1 Continuité

Proposition 1.0.1 (Continuité de $x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$) *Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.) On suppose que*

(i) [Continuité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.

(ii) [Régularité par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.

(iii) [Domination] Il existe une fonction φ continue par morceaux sur J, à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ est continue sur I.

Démonstration :

Remarque 1.0.1 *1. L'hypothèse de domination assure l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$.*

2. Bien vérifier que la fonction de domination φ soit indépendante de x.

3. L'hypothèse de domination est essentielle : la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-tx}dt$ n'est pas continue en 0, étant donné que $F(0) = 0$ alors que pour tout $x > 0$: $F(x) = \left[-e^{-tx}\right]_{t=0}^{+\infty} = 1$. En fait on ne peut pas dominer $t \mapsto xe^{-tx}$ par une fonction intégrable indépendante de x.

Exemple 1.0.1 *1. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

2. *Déterminer* $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_0^x \sqrt{\dfrac{1+t^2}{x^2-t^2}}dt$.

Parfois l'hypothèse de domination est impossible à obtenir sur I tout entier. Voici une adaptation de la proposition précédente :

Proposition 1.0.2 (Continuité de $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ avec domination locale) *Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.) On suppose que*

(i) [Continuité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.

(ii) [Régularité par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.

(iii) [Domination locale] Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, il existe une fonction φ continue par morceaux sur J, à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_J f(x,t)dt$ est continue sur I.

Démonstration : Soit $x_0 \in I$. Il existe un segment $[a,b]$ non réduit à un point tel que : $x_0 \in [a,b] \subset I$, avec x_0 dans son intérieur si x_0 n'est pas borne de I. Grâce à la proposition 1.0.1, $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ est continue sur $[a,b]$ et donc en particulier en x_0. Ceci étant valable pour tout x_0 de I, on a donc la continuité sur I tout entier.

Exemple 1.0.2 *Pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-2t}}{x+t}dt$.*

1. *Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.*
2. *Étudier la monotonie de F sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Proposition 1.0.3 (Continuité de $x \mapsto \int_J f(x,t)$ définie sur un EVN) *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times J$, où A est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

(i) Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.

(ii) Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.

(iii) Il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times J \quad |f(x,t)| \ \leq \ \varphi(t).$$

Alors pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J, et la fonction F définie sur A par $F(x) = \int_J f(x,t)\,dt$ est continue sur A.

L'hypothèse de domination peut être remplacée par une hypothèse de domination au voisinage de tout point :
(iii bis) pour tout $a \in A$, il existe un voisinage V de a dans A (par exemple une boule fermé $\overline{B}(a,r)$) et une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in V \times J \quad |f(x,t)| \ \leq \ \varphi(t).$$

Démonstration : Identique aux deux propositions précédentes.

Exemple 1.0.3 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue et bornée.*
Montrer que $F : z \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt$ est continue sur $H = \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0\}$.

Théorème 1.0.1 (Théorème de convergence dominée à paramètre continu) *Soit* $(f_\lambda)_{\lambda\in I}$ *une famille de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle* J. *Soit* $\lambda_0 \in \overline{I}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$. *On suppose que :*

1. *pour tout* $\lambda \in I$, *la fonction* f_λ *est continue par morceaux sur* J *;*
2. *pour tout* $u \in J$, *on a :* $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda(u) = f(u)$, *et la fonction* f *ainsi définie est continue par morceaux sur* J *;*
3. *(Domination) il existe une fonction* φ *continue par morceaux positive et intégrable sur* J *telle que pour tout* $\lambda \in I$ *et pour tout* $u \in J$ *:* $|f_\lambda(u)| \le \varphi(u)$ *(hypothèse de domination).*

Alors, les fonctions f_λ *et leur limite* f *sont intégrables sur* J *et :*

$$\int_J \lim_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda(u)du = \lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_J f_\lambda(u)du = \int_J f(u)du.$$

Démonstration : Pour $\lambda \in I$, la majoration $|f_\lambda| \le \varphi$ prouve l'intégrabilité de f_λ sur J.
Utilisons la caractérisation séquentielle d'existence d'une limite et le théorème de convergence dominé. Soit $\lambda_0 \in \overline{I}$ un point adhérent à I (dans $\overline{\mathbb{R}}$) et $(t_n)_n$ une suite de points de I convergeant vers λ_0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la fonction g_n définie sur J par : $g_n(u) = f_{t_n}(u)$. Alors :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue par morceaux sur J ;
2. la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge simplement sur J vers la fonction f ;
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $u \in J$, $|g_n(u)| \le \varphi(u)$.

D'après le théorème de convergence dominée, la fonction f est intégrable sur J et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_J g_n = \int_J f$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_J f_{t_n} = \int_J f$.
D'après la caractéristion séquentielle de l'existence d'une limite : $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}\int_J f_\lambda = \int_J f = \int_J \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda$.

Remarque 1.0.2

1. *(IMPORTANT) Ce résultat sera souvent appliqué lorsque l'on cherchera* $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}\int_J f(\lambda,t)dt$. *Il suffira de poser* $f_\lambda : t \mapsto f(\lambda,t)$.
2. *Ce résultat sert surtout lorsque* $\lambda_0 = \pm\infty$, *car sinon on pourra appliquer le plus souvent les propositions précédentes.*

   Si λ_0 *est réel, ce théorème permettra par exemple de prolonger par continuité* $\lambda \mapsto \int_J f(\lambda,t)dt$ *en* λ_0.
3. *Si* $\lambda_0 = +\infty$ *la domination sur un intervalle du type* $[a,+\infty[$, *suffit car nous cherchons une limite en* $+\infty$.

Exemple 1.0.4

1. *Pour* x *dans* $\mathbb{R}_+^*$, *on pose* $F(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-2t}}{x+t}dt$.

   Déterminer un équivalent de F *au voisinage de* $+\infty$ *et* 0.

2. ***(Cesàro version intégrale)*** *Soit* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *continue et telle que :* $\lim\limits_{+\infty} g = \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A}\int_0^A g(t)dt = \ell$.

Nous proposons deux méthodes.

- *Soit* $A \in \mathbb{R}_+^*$. *On pose* $u = t/A$, *ce qui donne :* $\displaystyle\frac{1}{A}\int_0^A g(t)dt = \int_0^1 g(uA)du$.

  On pose $f_A : u \mapsto g(uA)$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^* \times [0,1]$.

  — *Pour* $A \in \mathbb{R}_+^*$, *la fonction* f_A *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+^*$.

  — *Soit* $u \in [0,1]$. *On a :* $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} f_A(u) = f(u) = \begin{cases} \ell & si \quad u \in]0,1] \\ g(0) & si \quad u = 0 \end{cases}$ *et* f *est continue par morceaux sur* $[0,1]$.

  — *La fonction* g *est bornée sur* $\mathbb{R}_+$, *car elle admet une limite finie en* $+\infty$, *donc :* $\forall (A,u) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,1]$, $|f_A(u)| \leq \|g\|_\infty$ *et* $u \mapsto \|g\|_\infty$ *est continue par morceaux et intégrable sur* $[0,1]$.

  Grâce au théorème de convergence dominé à paramètre continu, on a : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A}\int_0^A g(t)dt = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 \ell du = \ell$.

- *On a* $g(t) - \ell \underset{t\to+\infty}{=} o(1)$. *Or la fonction* $t \mapsto 1$ *est continue par morceaux, positive et non intégrable sur* $[0,+\infty[$, *donc on a :*

  $\displaystyle\int_0^A (g(t)-\ell)dt \underset{A\to+\infty}{=} o\left(\int_0^A dt\right)$, *soit :* $\displaystyle\frac{1}{A}\int_0^A g(t)dt - \ell \underset{A\to+\infty}{=} o\left(\frac{A}{A}\right) \underset{A\to+\infty}{=} o(1)$, *donc* $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{A}\int_0^A g(t)dt - \ell\right) = 0$.

2 Dérivabilité

Proposition 2.0.1 (Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$**)** *Soit* f *une fonction définie sur* $I \times J$ *à valeurs dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *(*I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$.*) On suppose que*

(i) [Dérivabilité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, *la fonction* $x \longmapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I.

(ii) [Régularité de f *par rapport à la variable d'intégration] Pour tout* $x \in I$, *la fonction* $t \longmapsto f(x,t)$ *est continue par morceaux et intégrable sur* J.

(iii) [Régularité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *par rapport à la variable d'intégration] Pour tout* $x \in I$, *la fonction* $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* J.

(iv) [Domination] Il existe une fonction φ *continue par morceaux sur* J, *à valeurs réelles positives, intégrable sur* J *telle que*

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *et* $\forall x \in I, \quad g'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Démonstration : Soit $x_0 \in I$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite nulle avec tous les h_n non nuls.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{g(x_0+h_n)-g(x_0)}{h_n} = \displaystyle\int_J \frac{f(x_0+h_n,t)-f(x_0,t)}{h_n}dt$. On note alors f_n la fonction $t \longmapsto \dfrac{f(x_0+h_n,t)-f(x_0,t)}{h_n}$ définie sur J.

- D'après (i), les fonctions f_n sont continues par morceaux sur J et intégrables.
- D'après (ii), la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $t \in J$ on a : $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ donc $f_n(t) = \dfrac{1}{h_n}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h_n} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)dx$.
  L'hypothèse de domination donne alors :
  $|f_n(t)| \leq \left|\dfrac{1}{h_n}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h_n} \varphi(t)dx\right| = \left|\dfrac{\varphi(t)}{h_n}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h_n} dx\right| = \varphi(t)$, car $\varphi(t)$ est indépendant de x.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, qui donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_J f_n(t)dt = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)dt$, autrement dit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{g(x_0+h_n)-g(x_0)}{h_n} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)dt$. Le critère séquentiel montre que g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)dt$.

Exemple 2.0.1 *1. Notons* $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt$ *pour* x *réel. Montrer que :* $f'' - f = 0$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$*, puis en déduire* f *sur* $\mathbb{R}$*.*

2\. (a) *Déterminer le domaine de définition de* $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\text{Arctan}\,(x\tan\theta)}{\tan\theta} d\theta$.

(b) *Déterminer* F *sur son ensemble de définition.*

(c) *En déduire les valeurs* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan\theta} d\theta$ *et de* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\theta)) d\theta$.

(a) *Posons* $f : (x,\theta) \mapsto \dfrac{\text{Arctan}\,(x\tan\theta)}{\tan\theta}$ *définie sur* $\mathbb{R}\times]0;\pi/2[$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, *la fonction* $\theta \mapsto f(x,\theta)$ *est continue par morceaux sur* $]0;\pi/2[$ *et se prolonge par continuité aux bornes, car :* $f(x,\theta) \xrightarrow[\theta\to 0^+]{} x$ *et* $f(x,\theta) \xrightarrow[\theta\to(\pi/2)^-]{} 0$.
Ainsi F *est définie sur* $\mathbb{R}$.

(b)
- *Soit* $\theta \in]0,\pi/2[$, $x \mapsto f(x,\theta)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.
- *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *La fonction* $\theta \mapsto f(x,\theta)$ *est continue par morceaux et intégrable sur* $]0,\pi/2[$, *grâce à la première question.*
- *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *La fonction* $\theta \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\theta) = \dfrac{1}{1+x^2\tan^2\theta}$ *est continue par morceaux sur* $]0;\pi/2[$.
- *On a :* $\forall (x,\theta) \in \mathbb{R}\times]0;\pi/2,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial\theta}(x,\theta)\right| \leq 1 = \varphi(\theta)$ *avec* φ *continue pat morceaux et intégrable sur* $]0,\pi/2[$.

F *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et* $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+x^2\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

Grâce au changement de variable $\mathcal{C}^1$ *bijectif* $t = \tan\theta$, *on a :* $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

Pour $x^2 \neq 0$ *et* $x^2 \neq 1$, *on décompose en éléments simples la fraction* $\dfrac{1}{(1+x^2X)(1+X)} = \dfrac{\frac{x^2}{x^2-1}}{1+x^2X} + \dfrac{\frac{1}{1-x^2}}{1+X}$ *et on en déduit en prenant* t^2 *au lieu de* X : $\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \dfrac{\frac{x^2}{x^2-1}}{1+x^2t^2} + \dfrac{\frac{1}{1-x^2}}{1+t^2}$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, *on a :*

$$F'(x) = \frac{x}{x^2-1}\cdot\left[\text{Arctan}\,(tx)\right]_{t=0}^{t=\pi/2} + \frac{1}{1-x^2}\cdot\left[\text{Arctan}\,(t)\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{1}{x+1}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{x+1}\cdot\frac{\pi}{2}$$

La fonction F' *étant continue et paire, on a :* $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \dfrac{1}{|x|+1}\cdot\dfrac{\pi}{2}$.

Or on a : $F(0) = 0$, *donc :* $F(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) \text{ si } x \geq 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x) \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

(c) *Pour* $x = 1$, *on obtient* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

Par intégration par parties : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta = \underbrace{\left[-\theta\ln(\sin\theta)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ *et donc :* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

Proposition 2.0.2 (Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$**)** *Soit* f *une fonction définie sur* $I \times J$ *à valeurs dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *(*I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$.*) On suppose que*

(i) *[Dérivabilité par rapport au paramètre] Pour tout* $t \in J$, *la fonction* $x \longmapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I.

(ii) *[Régularité de* f *par rapport à la variable d'intégration] Pour tout* $x \in I$, *la fonction* $t \longmapsto f(x,t)$ *est continue par morceaux et intégrable sur* J.

(iii) *[Régularité de* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *par rapport à la variable d'intégration] Pour tout* $x \in I$, *la fonction* $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* J.

(iv) [Domination locale] Pour tout segment $[a, b] \subset I$, il existe une fonction φ continue par morceaux sur J, à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times J, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_J f(x, t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I, \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt$.

Démonstration : La preuve est semblable à celle de la proposition 1.0.2, car la dérivablité et la continuité sont des propriétés locales.

Exemple 2.0.2

1. *Montrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*
2. *Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ F'(x) = \frac{-1}{1 + x^2}$.*
3. *En déduire l'expression de F sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Remarque 2.0.1 *Ainsi dériver* $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ *permet d'avoir parfois une expression simple de* F' *ou d'avoir une équation différentielle vérifiée par* F*, ce qui nous permet d'avoir* F*.*

Corollaire 2.0.1 ($x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ **de classe** $\mathcal{C}^k$**)** *Soient* $f : I \times J \to \mathbb{K}$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$ *telles que*

(i) [Caractère $\mathcal{C}^k$ *en le paramètre] Pour tout* t *dans* J*,* $x \mapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I*.*

(ii) [Régularité des dérivées $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}$ *par rapport à la variable d'intégration] Pour tout* j *dans* $[\![0, k-1]\!]$ *et pour tout* x *dans* I*,* $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ *est continue par morceaux et intégrable sur* J*.*

(iii) [Régularité des dérivées $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ *par rapport à la variable d'intégration] Pour tout* x *dans* I*,* $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* J*.*

(iv) [Domination] Il existe une fonction φ_k *continue par morceaux sur* J*, à valeurs réelles positives, intégrable sur* J *telle que*

$$\forall (x,t) \in I \times J, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \le \varphi_k(t).$$

(iv bis) [Domination locale] Pour tout segment $[a,b]$ *inclus dans* I*, il existe une fonction* φ_k *continue par morceaux sur* J*, à valeurs réelles positives, intégrable sur* J *telle que*

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \le \varphi_k(t).$$

Alors, $g : x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I *et*

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \forall x \in I,\ g^{(j)}(x) = \int_J \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt.$$

Démonstration : Démontrons cela par récurrence sur k dans le cas (iv) bis avec la domination locale.
Pour $k = 1$, c'est la proposition 2.0.2.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et on suppose la proposition pour k et on se donne f vérifiant les propriétés de l'énoncé pour $k+1$.
Montrons d'abord que g est de classe $\mathcal{C}^k$. Il ne reste que l'hypothèse de domination locale à vérifier.
Soient $[a,b]$ un segment inclus dans I et φ_{k+1} à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que que : $\forall (x,t) \in [a,b] \times J, \left|\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)\right| \le \varphi_{k+1}(t)$. Pour tout (x,t) de $[a,b] \times J$, on a : $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t) + \int_a^x \dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)dx$. Ainsi : $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \le \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right| + \int_a^x \left|\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)\right| dx \le \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right| + \int_a^b \left|\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)\right| dx \le \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right| + \int_a^b \varphi_{k+1}(t)dx = \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right| + (b-a)\varphi_{k+1}(t)$. On pose $\varphi_k : t \mapsto \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right| + (b-a)\varphi_{k+1}(t)$ et par hypothèses cette fonction est continue par morceaux et intégrable sur I. Ainsi grâce à l'hypothèse de récurrence au rang k, on a : g de classe $\mathcal{C}^k$ et $g^{(k)} = h = x \mapsto \int_J \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$. Montrons que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

- Pour x fixé dans I, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
- Pour t fixé dans J, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- Pour x fixé dans I, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.

- Il existe une fonction φ_{k+1} intégrable sur I telle que : $\forall (x,t) \in I \times J,\ \left|\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)\right| \leq \varphi_{k+1}(t)$.

La proposition 2.0.2, nous permet de dire que $h : x \mapsto \displaystyle\int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :
$\forall x \in I,\ g^{(k+1)}(x) = h'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)dt$.
Nous avons démontré la proposition au rang $k+1$, ce qui achève la récurrence.

Pour montrer la proposition avec l'hyptohèse (iv), comme celle-ci implique l'hypothèse de domination locale, on a le résultat.

Corollaire 2.0.2 ($x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ de classe $\mathcal{C}^\infty$) *Soient $f : I \times J \to \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ telles que*

i) [Caractère $\mathcal{C}^\infty$ en le paramètre] Pour tout t dans J, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

ii) [Régularité des dérivées $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}$ par rapport à la variable d'intégration] Pour tout j dans $\mathbb{N}$ et pour tout x dans I, $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.

iii) [Domination] Pour tout j de $\mathbb{N}$, existe une fonction φ_j continue par morceaux sur J, à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J,\ \left|\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\right| \leq \varphi_j(t).$$

OU

iii) bis [Domination locale] Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, pour tout j de $\mathbb{N}$, existe une fonction φ_j continue par morceaux sur J, à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J,\ \left|\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\right| \leq \varphi_j(t).$$

Dans ce cas g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et : $\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ g^{(j)}(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt$.

Remarque 2.0.2 *1. La domination locale s'utilise souvent lorsque I est un intervalle ouvert ou non borné.*

2. Dans le corollaire précédent, on peut avoir la domination qu'à partir d'un certain rang k, mais il faut montrer alors que les fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ sont intégrables sur J pour $j < k$.

Exemple 2.0.3 *1. Pour x dans $\mathbb{R}_+$, on pose $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}dt$. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner ses dérivées successives. Est-ce que S est DSE au voisinage de 0 ?*

Soit $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+xt}$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

- *Soit $t \in \mathbb{R}_+$. $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.*
- *Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $j \in \mathbb{N}$. On a : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) = \dfrac{e^{-t}(-1)^j j! t^j}{(1+xt)^{j+1}}$ (par récurrence). Ainsi $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.*
- *Soit $j \in \mathbb{N}$. On a : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ \left|\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\right| \leq j! t^j e^{-t} = \varphi_j(t)$. La fonction φ_j est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (par croissance comparée $\varphi_j(t) = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$).*

S est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et :
$\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ S^{(j)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt = (-1)^j j! \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} t^j}{(1+xt)^{j+1}}dt$.
On a : $\forall j \in \mathbb{N},\ S^{(j)}(0) = (-1)^j j! \displaystyle\int_0^{+\infty} t^j e^{-t} dt = (-1)^j j! j!$ (voir à la fin avec Γ).
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a : $\left|\dfrac{S^{(j)}(0)x^j}{j!}\right| = j! x^j$. On a : $\dfrac{(j+1)! x^{j+1}}{j! |x|^j} = (j+1)x \underset{j \to +\infty}{\to} +\infty > 1$. Grâce à la règle de d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{j \geq 0} \frac{S^{(j)}(0)x^j}{j!}$ diverge grossièrement, donc le rayon de convergence de cette série entière est nul et S n'est pas DSE au voisinage de 0.

2. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Montrer que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

3 Compléments

3.1 Intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$G(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+u^2))}{1+u^2}du \ ; \ H(x) = \left(\int_0^x \exp(-u^2)du\right)^2.$$

1. Montrer que G et H sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser les dérivées G' et H'. En déduire que la fonction $G+H$ est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $\pi/4$.
2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-u^2)du$.

1. Sur $\mathbb{R}\times[0,1]$, on définit $f : (x,u) \mapsto \dfrac{\exp\left(-x^2\left(1+u^2\right)\right)}{1+u^2}$.

   De plus, on a : $\forall (x,u) \in \mathbb{R}\times[0,1]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u) = (-2x)\, e^{-x^2(1+u^2)}$.
   - Soit $u \in [0,1]$. La fonction $x \mapsto f(x,u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $u \mapsto f(x,u)$ est continue par morceaux sur $[0,1]$ et donc intégrable sur $[0,1]$, car on est sur un segment.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $u \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u)$ est continue par morceaux sur $[0,1]$.
   - Soit $[a,b]$, un segment quelconque inclus dans $\mathbb{R}$. On a :

   $$\forall (x,u) \in [a,b]\times[0,1],\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right| = |-2x|\, e^{-x^2(1+u^2)} \leq 2\,|x| \leq 2\max(|a|,|b|).$$

   Or la fonction $t \mapsto 2\max(|a|,|b|)$ est continue (c'est une constante) et intégrable sur le segment $[0,1]$.

   Donc G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = \displaystyle\int_0^1 (-2x)\, e^{-x^2(1+u^2)}du$.

   $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}du$ est une primitive de la fonction continue $u \mapsto e^{-u^2}$. h est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = e^{-x^2}$. Comme $H = h^2$, H est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $H' = 2hh'$ donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ H'(x) = 2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}du$.

   Le changement de variable $u = tx$ (qui est $\mathcal{C}^1$ bijectif de $[0,1]$ dans $[0,x]$) donne : $\forall x \in \mathbb{R},\ H'(x) = 2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2t^2}x\,dt = -G'(x)$.

   On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $H'(x)+G'(x) = 0$. En intégrant on en déduit que $H+G$ est constante. Or $H(0) = 0$ et $G(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = [\operatorname{Arctan}(u)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

   Donc on a : $H+G = \dfrac{\pi}{4}$.
2. G est une fonction positive comme intégrale d'une fonction positive , les bornes étant dans le bon sens.

   On remarque que : $\forall (x,u) \in \mathbb{R}\times[0,1]$, $\dfrac{\exp\left(-x^2\left(1+u^2\right)\right)}{1+u^2} = e^{-x^2}\dfrac{e^{-x^2u^2}}{1+u^2}$.

De plus comme : $\forall (x,u) \in \mathbb{R} \times [0,1],\ e^{-x^2u^2} \leq 1$ on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq G(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$. Donc par encadrement : $\lim\limits_{+\infty} G = 0$.

Et donc comme $G + H = \pi/4$ on a : $H = \pi/4$, ce qui montre au passage l'existence de I, car $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ est positif et donc :

$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\lim\limits_{+\infty} H} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3.2 Fonction Gamma

On pose : $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. On rappelle $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $\Gamma^{(j)}(x)$ sous forme d'intégrale, pour $j \in \mathbb{N}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
4. En déduire :
   (a) $\Gamma(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
   (b) un équivalent de Γ en 0^+.
5. Étudier les variations de Γ.
6. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} \Gamma$.
7. Montrer que $\ln(\Gamma)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
8. Déterminer $\Gamma(1/2)$.

3.3 Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $g \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^b g(t)e^{ixt}dt = 0$.

Ce résultat est encore valable pour g continue par morceaux sur $[a,b]$.

• Commençons par montrer le résultat pour g constante : $\forall d \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_a^b de^{ixt}dt = \frac{de^{ixb} - de^{ixa}}{ix} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

• Montrons maintenant le résultat pour une fonction en escalier. Soit $(c_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à g et on note $d_i = g|_{]c_i,c_{i+1}[}$, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$.

On a donc : $\displaystyle\int_a^b g(t)e^{ixt}dt = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{c_i}^{c_{i+1}} d_i e^{ixt}dt \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, car $\displaystyle\int_{c_i}^{c_{i+1}} d_i e^{ixt}dt \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, grâce au premier point, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$.

• Maintenant pour g continue par morceaux. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par densité des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$, il existe ψ une fonction en escalier telle que $\|g-\psi\|_\infty \leq \varepsilon$. On a donc :
$\displaystyle\left|\int_a^b (g(t)-\psi(t))e^{ixt}dt\right| \leq \int_a^b |g(t)-\psi(t)|.|e^{ixt}|dt = \int_a^b \|g-\psi\|_\infty \leq (b-a)\varepsilon$.

On a grâce au deuxième point : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^b \psi(t)e^{ixt}dt = 0$. Il existe donc $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in [A, +\infty[,\ \displaystyle\left|\int_a^b \psi(t)e^{ixt}dt\right| \leq \varepsilon$.

Ainsi pour $x \geq A$, on a $\displaystyle\left|\int_a^b g(t)e^{ixt}dt\right| = \left|\int_a^b (g(t)-\psi(t))e^{ixt}dt + \int_a^b \psi(t)e^{ixt}dt\right| \leq \left|\int_a^b (g(t)-\psi(t))e^{ixt}dt\right| + \left|\int_a^b \psi(t)e^{ixt}dt\right| \leq (b-a+1)\varepsilon$.

On a donc : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq A \Rightarrow \displaystyle\left|\int_a^b g(t)e^{ixt}dt\right| \leq (b-a+1)\varepsilon$, d'où le résultat.

Applications : **(Séries de Fourier)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique.

On pose $c_n(f) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $S_N : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$ pour $N \in \mathbb{N}$.

Nous avons vu dans le chapitre 3 que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_N(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u) - f(x) + f(x-u) - f(x)}{2\sin(u/2)} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)u\right)du.$$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$.

Montrons que $\phi : u \mapsto \dfrac{f(x+u) - f(x) + f(x-u) - f(x)}{2\sin(u/2)}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,\pi]$. On a :

$$\phi(u) \underset{u\to 0}{=} \frac{f(x) + uf'(x) - f(x) + f(x) - uf'(x) - f(x) + o(u)}{u + o(u)} \underset{u\to 0}{=} \frac{o(1)}{1+o(1)} \underset{u\to 0}{\to} 0.$$

Ainsi ϕ se prolonge en une fonction continue sur $[0,\pi]$.

Grâce à ce qui précède, on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(u)e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)u}du = 0$, puis :

$\displaystyle\lim_{N\to+\infty}[S_N(f)(x) - f(x)] = 0$, ce qui donne la convergence simple vers f.

3.4 Produit de convolution

Soient f une fonction continue, à valeurs réelles et intégrable sur $\mathbb{R}$ et g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, à valeurs réelles telle que pour tout k de $\mathbb{N}$, la fonction $g^{(k)}$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornées sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $(f*g)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$.

1. Montrer que $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que : $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f*g)(x) = (g*f)(x)$.
3. Montrer que $f*g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et exprimer ses dérivées successives.
4. Montrer que si $\displaystyle\lim_{+\infty} g = 0$, alors $\displaystyle\lim_{+\infty} f*g = 0$.
5. Soit E l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dont toutes les dérivées sont bornées. Montrer que l'application $T : g \mapsto f*g$ est continue de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $(\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

6. Montrer que si f et g sont nulles en dehors d'un segment $[-A, A]$, alors $f * g$ est nulle en dehors d'un segment $[-B, B]$.
7. **(Approximation de l'unité)**
Soit une suite de fonctions $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & \delta_n \text{ est positive sur } \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \delta_n = 1 \\ \forall \varepsilon > 0, & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \delta_n = 0 \end{cases}$$

On appelle une telle suite de fonctions approximation de l'unité.
   (a) Soit f uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et bornée. Montrer que $(\delta_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Nous allons donner une autre preuve du théorème de Weierstrass.
      i. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$. Montrer que f est bornée et uniformément continue.
      ii. Pour tout entier naturel n, on note h_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $h_n(t) = \dfrac{(1-t^2)^n}{\lambda_n}$ et nulle en dehors de $[-1, 1]$, le réel λ_n étant donné par la formule $\lambda_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^n \, dt$. Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.
      iii. Montrer que si f est une fonction continue à support inclus dans $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, alors $f * h_n$ est une fonction polynomiale sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ et nulle en dehors de l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$.
      iv. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, par composition et produit.

   On a : $\forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)g(x-t)| \leq |f(t)| \times \|g\|_\infty$. Or f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $t \mapsto f(t)g(x-t)$ l'est aussi, par comparaison. Ainsi $f * g(x)$ existe.

   De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f * g(x)| \leq \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)| dt \leq \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \|f\|_1 \|g\|_\infty$. La constante $\|f\|_1\|g\|_\infty$ majore $|f * g|$ sur $\mathbb{R}$, donc : $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

2.

3.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $k_x : t \mapsto f(t)g(x-t)$.
   - Pour tout x de $\mathbb{R}$, la fonction k_x est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   - Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} k_x(t) = 0$ et la fonction nulle est continue par morceux sur $\mathbb{R}$.

- On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R},\ |k_x(t)| \leq \|g\|_\infty |f(t)| = \varphi(t)$ et la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Grâce au théorème de convergence dominé à paramètre continu, on a :

$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k_x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dt$, soit $\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = 0$.

5.

6. Comme f est nulle en dehors de $[-A, A]$, alors $f * g(x) = \int_{-A}^{A} f(t)g(x-t)dt$. Soit t dans $[-A, A]$, alors : $-A \leq -t \leq A$.

Ainsi
- si on a : $x > 2A$, alors $x - t > 2A - A = A$, donc : $g(x-t) = 0$ et donc $f * g(x) = 0$.
- si on a : $x < -2A$, alors $x - t < -2A + A = -A$, donc : $g(x-t) = 0$ et donc $f * g(x) = 0$.

7. (a)

(b)

i. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction f est uniformément continue sur le segment $[-A, A]$, donc il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x, y \in [-A, A],\ |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$ tels que $|x - y| \leq \eta$. On peut supposer $x \leq y$. Si on a : $x \leq y \leq -A$, alors $|f(x) - f(y)| = 0$. Si on a $x \leq -A \leq y \leq A$, alors $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(-A)| + |f(-A) - f(y)| = |f(A) - f(y)| \leq \varepsilon$. Si $-A \leq x \leq y \leq A$, alors : $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Si $-A \leq x \leq A \leq y$, alors $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| = |f(x) - f(A)| \leq \varepsilon$. Enfin si $A \leq x \leq y$, alors $|f(x) - f(y)| = 0$. Ainsi dans tous les cas, on a : $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
Le caractère borné vient du fait que f soit continue sur e compact $[-A, A]$.

ii. • Il est clair que $h_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} h_n = \int_{-1}^{1} h_n = 1$.
• Soit $\varepsilon > 0$, alors :
-si $\varepsilon \geq 1$, $\int_{|t|>\varepsilon} h_n = 0$.
-si $\varepsilon \in]0, 1[$, par parité de h_n, on obtient $\int_{|t|\geq\varepsilon} h_n = \frac{2}{\lambda_n} \int_{\varepsilon}^{1} (1 - t^2)^n dt \leq \frac{2}{\lambda_n}(1 - \varepsilon^2)^n$, or
$\lambda_n = 2\int_0^1 (1 - t^2)^n dt \geq 2\int_0^1 (1 - t)^n dt = \frac{2}{n+1}$, ce qui entraîne que :
$\int_{|t|\geq\varepsilon} h_n \leq (n + 1)(1 - \varepsilon^2)^n \longrightarrow 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.

iii. • Pour le fait d'être nulle en dehors de $[-3/2, 3/2]$, cela provient de la question **6**.
• $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $(f * h_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)h_n(x - t)dt = \frac{1}{\lambda_n} \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \left(1 - (x - t)^2\right)^n dt$, or
$\forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], x \longmapsto (1 - (x - t)^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k(t)x^k$, avec a_k des fonctions continues (polynomiales en t) donc :
$\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $(f * h_n)(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{1}{\lambda_n} \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)a_k(t)\right) x^k$.

iv. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et soit $[c, d]$ contenant strictement $[a, b]$.
Prolongeons f en une fonction continue, nulle en dehors de $[c, d]$ et soit
$\varphi : t \longmapsto (d - c)t + \frac{c + d}{2}$, alors $g = f o \varphi$ est continue, nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et d'après g est limite uniforme d'une suite $g * h_n$ qui est , polynômiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, donc comme φ est affine non constante, alors φ^{-1} est aussi affine, donc la fonction polynôme $(g * h_n) \circ \varphi^{-1}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

3.5 Transformée de Laplace

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $s \in \mathbb{C}$, lorsque cela a un sens on pose : $L(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-xs} f(x)dx$.

1. On suppose que $L(f)(s_0)$ converge pour une certain $s_0 \in \mathbb{C}$. On pose $\alpha_0 = \Re e(s_0)$.
Montrer que pour s dans $\mathbb{C}$ si on a : $\Re e(s) > \alpha_0$, alors $L(f)(s)$ converge.

On pose $\sigma(f) = \inf \left\{ \Re e(s) \mid \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \text{ converge} \right\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, avec $\sigma(f) = +\infty$ si l'intégrale ne converge jamais et $\sigma(f) = -\infty$ si l'intégrale converge tout le temps.

2. Montrer que :
   (a) si $\Re s > \sigma$, $L(f)(s)$ est défini ;
   (b) si $\Re s < \sigma$, $L(f)(s)$ n'est pas défini.
3. On note $H = \{s \in \mathbb{C},\ \Re e(s) > \sigma\}$. Montrer que $L(f)$ est continue sur H.
4. (a) On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge, donc $\sigma(f) \leq 0$.

   Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 0} L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f$ (avec $x \in \mathbb{R}$), ce qui assure la continuité de $L(f)$ sur $[0 + \infty[$.

   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
5. **(Un théorème taubérien)** On suppose que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xf(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} = L(f)(\alpha) = \mu \in \mathbb{C}$.

   L'exemple 1.0.4 permet de dire que : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{A} \int_0^A x|f(x)|dx = 0$.

   Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et que $\mu = \displaystyle\int_0^{+\infty} f$.

1.

2.

3. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $H_r = \{s \in \mathbb{C},\ \Re e(s) > \sigma + r\}$. On utilise l'expression $\mathcal{L}(f)(s) = (s - \sigma - r)\int_0^{+\infty} e^{-x(s-\sigma-r)}F(x)dx$ pour montrer la continuité comme dans l'exemple 1.0.1.

4. (a)

(b) Dans l'exemple 2.0.2, on a vu que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$.

Or $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge, donc on a la continuité en 0 dans l'expression précédente, d'où quand x tend vers 0 par valeurs supérieures : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

5. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall t \geq M,\ |tf(t)| \leq \varepsilon$ et : $\forall \alpha \in]0, \eta],\ \left|\mu - \int_0^{+\infty} f(x)e^{-\alpha x}dx\right| \leq \varepsilon$.

On rappelle que : $\forall u \in \mathbb{R},\ 1 - u \leq e^{-u}$, soit : $\forall u \in \mathbb{R},\ 1 - e^{-u} \leq u$.
Soient $A \geq M$ et $\alpha \in]0, \eta]$.

$$\left|\mu - \int_0^A f(x)dx\right| \leq \left|\mu - \int_0^{+\infty} f(x)e^{-\alpha x}dx\right| + \left|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-\alpha x}dx - \int_0^A f(x)dx\right| \leq \varepsilon + \int_0^A (1 - e^{-\alpha x})|f(x)|dx + \int_A^{+\infty} |f(x)|e^{-\alpha x}dx$$

$$\leq \varepsilon + \alpha \int_0^A x|f(x)|dx + \int_A^{+\infty} |f(x)|e^{-\alpha x}dx \leq \varepsilon + \alpha \int_0^A x|f(x)|dx + \varepsilon \int_A^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x}dx$$

$$\leq \varepsilon + \alpha \int_0^A x|f(x)|dx + \varepsilon \int_A^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{A}dx = \varepsilon + \alpha \int_0^A x|f(x)|dx + \varepsilon \frac{e^{-\alpha A}}{A\alpha}.$$

Soit maintenant $A \geq M' = \max(M, 1/\eta)$ et on prend $\alpha = \frac{1}{A}$ qui est dans $]0, \eta)$ et on a :

$$\left|\mu - \int_0^A f(x)dx\right| \leq \varepsilon(1 + e^{-1}) + \frac{1}{A}\int_0^A x|f(x)|dx.$$

Grâce au rappel, il existe $M'' \geq M'$ tel que : $\forall A \geq M'',\ \frac{1}{A}\int_0^A x|f(x)|dx \leq \varepsilon$, puis : $\forall A \geq M'',\ \left|\mu - \int_0^A f(x)dx\right| \leq \varepsilon(2+e^{-1})$, ainsi $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f = \mu$.