcal{T}$, donc $\Omega \in \sigma(\mathcal{A})$.*
   - *Soit $X \in \sigma(\mathcal{A})$. Pour tout tribu $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{A}$, on a : $X \in \mathcal{T}$, donc $\Omega \setminus X \in \mathcal{T}$, puis : $\Omega \setminus X \in \sigma(\mathcal{A})$.*
   - *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\sigma(\mathcal{A})$. Pour tout tribu $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{A}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \in \mathcal{T}$, donc : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$, puis : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma(\mathcal{A})$.*

   . Ainsi $\sigma(\mathcal{A})$ une est tribu et par construction on a : $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A})$ et si $\mathcal{T}$ est une tribu contenant $\mathcal{A}$, alors $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}$.
   Pour l'unicité supposons qu'une tribu $\mathcal{B}$ v{erifie la même propriété. On a alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, puis $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ et de même $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{A})$. Ainsi $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$.

Proposition 3.1.1 (Stablité d'une tribu par opérations) *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.*

1. *$\emptyset \in \mathcal{T}$.*
2. *$\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable.*
3. *$\mathcal{T}$ est stable par réunion finie et par intersection finie.*

Démonstration :

1. $\emptyset = \overline{\Omega} \in \mathcal{T}$, car Ω est dans $\mathcal{T}$ qui est stable par passage au complémentaire.
2. Il suffit d'écrire $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$.
3. Soient $A, B \in \mathcal{T}$. On pose $A_0 = A$; $A_1 = B$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$. Tous les A_n sont dans $\mathcal{T}$ et donc : $A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.
   Par récurrence, on a le résultat pour une réunion finie.
   Par ailleurs $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont dans $\mathcal{T}$, donc $\overline{A} \cup \overline{B}$ aussi et donc $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ aussi soit : $A \cap B \in \mathcal{T}$. Par récurrence, on a le résultat pour une intersection finie.

3.2 Succession d'épreuves aléatoires

On considère une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ consistant à effectuer successivement et indéfiniment des épreuves aléatoires $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots$ Souvent on répète une même épreuve, par exemple une succesion de lancers infinis de pile ou face.
Pour l'épreuve n, on suppose que l'on a un espace probabilisé $(\Omega_n, \mathcal{T}_n)$ modélisant celle-ci. Le but est de construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T})$ modélisant l'expérience $\mathcal{E}$.
Cette construction est admise et dépasse largement le cadre du programme. Cependant on rencontrera de nombreuses situations modélisant une telle succession infinie d'épreuves et il sera sous-entendu que la tribu associée a été construite (d'ailleurs elle sera souvent distincte de $\mathcal{P}(\Omega)$). La difficulté réside dans le fait que Ω ne soit pas dénombrable.
Par exemple pour s'intéresser à une succession de lancers pile ou face, on peut se demander quand on va obtenir le premier pile. Mais comme nous ne savons pas quand va apparaître le premier pile, on est obligé de prendre $\Omega = \{\text{pile} ; \text{face}\}^{\mathbb{N}^*} = \{(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega_n \in \{\text{pile} ; \text{face}\}\}$, qui pourra englober toutes les issues possibles, mais $\{\text{pile} ; \text{face}\}^{\mathbb{N}^*}$ n'est pas dénombrable. Donc dans ce cas là on admettra que l'on peut munir Ω d'une tribu.

Voici quelques points pour la construction si cela vous intéresse. Pour regrouper les résultats de toutes les expériences, nous posons

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots = \{(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega_n \in \Omega_n\}$, qui donne la suite des résultats.

Reste à munir cet espace d'une tribu, qui puisse contenir les événements liés à une épreuve n fixée. Par exemple si A_n est un événement de l'épreuve n (avec $A_n \in \mathcal{T}_n$), on peut s'intéresser à sa réalisation quelque soit les résultats des autres épreuves. Dans Ω, ceci correspondra à l'événement : $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \Omega_{n-1} \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \ldots$.

On veut construire une tribu qui contient tous les événements précédents, avec n variant et A_n dans $\mathcal{T}_n$ quelconque. Il suffit de prendre pour $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par ces ensembles comme dans l'exemple 3.1.1.

Exemple 3.2.1 *On joue à pile ou face et on note A_k l'événement : « obtenir pile au k-ème lancer ». On considère que les A_k sont dans la tribu $\mathcal{T}$. Les ensembles $B = \bigcup_{i\geq 1}\left(\bigcap_{j\geq i} A_j\right)$ et $C = \bigcap_{i\geq 1}\left(\bigcup_{j\geq i} A_j\right)$ sont aussi dans $\mathcal{T}$.*
Décrire ces ensembles.

3.3 Probabilité

Définition 3.3.1 (Probabilité) *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ la donnée d'une application $P : \mathcal{T} \to [0;1]$ telle que*

- $P(\Omega) = 1$
- ***(σ-additivité)*** *Pour tout suite $(A_n)_{n\geq 0}$ d'événements incompatibles de $\mathcal{T}$, on a :*
  $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Remarque 3.3.1 *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) =$*

Proposition 3.3.1 (Opérations et probabilités) *Soient A et B deux événements de $\mathcal{T}$.*

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. *Si A et B sont disjoints, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;*
3. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$;
4. *Si on a : $A \subset B$, alors on a : $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$;*
5. $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$; ;
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
7. *Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements deux à deux disjoints de $\mathcal{T}$, alors : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.*

Démonstration : Il suffit de montrer les deux premiers points. Les autres en découlent en effectuant la même preuve que dans le cas fini que vous avez vu en sup.

1. Si on pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \emptyset$, alors les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une suite d'événements incompatibles et donc $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ et donc la série $\sum P(\emptyset)$ converge. Cette série converge si et seulement si la constante $P(\emptyset)$ est nulle.

2. On pose $A_0 = A$ et $A_1 = \overline{A}$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$. Les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une suite d'événements incompatibles et donc $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = P(A) + P(\overline{A})$. Or $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$ et donc $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$, puis $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Remarque 3.3.2 *Le dernier point rejoint le fait qu'une disjonction se traduit par une somme.*

Définition 3.3.2 (Distribution de probabilités discrètes) *1. Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille de réels $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ telle que : $\forall \omega \in \Omega,\ p_\omega \geq 0$ et : $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.*

2. Pour une telle famille, l'ensemble $\{\omega \in \Omega,\ p_\omega \neq 0\}$ est appelé support de cette distribution.

Remarque 3.3.3 *Le support d'une distribution de probabilités discrètes est au plus dénombrable.*

Proposition 3.3.2 (Probabilité et distribution de probabilité discrète) *Soit Ω un ensemble au plus dénombrable.*

1. Si $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A un événement, alors : $P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$.

2. Réciproquement, si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une famille de distribution de probabilité discrète, alors il existe une unique probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que : $\forall \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = p_\omega$. Cette probabilité est définie, pour tout événement A par : $P(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$.

Ainsi sur Ω, on peut considérer la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$, pour définir une probabilité.

Démonstration :

1. On a $A = \bigcup_{\omega\in A} \{\omega\}$ et cette réunion est dénombrable et disjointe.
   Ainsi $P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$ par σ-additivité.
2. Raisonnons par analyse synthèse. Si une telle probabilité existe, alors le raisonnement précédent nous dit que : $P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$.
   Montrons que l'application P définie précédemment sur $\mathcal{P}(\Omega)$ définit bien une probabilité.

Remarque 3.3.4 *On peut étendre le deuxième point de cette proposition à un ensemble Ω quelconque et considérer aussi la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$, mais il faut disposer d'une distribution de probabilité discrète.*

Définition 3.3.3 (Événement négligeable, presque sûr) *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $B \in \mathcal{T}$.*

1. Si $P(B) = 0$, alors B est un événement négligeable.

2. Si $P(B) = 1$, alors B est un événement presque sûr.

3. Toute propriété vérifiée sur un ensemble de probabilité un est dite presque sûre.

3.4 Révision de sup : quelques probabilités dans un univers fini

Définition 3.4.1 (Probabilité uniforme) *Dans le cas où* Ω *est fini de cardinal* n*, on définit la probabilité uniforme sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *par :* $\forall \omega \in \Omega, \quad P(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$.

Pour tout événement A*, on a alors* $P(A) = \frac{card(A)}{n}$.

Remarque 3.4.1 *Dans les énoncés d'exercices et problèmes, la formulation « au hasard » se réfère par défaut à une situation d'équiprobabilité.*

Exemple 3.4.1

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. On considère* $2n$ *équipes sportives,* n *en première division et* n *en seconde division. On organise* n *matchs. Soit* a_n *la probabilité d'avoir systèmatiquement une équipe de première division face à une équipe de seconde division. Calculer* a_n.

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Pour* $\sigma \in S_n$ *et* $i \in [\![1, n]\!]$*, on dit que* $\sigma(i)$ *est un record si :* $\sigma(i) = \max\{\sigma(1), ..., \sigma(i)\}$*. On munir* $\mathcal{S}_n$ *de la probabilité uniforme. Quelle est la probabilité pour qu'une permutation ait un record en* i *?*

Proposition 3.4.1 (Binomiale) *On considère une succession de* n *expériences identiques et indépendantes à deux issues : succès et échec, et pour chacune d'entre elles, la probabilité d'un succès est* p*. Alors la probabilité d'avoir* k *succès est* $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Exemple 3.4.2 *Une personne* A *transmet une information (binaire) à* I_1*, qui la transmet à* I_2 *... jusqu'à* I_n *qui la transmet à* B*. On fait l'hypothèse que chaque intermédiaire* I_k $(1 \leq k \leq n)$ *transmet l'information qu'il reçoit avec une probabilité* p $(0 < p < 1)$ *et l'information contraire avec la probabilité*

$1-p$. Calculer en fonction de n et p la probabilité p_n pour que B reçoive l'information initiale. Trouver un rang N à partir duquel pour $n \geq N$, on a : $|p_n - 1/2| \leq 10^{-2}$.

3.5 Probabilité sur l'espace d'une succession d'épreuves aléatoires indépendantes

Reprenons maintenant la situation du paragraphe 3.2, sur la succession d'épreuves aléatoires indépendantes. Nous évoquons ceci avant même d'avoir évoqué l'indépendance car cette situation apportera de riches exemples pour illustrer les futures propositions.
On considère une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ consistant à effectuer successivement et indéfiniement des épreuves aléatoires $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, ...$
Pour l'épreuve n, on suppose que l'on a un espace probabilsé $(\Omega_n, \mathcal{T}_n, P_n)$ modélisant celle-ci. Nous avons admis que l'on a trouvé un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ modélisant l'expérience $\mathcal{E}$, en prenant $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... = \{(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega_n \in \Omega_n\}$.
Reste à munir cet espace d'une probabilité. Nous voulons construire une probabilité P telle que si A_n est dans $\mathcal{T}_n$ la probabilité d'obtenir cet événement quelque soit les autres épreuve nous donne $P_n(A_n)$.
Ainsi on pose $P(\Omega_1 \times \Omega_2 \times ...\Omega_{n-1} \times A_n \times \Omega_{n+1} \times ...) = P_n(A_n)$.
L'hypothèse d'indépendance donne par exemple
$P(A_1 \times A_2 \times ...A_{n-1} \times A_n \times \Omega_{n+1} \times ...) = P_1(A_1)P_2(A_2)...P_n(A_n)$.
Dans ce dernier cas, nous nous intéressons juste aux n premières expériences dans notre calcul de probabilités sans tenir compte du reste.

Nous admettons que $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ existe, avec P vérifiant les contraintes précédentes.

Exemple 3.5.1 *On effectue un lancer de pile ou face avec une pièce truquée donnant pile avec une probabilité p dans $]0;1[$. On pose $q = 1-p$.*

1. *Quelle est la probabilité d'obtenir pile pour la première fois au n-ème lancer, on appelera A_n cet événement ?*
2. *Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir pile, on appelera A_∞ cet événement ?*
3. (a) *Déterminer la probabilité de l'événement « le motif PF apparaît avant le motif FF ».*
   (b) *Déterminer la probabilité de l'événement « le motif PP apparaît avant le motif FF ». On pourra pour cela s'intéresser à la parité du rang d'appartition du premier motif PP.*
4. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On note T_n l'événement « avoir r Faces consécutifs pour la première fois à l'issue du n-ème lancer ». On note $p_n = P(T_n)$ pour $n \geq r$.*

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+r+1} = q^r p \left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)$.

Remarque 3.5.1 *Contrairement aux probabilités finies, nous pouvons avoir des événements qui existent (non vides) mais qui ont une probabilité nulle (événements négligeables). Ainsi $P(X) = 0$ n'implique pas $X = \emptyset$. C'est le cas par exemple de $A_\infty = \{(f, f, f, f, ...)\}$ de l'exemple précédent.*

3.6 Réunions et intersections dénombrables d'événements

Proposition 3.6.1 (Continuité croissante) *Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements croissante, c'est-à-dire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $A_n \subset A_{n+1}$.*

Alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Démonstration :

Corollaire 3.6.1 (Continuité décroissante) *Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements décroissante, c'est-à-dire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $A_{n+1} \subset A_n$*

Alors $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Démonstration : On a : $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$. Or la suite $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypthèses de la proposition précédente. Ainsi on a :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P(\overline{A_n}) = 1 - \lim_{n\to+\infty}[1 - P(A_n)] = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Exemple 3.6.1 *On fait effectue une infinité de lancers pile ou face avec une pièce donnant pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$.*

1. *Par une autre méthode retrouver la probabilité de ne jamais avoir pile en utilisant une suite décroissante .*
2. (a) *Quelle est la probabilité d'avoir pile au moins n fois lors des k premiers tirages, avec k et n des entiers naturels non nuls, avec $n \leq k$. On note C_k l'événement correspondant.*

   (b) *En déduire la probabilité d'avoir pile au moins n fois au cours d'une infinité de tirages.*

Corollaire 3.6.2 (Probabilité d'unions et intersections dénombrables) *Étant donnée* $(A_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'événement, on a :*

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \quad et \quad P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right).$$

Démonstration : La suite d'événements $\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Par ailleurs $\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Proposition 3.6.2 (Sous-additivité) *Étant donnée* $(A_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'événement, on a :*
$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Démonstration : On note $B_0 = A_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n \setminus (A_{n-1} \cup A_{n-2} \cup ... \cup A_0)$, alors on a : $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ et cette dernière union est disjointe. Ainsi on obtient :
$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$, car pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $B_n \subset A_n$.

Remarque 3.6.1 *Si on a une famille finie d'événements,* $P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{N} P(A_n)$*, en prenant dans la proposition précédente* $A_n = \emptyset$*, si* $n \geq N$*.*

Exemple 3.6.2 *(Borel Cantelli 1) Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille d'événements telle que* $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ *converge. Pour tout entier naturel* m*, on pose* $C_m = \bigcup_{i\geq m} A_i$*. Montrer que* $P\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_m\right) = 0$*, puis interpréter ce résultat.*

Corollaire 3.6.3 (Réunion d'événements négligeables) *Une union finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligéable.*

Démonstration : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements négligeables. On a :
$0 \leq P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 0$. Pour une famille finie, nous avons la même démonstration.

Corollaire 3.6.4 (Intersection d'événements presque sûrs) *Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.*

Démonstration : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements presque sûrs. On a donc :
$\forall n \in \mathbb{N},\ P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n) = 0$. Grâce au corollaire précédent, on a :
$0 = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = P\left(\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n}\right)$, puis : $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$.

4 Conditionnement et indépendance

4.1 Probabilités conditionnelles

Définition 4.1.1 *Étant donné* $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé et* $B \in \mathcal{T}$ *tel que* $P(B) \neq 0$*, la probabilité conditionnnelle d'un événement* A *sachant* B *est donnée par*

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Elle se note également $P(A|B)$*.*

Remarque 4.1.1 *1. Dans le cas où* Ω *est fini et d'équiprobabilité, on a alors* $P_B(A) = \dfrac{card(A\cap B)}{card(B)}$*.*

2. *Si A et B sont incompatibles, alors $P(A|B) = 0$. Si B implique A, alors : $P(A|B) = 1$.*
   $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)$.
3. *Avec une telle probabilité conditionnelle, on change l'espace des observables qui devient ici B. On a plus d'informations, puisque l'événement B s'est produit et on cherche la probabilité d'obtenir l'événement A avec cette nouvelle donnée. Ainsi nous ne préciserons pas l'espace des observables Ω pour les probabilité conditionnelles puisque l'on sait que l'on travaille dans l'espace des observables B.*
4. *Ainsi, ne pas confondre les probabilité $P(A|B)$ et $P(A \cap B)$. Dans le premier cas, on suppose que B est déjà réalisée et on cherche à savoir grâce à cette information la probabilité que A se réalise. Dans le deuxième cas, on s'intéresse à l'événement $A \cap B$ et il n'y a aucune raison que B soit à priori réalisé.*
5. *On a : $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, que l'on peut interpréter de la façon suivante : d'abord on a l'événement B donc on calcule $P(B)$, et une fois que B est acquis, on veut A d'où le calcul de $P(A|B)$.*

Exemple 4.1.1 *Des joueurs j_1,...,j_n,...(en nombre infini), s'affrontent à un tournoi de Pile ou Face avec une pièce non truquée. D'abord j_1 rencontre j_2. Le perdant est éliminé, puis le gagnant rencontre j_3. À nouveau le perdant est éliminé, le gagant rencontre j_4, et ainsi de suite. Est déclaré vainqueur le premier joueur qui remporte qui remporte trois parties consécutives. Pour n, on note q_n la probabilité que le joueur j_n participie au tournoi, et p_n la probabilité qu'il le remporte.*

1. *Exprimer p_n en fonction de q_n.*
2. *Déterminer q_n, pour $1 \leq 4 \leq n$.*
3. *Pour $n \geq 5$, trouver une relation entre q_n, q_{n-1} et q_{n-2}, pour $n \geq 5$*
4. *En déduire une exrpession de p_n en fonction de n.*

1.

2.

3.

4. *La suite $(q_n)_{n \geqslant 3}$ vérifie une relation de récurrence linéaire sur deux termes d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$, de solutions $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \geqslant 3$: $q_n = \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n$.*
   Pour gérer plus facilement les conditions initiales, on considère la suite $\left(q'_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $q'_n = \frac{1}{2}q'_{n-1} + \frac{1}{4}q'_{n-2}$, avec $q'_3 = q_3$

et $q'_4 = q_4$. On a alors $q'_n = q_n$ pour $n \geqslant 3$ et $q'_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient $q'_2 = 2, q'_1 = 0$ et $q'_0 = 8$. Les conditions $q'_0 = 8$ et $q'_1 = 0$ permettent de déterminer $\alpha = \frac{4(1+\sqrt{5})}{\sqrt{5}}$ et $\beta = \frac{4(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}}$. On obtient, pour tout $n \geqslant 3$:

$$q_n = \frac{4}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right)$$
$$p_n = \frac{1}{8}q_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right).$$

Proposition 4.1.1 *P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.*

Démonstration :
- Soit $A \in \mathcal{T}$. Comme $0 \leq P(A \cap B) \leq P(B)$, alors comme $P(B)$ est strictement positif, alors on a : $0 \leq \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \leq 1$. Ainsi P_B est bien à valeurs dans $[0;1]$.
- On a : $P_B(\Omega) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$.
- Soit ensuite $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements incompatibles.
  On a $\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cap B = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}(A_n \cap B)$, cette dernière union étant composée d'événements incompatibles. Ainsi on a : $P\left(\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cap B\right) = P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}(A_n \cap B)\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B)$.
  Divisant par $P(B)$, on obtient bien $P_B\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_B(A_n)$.

Remarque 4.1.2 *En particulier on a $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A}|B) = 1 - P_B(A) = 1 - P(A|B)$.*

Proposition 4.1.2 (Formule des probabilités composées) *Si $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$.*
De même si $P(B \cap C) \neq 0$ alors $P(A \cap B \cap C) = P(C)P(B|C)P(A|B \cap C)$.
Plus généralement, si $P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$, alors

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) =$$

Démonstration : Voir la démonstration de sup.

Remarque 4.1.3 *Ceci traduit l'idée qu'une succession se traduit par des produits.*

Exemple 4.1.2 *Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages avec remise et lorsqu'une boule rouge est tirée, on replace la boule rouge puis on multiplie par deux le nombre de boules rouges présentes dans l'urne, sinon le jeu s'arrête. Soit R_n l'événement : « au n-ème tirage, on a obtenu une boule rouge ».*
Est-ce que le jeu s'arrête presque-sûrement ? Dure-t-il infiniment preque sûrement ?

4.2 Probabilités totales

Proposition 4.2.1 (Probabilités totales) *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un système complet d'événements et* B *un événement.*
La série $\sum P(B\cap A_n)$ *converge et sa somme vaut* $P(B)$*. On a donc*

$$P(B) =$$

avec la convention $P(A_n)P(B|A_n) = 0$ *lorsque* $P(A_n) = 0$*.*

Démonstration : On a : $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ et donc $B = B\cap\Omega = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\cap B)$. Comme cette dernière union est disjointe, alors $P(B) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n\cap B)$. Enfin, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ P(A_n\cap B) = P(B|A_n)P(A_n)$.

Corollaire 4.2.1 (Probabilités totales pour les systèmes quasi-complet d'événements) *Le résultat reste valable pour une suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'événement incompatibles telle que* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$*.*

Démonstration : Il suffit de remplacer dans ce qui précède Ω par $\Omega' = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, événement de probabilité 1, car comme la réunion est disjointe, alors $P\left(\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.
Or on a : $P(B\cap\Omega') = P(B)+P(\Omega')-P(B\cup\Omega') = P(B)+1-1 = P(B)$, car $1 = P(\Omega') \leq P(B\cup\Omega') \leq 1$ donc $P(B\cup\Omega') = 1$.
On conclut car $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de Ω' et donc :
$P(B\cap\Omega') = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P(B\cap\Omega'|A_n)$. Si $P(A_n)$ est non nul, alors :
$P(B\cap\Omega'|A_n) = \dfrac{P(B\cap\Omega'\cap A_n)}{P(A_n)} = \dfrac{P(B\cap A_n)}{P(A_n)} = P(B|A_n)$, car A_n est inclus dans Ω' et donc : $\Omega'\cap A_n = A_n$.

Remarque 4.2.1 *Une telle famille d'événements est dite quasi-complète.*

Exemple 4.2.1

1. *On se donne* $N+1$ *urnes numérotées de 0 à* N*. L'urne de numéro* k *contient* k *boules blanches et* $N+1-k$ *boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire des boules avec remise.*
   (a) *Quelle est la probabilité que la* $(n+1)$*-ième boule tirées soit blanche sachant que les* n *précédentes l'étaient toutes ?*

(b) *Que devient cette probabilité lorsque* $N \to +\infty$?

On note U_k : « *choisir l'urne* k », *pour* $k \in [\![0, N]\!]$ *et* B_l : « *la* l*-ème boule tirée est blanche* ».

(a)

(b) *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *La fonction* $f : x \mapsto x^n$ *est continue sur* $[0,1]$, *donc grâce aux sommes de Riemann associées aux subdivisions* $\left(\frac{k}{N+1}\right)_{0 \leq k \leq N+1}$ *de* $[0,1]$, *on a* :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} f\left(\frac{k}{N+1}\right) = \frac{1}{1-0} \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{n+1}.$$

On a donc : $\lim_{N\to+\infty} P(B_{n+1} | B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n)) = \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}.$

2. *On lance une pièce avec une probabilité* p (*dans* $]0,1[$) *de donner Pile. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On note* A_n *l'événement* : « *obtenir pour la première fois deux Pile consécutifs à l'issue du n-ème lancer* » *et* $a_n = P(A_n)$.

   (a) *Déterminer* a_1 *et* a_2.

   (b) *Montrer que* : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + p(1-p)a_n$.

   (c) *En déduire qu'il est quasi-certain d'obtenir deux Piles consécutifs lors d'une infinité de lancers.*

   (d) *Calculer* $M = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$. *Que représente cette quantité ?*

   (a)

   (b)

(c)

(d) *Pour* $n \geq 3$*, on a :* $na_n = qna_{n-1} + pqna_{n-2}$*, puis pour* $N \geq 3$*, on note* $S_N = \sum_{n=1}^{N} na_n$ *:* $S_N - a_1 - 2a_2 = q\sum_{n=3}^{N} na_{n-1} + pq\sum_{n=3}^{N} na_{n-2} = q\sum_{n=2}^{N-1}(n+1)a_n + pq\sum_{n=1}^{N-2}(n+2)a_n = q(S_N - a_1 - Na_N) + q\sum_{n=2}^{N-1} a_n + pq(S_N - (N-1)a_{N-1} - Na_N) + 2pq\sum_{n=1}^{N-2} a_n$*, ainsi on a :* $(1-q-pq)S_N = 2p^2 - qNa_N - pq(N-1)a_{N-1} - pqNa_N + q\sum_{n=2}^{N-1} a_n + 2pq\sum_{n=1}^{N-2} a_n \leq 2p^2 + q\sum_{n=2}^{+\infty} a_n + 2pq\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2p^2 + q + 2pq$*. Ainsi les sommes partielles de la série à termes positifs* $\sum_{n\geq 1} na_n$ *sont majorées, donc cette série converge, puis* $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$*, donc quand* N *tend vers* $+\infty$*, on a :* $(1-q-pq)M = 2p^2 + q + 2pq$*, soit* $p^2M = 1+p$*, puis* $M = \dfrac{1+p}{p^2}$*, ce qui correspond au temps moyen d'attente pour avoir pour la première fois deux Piles consécutifs.*

3. *Une puce se déplace sur un plateau de* $n \geq 3$ *cases numérotées. Initialement, elle se trouve sur la case* 1*. À chaque pas, elle passe de la case qu'elle occupe à l'une des* $n-1$ *autres, ce de façon équiprobable et indépendamment de ses déplacements antérieurs. Déterminer, pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$*, la limite lorsque* p *tend vers* $+\infty$ *de la probabilité qu'elle se trouve sur la case* k *après* p *mouvements.*

4.3 Formule de Bayes

Proposition 4.3.1 (Formule de Bayes) *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soient deux événements A et B. On suppose que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nuls. On a :*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Démonstration : Voir la démonstration faite en sup.

La formule de Bayes permet de déterminer la probabilité de A sachant B, si l'on connaît les probabilités :

- de A
- de B
- de B sachant A.

Interprétation : Cette formule est souvent appelée formule de probabilité des causes, car elle permet en quelque sorte de remonter le temps. En effet, si l'événement B se produit après l'événement A, elle nous permet de déduire, de la probabilité $P(B|A)$ qui respecte la chronologie, la probabilité $P(A|B)$, qui, elle, remonte la chronologie.

Une reécriture possible de la formule précédente à l'aide des probabilités totales est :

Proposition 4.3.2 (Formule de Bayes) *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit B un événement de probabilité non nulle. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements. Alors :*

$$\forall i \in \mathbb{N},\ P(A_i|B) =$$

Démonstration :

Remarque 4.3.1 *Si A est dans $\mathcal{T}$, comme $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements, alors :*
$P(A|B) = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$.

Exemple 4.3.1 *On suppose qu'il existe $p \in]0,1[$ et $\alpha > 0$ tels que la probabilité p_n pour une famille d'avoir n enfants vérifie la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = \alpha p^n$, avec $\alpha = 1 - p$. On suppose que la probabilité d'avoir un garçon est la même que celle d'avoir une fille.*

1. *Déterminer la probabilité qu'une famille ait exactement deux enfants sachant qu'elle a exactement deux filles.*
   Nous rappelons une relation que nous avons vue dans le cours sur les séries entières :
   $\forall x \in]-1,1[,\ \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}\ \ (*).$
   Rappel de la démonstration : comme on peut dériver plusieurs fois terme à terme une série entière sur son intervalle de convergence, alors : $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{d^2}{dx^2}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ *et :* $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{2}{(1-x)^3}.$
2. *Déterminer la probabilité qu'une famille ait exactement deux garçons sachant qu'elle a exactement deux filles.*

4.4 Indépendance

Définition 4.4.1 (Indépendance de deux événements) *Deux événements A et B de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ sont dits indépendants si*

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

Remarque 4.4.1 1. *Si $P(A) = 0$, alors A est indépendant de tout événement B : $A \cap B \subset A$, donc :*
$P(A \cap B) \leq P(A) = 0$ *et donc* $P(A \cap B) = 0$, *puis :* $P(A \cap B) = 0 = P(A)\ P(B)$.

2. *ATTENTION : ne pas confondre l'indépendance de A et B (qui est une notion probabiliste $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$) et l'incompatibilité de A et B (qui est une notion ensembliste $A \cap B = \emptyset$). L'indépendance dépend de la probabilité dont est muni Ω.*
3. *La situation classique d'indépendance se rencontre souvent lors d'une succession d'expériences dont le résultat de chaque expérience n'influence pas les autres résultats.*

Proposition 4.4.1 *Soient A et B deux événements de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

- *A et B sont indépendants,*
- *A et $\bar{B}$ sont indépendants,*
- *$\bar{A}$ et B sont indépendants,*
- *$\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.*

Démonstration : Voir la démonstration de sup.

Proposition 4.4.2 (Indépendance et probabilité conditionnelle) *Soient A et B deux événements de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On suppose $P(B) > 0$. Alors les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A|B) =$*

Démonstration : Voir la démonstration de sup.

Définition 4.4.2 (Indépendance d'une famille) *Les événements d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ sont dit indépendants si pour toute partie finie J de I, on a :*

$$P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j)$$

Remarque 4.4.2

1. *On vérifie rarement l'indépendance, cela fait en général partie des hypothèses ou cela découle de l'indépendance connue d'autres événements.*
2. *Attention, l'indépendance deux à deux des événements n'implique pas l'indépendance de la famille. Contre-exemple : On jette deux dés non pipés, un dé noir et un dé blanc. On note A l'événement « le chiffre du dé noir est pair », B l'événement « le chiffre du dé blanc est impair »et C l'événement « les deux chiffres ont la même parité ». Montrer que A et C, A et B, C et B sont indépendants, mais que les trois événements ne le sont pas.*

   Ici $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. On est dans le cadre d'équiprobabilité. On a $P(A) = P(B) = 1/2$ et
   $P(C) = \dfrac{|\{1,3,5\}^2 \cup \{2,4,6\}^2|}{|\Omega|} = \dfrac{|\{1,3,5\}^2| + |\{2,4,6\}^2|}{|\Omega|} = \dfrac{3^2+3^2}{6^2} = 1/2.$
   $P(A \cap C) = \dfrac{|\{2,4,6\}^2|}{|\Omega|} = \dfrac{3^2}{6^2} = 1/4 = P(A)P(C)$ *et de même* $P(B \cap C) = P(B)P(C)$. *Enfin :*
   $P(A \cap B) = \dfrac{|\{2,4,6\} \times \{1,3,5\}|}{|\Omega|} = \dfrac{3\times 3}{6^2} = 1/4 = P(A)P(B).$
   Cependant : $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$.

Énonçons certains points intuitifs que l'on pourra utiliser sans les démontrer :

Proposition 4.4.3

1. *Toute sous-famille d'une famille d'événements indépendants est une famille d'événements indépendants.*
2. *Si les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont indépendants, alors les événements $(B_i)_{i\in I}$ sont indépendants, avec B_i dans $\{A_i, \overline{A_i}\}$, pour tout i dans I.*
3. *Si les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont indépendants, alors pour tout sous-ensemble disjoints J et K de I, les événements $\displaystyle\bigcap_{j\in J} A_j$ et $\displaystyle\bigcap_{k\in K} A_k$ sont indépendants, tout comme $\displaystyle\bigcup_{j\in J} A_j$ et $\displaystyle\bigcap_{k\in K} A_k$, $\displaystyle\bigcap_{j\in J} A_j$ et $\displaystyle\bigcup_{k\in K} A_k$ et enfin $\displaystyle\bigcup_{j\in J} A_j$ et $\displaystyle\bigcup_{k\in K} A_k$.*

Exemple 4.4.1

1. *On lance m dés non pipés, puis on laisse de côté ceux qui donnent 6. On relance les autres, en laissant à nouveau de côté ceux qui donnent 6, etc.*

(a) *On fixe un dé.* A_n *l'événement « ce dé est lancé au moins* n *fois ». Calculer* $P(A_n)$.

(b) *Soit* B_n *l'événement « on obtient* m *six en au plus* n *lancers ». Calculer* $P(B_n)$.

(c) *Étudier la limite de* $P(B_n)$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$. *Interpréter.*

2. *(Borel-Cantelli 2) On se donne* $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements indépendants. Soit* $B = \bigcap_{k=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p\right)$. *On suppose que* $\sum P(A_n)$ *diverge. Montrer que* $P(B) = 1$.

Application : *On joue à pile ou face avec une pièce donnant pile avec une probabilité* $p \in]0,1[$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *fixé. On se donne une séquence* S *de longueur* n *constituée de Pile ou Face fixée à l'avance. Montrer qu'il est est quasi certain d'avoir une infinité de fois la séquence* S *au cours d'un tirage infini.*

3. *Soit* $x \in]1,+\infty[$ *et on pose* $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

   On note $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$ *la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Ainsi,* $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, *etc.*

   (a) *Montrer que* $\mathbb{P}$ *définit une probabilité sur* $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ *en posant :*

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(x) n^x}.$$

   (b) *Montrer que, pour tout* $a \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^x}$.

   (c) *Montrer que les événements* $(p_i\mathbb{N}^*)_{i \in \mathbb{N}^*}$ *sont indépendants.*

   (d) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et on note* B_n *l'événement* $B_n = \overline{\bigcup_{k=1}^{n} (p_k\mathbb{N}^*)}$. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\{1\})$.

   En déduire que : $\forall x \in]1,+\infty[$, $\quad \dfrac{1}{\zeta(x)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$.

   (e) *Montrer que la série* $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$ *diverge. Nous rappelons que* $\lim\limits_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$, *car*

   $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$ *(voir chapitre 8).*