1 Rappels de sup sur les espaces préhilbertiens

1.1 Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.1.1 Définition

Définition 1.1.1 (Symétrie, bilinéarité, positivité, séparation) *Soit φ une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que φ est **symétrique** lorsque : $\forall x, y \in E,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.*
2. *On dit que φ est **bilinéaire** lorsque pour tout u, v dans E, les applications $\varphi(\cdot, v) : u \mapsto \varphi(u,v)$ et $\varphi(u,\cdot) : v \mapsto \varphi(u,v)$ sont linéaires. Ce ceci est équivalent à pour tout $x, y, z \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a : $\varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\varphi(x,z) + \mu\varphi(y,z)$ et $\varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\varphi(x,y) + \mu\varphi(x,z)$.*
3. *On dit que φ est **positive** si : $\forall u \in E,\ \varphi(u,u) \geq 0$.*
4. *On dit que φ est **définie positive** si φ est positive et de plus : $\forall u \in E,\ \varphi(u,u) = 0 \Longrightarrow u = 0$ (φ « sépare » les vecteurs).*

Définition 1.1.2 (Produit scalaire) *On dit que φ est un produit scalaire lorsqu'elle vérifie les quatre points de la définition précédente. La produit scalaire se note aussi : $(u,v) \mapsto (u|v)$ ou $(u,v) \mapsto \langle u|v\rangle$ ou $(u,v) \mapsto u \cdot v$.*

Remarque 1.1.1 *Si φ est un produit scalaire alors :*

1. *On a : $\forall u \in E, \varphi(0,u) = \varphi(u,0) = 0$. Ainsi $\varphi(u,u) = 0$ si et seulement si $u = 0$.*
2. *Si on montre que φ est symétrique, pour la bilinéarité il suffit de montrer que $\varphi(\cdot, v)$ ou $\varphi(u, \cdot)$ est linéaire.*

Définition 1.1.3 (Espace euclidien, espace préhilbertien) *Si φ est un produit scalaire, on dit que E muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien. De plus, si E est de dimension finie, alors E est un espace euclidien.*

Rappelons les produits scalaires usuels sur certains espaces :

1. $E = \mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$, on pose $\varphi(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
2. En identifiant les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et les vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: $X^T Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
   Après identification, on retrouve le même produit scalaire que sur $\mathbb{R}^n$ et donc on définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, défini par $(X,Y) \mapsto X^T Y$.
   On remarque donc que pour tout matrice colonne X, on a : $X^T X = 0 \Leftrightarrow X = 0$, car : $(X|X) = 0$ et on utilise la propriété de séparation du produit scalaire.
3. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose : $\varphi(A,B) = tr(A^T B)$. C'est un produit scalaire car :
   - Symétrie : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ tr(B^T A) = tr\left((A^T B)^T\right) = tr(A^T B)$.

- Bilinéarité : $*$ linéaire à gauche : $\forall A, B, C, \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ tr((\lambda A + \mu C)^T B) = \lambda tr(A^T B) + \mu tr(C^T B)$.
  $*$ On a la linéarité à droite par symétrie.
- Positivité : $\forall A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ tr(A^T A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2 \geq 0$ (voir chapitre 4).
- Séparation : $tr(A^T A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2 = 0 \Rightarrow \forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} = 0 \Rightarrow A = 0$, car dans la somme précédente, tous les termes sont nuls.

On a aussi $tr(A^T B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} b_{ij}$, car le coefficient d'indice (j,j) de $A^T B$ est $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$.

4. On note $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R}) = \mathcal{L}^2(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Pour f et g dans $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$, on pose $(f|g) = \int_I fg$. Ainsi $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$, muni de $(|)$ est un espace préhilbertien (voir le chapitre 1).

1.1.2 Normes

Définition 1.1.4 (Norme euclidienne) *Pour x dans E, on note $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ que l'on appelle norme euclidienne de x.*
On dit que x est unitaire ou normé quand : $\|x\| = 1$.

Exemple 1.1.1 *On rappelle le résultat vu au chapitre 12 : que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge et vaut $n!$(on effectue des intégrations par partie).*

1. *Montrer que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^{+\infty} R(t) e^{-t} dt$ a un sens.*
2. *On pose : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} (P(t))^2 e^{-t} dt}$. Montrer que $\|.\|$ est une norme euclidienne.*

1. *Si on pose $R = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $a_0, ..., a_d \in \mathbb{R}$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ R(t)e^{-t} = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k e^{-t}$ et donc $t \mapsto R(t)e^{-t}$ est combinaison linéaire des fonctions $t \mapsto t^k e^{-t}$ qui sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *On pose : $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X],\ (P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$. Cela est bien défini, grâce à la première question.*
   On a la symétrie, bilinéarité et positivité. Pour la séparation, si pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on a : $\int_0^{+\infty} (P(t))^2 e^{-t} dt = 0$, comme $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, elle y est nulle et donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ P(t) = 0$. Comme $\mathbb{R}_+$ est infini, alors $P = 0$. On a donc bien un produit scalaire.

Proposition 1.1.1 (Séparation et homogénéité de la norme) *Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :*

1. *$\|x\| = 0 \iff x = 0$;*
2. *$\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$.*

Proposition 1.1.2 (Développement d'une norme) *Soient $x, y, x_1, ..., x_n =\in E^2$. On a :*

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$.
2. $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$.
3. $(x|y) = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$ *(identité de polarisation)*
4. $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i | \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i | \sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (x_i|x_j)$.

Exemple 1.1.2 *Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de p vecteurs d'un espace préhilbertien E, avec $p \geq 2$. On suppose que : $\forall (i,j) \in [\![1, p]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow (x_i|x_j) < 0$. Montrer que $p - 1$ vecteurs parmi eux forment toujours une famille libre.*
Que déduire de p si $\dim(E) = n$?

1.1.3 Vecteurs orthogonaux

$(E, (\cdot|\cdot))$ désigne un espace préhilbertien réel.

Définition 1.1.5 (Vecteurs orthogonaux) *Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont orthogonaux si : $(x|y) = 0$.*

Exemple 1.1.3 *Soient $a, b \in E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si f conserve l'orthogonalité $(x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y))$, alors : $\exists k \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in E,\ \|f(x)\| = k\|x\|$.*

Théorème 1.1.1 (Théorème de Pythagore) *Soit $(x, y) \in E^2$. x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$.*

Définition 1.1.6 (Famille de vecteurs orthogonales et orthonormales) *Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est :*

1. *orthogonale si : $\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow (x_i|x_j) = 0$.*
2. *orthonormale si : $\forall (i, j) \in I^2,\ (x_i|x_j) = \delta_{ij}$ $\ (\|x_i\| = 1$ et $(x_i|x_j) = 0$ si $i \neq j)$.*

Exemple 1.1.4

1. *La base canonique $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel.*
2. *La base canonique $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $(A, B) \mapsto tr(A^T B)$.*
3. *Sur $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ on définit le produit scalaire $(f|g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} fg$.*
   Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose les fonctions $f_n : x \mapsto \sin(nx)$ et $g_m : x \mapsto \cos(mx)$. La famille $(f_n, g_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est orthogonale. Déterminer la norme des vecteurs de cette famille.

4. *Soient* $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *deux à deux distincts et on munit* $\mathbb{R}_n[X]$ *du produit scalaire :* $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$. *Déterminer une base orthonormée de* $\mathbb{R}_n[X]$ *pour ce produit scalaire.*

5. *Soit* E *un espace vectoriel préhilbertien, et* $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ *une famille de vecteurs de* E. *On suppose que :* $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$.
   Montrer que $\mathcal{E}$ *est une famille orthonormée de* E *si :* $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \|e_i\| \geq 1$.

Proposition 1.1.3 *Une famille finie orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre.*

Remarque 1.1.2 *IMPORTANTE :*

1. *Dans un espace euclidien de dimension* n*, une famille orthogonale constituée de* n *vecteurs non nuls est une base de* E*, car c'est une famille libre ayant* $n = \dim(E)$ *éléments.*
2. *Toute famille orthonormale est libre, car elle est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls.*

Proposition 1.1.4 (Théorème de Pythagore généralisé) *Soit* $(x_1, ..., x_p)$ *une famille orthogonale. Alors on a :* $\left\| \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i \right\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2$.

1.1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit* $(\cdot|\cdot)$ *un produit scalaire sur* E. *Alors on a :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ (x|y)^2 \leq \|x\|^2 \times \|y\|^2 \ \text{ soit : } \ \forall (x, y) \in E^2,\ |(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\|.$$

De plus on a : $|(x|y)| = \|x\| \times \|y\|$ *si et seulement si* x *et* y *sont colinéaires.*

Exemple 1.1.5 1. *Pour* $x = (x_1, ..., x_n)$ *et* $y = (y_1, ..., y_n)$ *dans* $\mathbb{R}^n$*, on a :*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| = |(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

2. *Pour f et g dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, on a :* $\left|\int_a^b fg\right| = |(f|g)| \leq \|f\| \times \|g\| = \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b g^2}$.
3. *Soit E un espace vectoriel préhilbertien, et $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une famille libre de vecteurs de E. On suppose que :* $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2$. *Montrer que $\mathcal{E}$ est orthonormée.*

4. *Soit E un espace préhilbertien. Montrer que $U = \{(x,y) \in E^2,\ (x,y)$ est libre $\}$ est un ouvert de E^2.*

Corollaire 1.1.1 (Norme euclidienne) *Une norme découlant d'un produit scalaire vérifie les propriétés des normes : positivité, séparation, homogénéité et inégalité triangulaire.*

Remarque 1.1.3 *Toute norme ne découle par forcément d'une norme euclidienne. Par exemple, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$, avec $n \geq 2$.*

Si cette norme découle d'un produit scalaire $(.|.)$, alors on aurait :

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ (x|y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|_\infty^2 - \|x\|_\infty^2 - \|y\|_\infty^2)$.

On pose $e_1 = (1, 0, ..., 0)$ et $e_2 = (0, 1, ..., 0)$. On a : $e_1+e_2 = (1, 1, ..., 0)$ et $2e_1+e_2 = (2, 1, ..., 0)$. On a : $\|e_1\|_\infty = \|e_2\|_\infty = \|e_1+e_2\|_\infty = 1$ et $\|2e_1+e_2\|_\infty = 2$.

On a : $(e_1+e_2|e_1) = \frac{1}{2}(\|2e_1+e_2\|_\infty^2 - \|e_1+e_2\|_\infty^2 - \|e_2\|_\infty^2) = 1$, puis $(e_1|e_1) = \|e_1\|_\infty^2 = 1$ et $(e_1|e_2) = -\frac{1}{2}$ et donc $(e_1+e_2|e_1) \neq (e_1|e_1) + (e_2|e_2)$, d'où une contradiction avec la bilinéarité d'un produit scalaire.

Cette norme ne découle pas d'un produit scalaire.

Exemple 1.1.6 *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que* $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(A^TA)$ *et* $\mathrm{Im}\,(AA^T) = \mathrm{Im}\,(A)$.

Corollaire 1.1.2 (Inégalités triangulaires) *Soit $(x,y) \in E^2$.*

1. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité de Minkowski ou triangulaire)*
   On a égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.
2. $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$.

1.2 Bases orthonormales dans un espace euclidien

$(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace euclidien de dimension n avec n dans $\mathbb{N}^*$.

1.2.1 Existence de bases et expression du produit scalaire

Théorème 1.2.1 (Existence d'une base orthonormée) *Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormée.*

Théorème 1.2.2 (Théorème de la base orthonormée incomplète) *Toute famille orthonormée de E peut se compléter en une base orthonormée de E.*

Proposition 1.2.1 (Expression du produit scalaire dans une base orthonormée) *$\mathcal{U} = (u_1, ..., u_n)$ une base orthonormée de E. Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i u_i$, où $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ sont dans $\mathbb{R}$. On a :*

1. $(x|y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
2. *On a* $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.
3. $\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = (x|u_k)$ *et donc* $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|u_i)u_i$.
4. *Pour* $X = Mat_{\mathcal{U}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $Y = Mat_{\mathcal{U}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: $(x|y) = X^T Y$. $\|x\| = \sqrt{X^T X}$.

Remarque 1.2.1 *(IMPORTANTE) : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{U} = (u_1, ..., u_n)$ une base orthonormée de E. Soit $A = Mat_{\mathcal{U}}(f) = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$. On a alors $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{ij} =$*

En particulier $tr(f) =$

Exemple 1.2.1

1. *Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $tr(u) = 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que : $(u(x)|x) = 0$.*

2. ***(Matrice de Gram)*** *Soit $x_1, ..., x_p$ sont p vecteurs de E et on pose la matrice $G(x_1, ..., x_p) = [(x_i|x_j)]_{1 \le i,j \le p}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.*
   (a) *Soit $A = Mat_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_p) = [a_{ij}]_{\substack{\le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$. Montrer que $G(x_1, ..., x_p) = A^T A$.*
   (b) *Montrer que $\operatorname{rg}(G(x_1, ..., x_p)) = \operatorname{rg}(x_1, ..., x_p)$.*

1.3 Orthogonalité

$(E, (\cdot|\cdot))$ désigne un espace préhilbertien réel.

Définition 1.3.1 (Orthogonalité) *1. Soit $x \in E$. L'ensemble $\{y \in E, (x|y) = 0\}$ est appelé l'orthogonal de x et il est noté $x^\perp$.*

2. Soit $X \subset E$ une partie de E non vide. L'ensemble $\{y \in E / \forall x \in X,\ (x|y) = 0\} = \bigcap\limits_{x \in X} x^\perp$ est appelé orthogonal de X et il est noté $X^\perp$.

Exemple 1.3.1 *1.* $\{0\}^\perp = E$. *2.* $E^\perp = \{0\}$.

Remarque 1.3.1 *1. Si on a : $\forall (x, y) \in F \times G,\ (x|y) = 0$, on n'a pas forcément $G = F^\perp$. On a seulement : $G \subset F^\perp$.*
$y \in G \Rightarrow \forall x \in F,\ (x|y) = 0 \Rightarrow y \in F^\perp$.

2. (IMPORTANT) Soit $X = \{x_1, ..., x_n\}$ une partie finie de E. On a : $X^\perp = \{x_1, ..., x_n\}^\perp = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)^\perp = \mathrm{Vect}(X)^\perp$, cela signifie que : $x \in \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ (x|x_i) = 0$.

3. $x^\perp = (\mathbb{R}x)^\perp = \mathrm{Vect}(x)^\perp$.

Proposition 1.3.1 (L'orthogonal est un sous-espace vectoriel) *Soit $X \subset E$ une partie non vide de E. Alors $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 1.3.2 (Orthogonalité et somme directe) *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors on a : $F \cap F^\perp = \{0\}$. Ainsi la somme $F + F^\perp$ est directe.*

Exemple 1.3.2 *1. Soit $F_1, ..., F_p$ une famille de sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux. Montrer que : $F_1 + F_2 + ... + F_p = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_p$.*

2. Soit $F_1, ..., F_p$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Montrer que : $\bigcap\limits_{i=1}^{p} F_i^\perp = \left(\sum\limits_{i=1}^{p} F_i\right)^\perp$.

Soit $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{p} F_i^\perp$. Soit $z = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i$, avec : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ f_i \in F_i$. On a donc $(x|z) = \sum\limits_{i=1}^{p} (x|f_i) = 0$, donc on a : $x \in \left(\sum\limits_{i=1}^{p} F_i\right)^\perp$, puis : $\bigcap\limits_{i=1}^{p} F_i^\perp \subset \left(\sum\limits_{i=1}^{p} F_i\right)^\perp$.
Soit $x \in \left(\sum\limits_{i=1}^{p} F_i\right)^\perp$. Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et $f_k \in F_k$. On a : $f_k \in \sum\limits_{i=1}^{p} F_i$, donc : $(x|f_k) = 0$, puis : $x \in F_k^\perp$ et enfin : $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{p} F_i^\perp$, d'où : $\left(\sum\limits_{i=1}^{p} F_i\right)^\perp \subset \bigcap\limits_{i=1}^{p} F_i^\perp$.

Définition 1.3.2 (Supplémentaire orthogonal) *Si on a $F \oplus F^\perp = E$, on dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F dans E.*

Remarque 1.3.2 *ATTENTION, en dimension infinie, F et $F^\perp$ ne sont pas toujours supplémentaires.*

Exemple 1.3.3 *Soit $E = \mathscr{C}^2([0; 1], \mathbb{R})$ et pour $f, g \in E$, on pose :*
$(f, g) = \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big)dt$. On considère les sous-espaces $V = \{f \in E\ /\ f'' = f\}$ et $W = \{f \in E\ /\ f(0) = f(1) = 0\}$. On admet que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.
Montrer que : $V^\perp = W$

Proposition 1.3.3 (Orthogonal en dimension finie) *Soit F un sous-espace vectoriel de* *dimension finie de E. Alors $F \oplus F^{\perp} = E$.*

Corollaire 1.3.1 (Expression de la décomposition suivant $F \oplus F^{\perp} = E$)

1. *Soit $x \in E$ et $(f_1, ..., f_p)$ une base orthonormale de F. La décomposition suivant $F \oplus F^{\perp}$ est donnée par :*

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} (x|f_i) f_i}_{\in F} + \underbrace{x - \sum_{i=1}^{p} (x|f_i) f_i}_{\in F^{\perp}}.$$

2. *Si E est un espace euclidien, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a :*
   - $F \oplus F^{\perp} = E$.
   - $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$

   En effet F est de dimension finie en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple 1.3.4

1. *Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(M, N) \mapsto tr(M^T N)$, déterminer $(A_n(\mathbb{R}))^{\perp}$.*

   Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On a : $\forall A \in A_n(\mathbb{R})$, $(A|S) = tr(A^T S) = -tr(AS) = -tr(SA) = -tr(S^T A) = -(S|A) = -(A|S)$. Ainsi : $\forall A \in A_n(\mathbb{R})$, $(A|S) = 0$ et donc on a : $S_n(\mathbb{R}) \subset (A_n(\mathbb{R}))^{\perp}$. Par ailleurs, on a : $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \dim(A_n(\mathbb{R})) = \dim((A_n(\mathbb{R}))^{\perp})$. On en déduit que : $(A_n(\mathbb{R}))^{\perp} = S_n(\mathbb{R})$.

2. *Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que : $(F^{\perp})^{\perp} = F$*

3. *Attention $(F^{\perp})^{\perp} = F$ n'est pas toujours vraie. Soit l'espace ℓ^2 des suites $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} x_n^2$ converge, muni du produit scalaire $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.*
   Ce produit scalaire a un sens car : $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n y_n| \leq \dfrac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$.
   Soit F l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini. Comparer F et $(F^{\perp})^{\perp}$.

4. *Soit E un espace vectoriel préhilbertien, et $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que : $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$. Montrer que $\mathcal{E}$ engendre E.*

5. *Soit E un espace euclidien de dimension n. Montrer qu'il existe une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ vérifiant (I) : $\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow (x_i|x_j) < 0$.*

6. *Soit E un espace préhilbertien et $\mathcal{U} = (u_1, ..., u_n)$ une famille de E. Soit* $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & ((x|u_1), ..., (x|u_n)) \end{array} \right.$.
   Montrer que ψ est libre si et seulement si $\mathcal{U}$ est libre.

   Soit $F = vect(u_1, ..., u_n)$. Comme F est de dimension finie, alors $F \oplus F^\perp = E$, puis $\mathrm{Im}\,(\psi) = \psi(F)$. Soit $\varphi = \psi|_F$.

   On a $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{u_1, ..., u_n\}^\perp = vect(u_1, ..., u_n)^\perp = F^\perp = \{0\}$, en considérant l'orthogonal dans F.

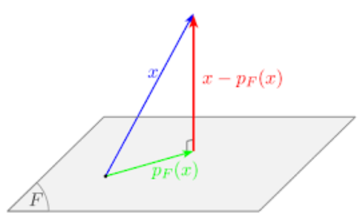
   Ainsi φ est injective. Par conséquant ψ est sujrective si et seulement si ψ est bijective, si et seulement si $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(F)$ si et seulement si $\dim(\mathrm{Vect}(u_1, ..., u_n)) = n$ si et seulement si $\mathcal{U}$ est libre.

1.4 Projections orthogonales

1.4.1 Projecteurs orthogonaux

$(E, (\cdot, \cdot))$ désigne un espace préhilbertien et F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On a donc : $F \oplus F^\perp = E$.

Définition 1.4.1 (Projection orthogonale) *On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. On la note p_F et pour $x = y + z$ avec y dans F et z dans $F^\perp$, on a $p_F(x) = y$.*



Remarque 1.4.1
1. *On a : $\forall x \in E,\ x - p_F(x) \in F^\perp$.*
2. *On a : $\forall x \in E,\ \|p_F(x)\| \leq \|x\|$.*
   En effet grâce au théorème de Pythagore, on a : $x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\perp}$, puis :
   $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2$.

Définition 1.4.2 (Projecteur orthogonal) *Un endomorphisme p de E est dit projecteur orthogonal lorsqu'il coïncide avec une projection orthogonale. Autrement dit, on a :*
- $p^2 = p$.
- $\mathrm{Ker}\,(p) = (\mathrm{Im}\,(p))^\perp$.

Exemple 1.4.1
1. *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Montrer que si on a : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$, alors p est un projecteur orthogonal.*

2. *Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p \leq n$.*
   Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathbb{R}^n$.
   (a) *Montrer que la fonction $X \mapsto \|AX - B\|_2$ admet un minimum sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et qu'il est atteint en un unique point X_0.*
   (b) *Montrer que X_0 est l'unique solution de $A^T AX = A^T B$.*

3. *Soit C une partie convexe compacte non vide d'un espace euclidien E.*
   Soit $x \in E$.
   (a) *Montrer l'existence et l'unicité d'un vecteur $p(x) \in C$ tel que : $d(x,C) = \|x - p(x)\|$.*
   (b) *Soit $y \in C$. Montrer que $y = p(x)$ si et seulement si : $\forall c \in C,\ \langle x - y, c - y\rangle \leq 0$.*
   (c) *Montrer que l'application p définie dans ce qui précède est continue.*

(a) *Rappelons que la norme est 1-lipschitzienne, donc continue*
($\forall z, y \in E,\ |\|z\| - \|y\|| \leq \|z - y\|$).
L'application $f : y \mapsto \|x - y\|$ est donc continue sur le compact C, donc elle y admet un minimum, donc il existe $x_0 \in C$ tel que $\min\limits_C f = f(x_0)$ soit $d(x,C) = \inf\{\|x - y\|,\ y \in C\} = \inf\limits_C f = f(y) = \|x - x_0\|$. Supposons qu'il existe un autre $x_1 \neq x_0$ dans C tel que $d(x,C) = \|x - x_1\|$.
Soit $x_2 = \dfrac{1}{2}(x_0 + x_1)$ qui est bien dans C, car C est convexe.
On a par inégalité triangulaire :
$\|x - x_2\| = \left\|\dfrac{1}{2}(x - x_0) + \dfrac{1}{2}(x - x_1)\right\| \leq \dfrac{1}{2}\|x - x_0\| + \dfrac{1}{2}\|x - x_1\| \leq d(x,C)$. Mais par définition de la distance, on a $\|x - x_2\| \geq d(x,C)$, donc on a :
$\left\|\dfrac{1}{2}(x - x_0) + \dfrac{1}{2}(x - x_1)\right\| = \dfrac{1}{2}\|x - x_0\| + \dfrac{1}{2}\|x - x_1\|$ et si on pose $z_0 = x - x_0$ et $z_1 = x - x_1$, on a : $\|z_0 + z_1\| = \|z_0\| + \|z_1\|$, puis en élevant au carré : $\|z_0\|^2 + \|z_1\|^2 + 2(z_0|z_1) = \|z_0\|^2 + \|z_1\|^2 + 2\|z_0\|.\|z_1\|$, puis $(z_0|z_1) = \|z_0\|.\|z_1\|$. On est donc dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc $z_0 = \lambda z_1$ ou $z_1 = \lambda z_0$, avec λ dans $\mathbb{R}$, puis $(z_0|z_1) = \|z_0\|.\|z_1\|$ permet d'affirmer que : $\lambda\|z_1\|^2 = |\lambda|.\|z_1\|^2$ ou $\lambda\|z_0\|^2 = |\lambda|.\|z_0\|^2$.
Si z_0 ou z_1 est non nul, alors λ est positif. Si $z_1 = z_0 = 0$, on peut prendre $\lambda = 1$ dans la relation $z_0 = \lambda z_1$.
Par ailleurs, on a $\|z_0\| = \|z_1\|$, donc $\lambda = 1$, puis $z_0 = z_1$, ce qui est contradictoire, car $x_0 \neq x_1$.
Donc $d(x,C)$ est atteint en un unique point de C que l'on note $p(x)$.

(b) *On suppose que $y = p(x)$. Soit $c \in C$. On pose $g : t \mapsto \|x - (1-t)y - tc\|^2$ définie sur $[0,1]$. Comme C est convexe, alors : $\forall t \in [0,1],\ (1-t)y - tc \in C$ puis :*
$\forall t \in [0,1],\ g(t) = \|(1-t)(x-y) + t(x-c)\|^2 \geq d(x,C) = \|x - y\|^2$.
On a pour tout t de $]0,1]$, l'inégalité :
$(1-t)^2\|x - y\|^2 + 2t(1-t)(x - y|x - c) + t^2\|x - c\|^2 \geq \|x - y\|^2$, soit :
$-2t\|x - y\|^2 + 2t(x - y|x - c) + t^2[\|x - y\|^2 - 2(x - y|x - c) + \|x - c\|^2] \geq 0$. En divisant par $t > 0$, on a : $-2(x - y|x - y) + 2(x - y|x - c) + t[\|x - y\|^2 - 2(x - y|x - c) + \|x - c\|^2] \geq 0$ et en faisant tendre t vers 0 par valeurs supérieures, on a : $-2(x - y|x - y) + 2(x - y|x - c) \geq 0$, soit $(x - y|y - c) \geq 0$, puis $(x - y|c - y) \leq 0$.
Réciproquement, on suppose que : $\forall c \in C,\ \langle x - y, c - y\rangle \leq 0$.
Soit $c \in C$. On a :
$\|x - c\|^2 = \|(x - y) + (y - c)\|^2 = \|x - y\|^2 + \underbrace{2(x - y|y - c)}_{\geq 0} + \underbrace{\|y - c\|^2}_{\geq 0} \geq \|x - y\|^2$.
*On a donc $\forall c \in C,\ \|x - c\| \geq \|x - y\|$, donc $\|x - y\|$ est le minimum de $\{\|x - c\|, c \in C\}$ et par unicité de la question **2.a.**, on a : $y = p(x)$.*

(c) *Soient $x, y \in C$. Comme $p(x)$ et $p(y)$ sont dans C alors la question précédente nous dit que $(x - p(x)|p(y) - p(x)) \leq 0$ et $(p(y) - y|p(y) - p(x)) = (y - p(y)|p(x) - p(y)) \leq 0$. En sommant ces deux inégalités, on a $(x - y + p(y) - p(x)|p(y) - p(x)) \leq 0$, donc :*
$(p(y) - p(x)|p(y) - p(x)) \leq (y - x|p(y) - p(x))$, soit grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\|p(y) - p(x)\|^2 \leq \|y - x\|.\|p(y) - p(x)\|$. Si $\|p(y) - p(x)\| \neq 0$, alors $\|p(y) - p(x)\| \leq \|y - x\|$ et si $\|p(y) - p(x)\| = 0$ la dernière inégalité reste vraie ($0 \leq \|y - x\|$). Ainsi p est 1-lipschitzienne, donc continue.

Proposition 1.4.1 (Formule de la projection orthogonale) *Soit $(f_1, ..., f_p)$ une base orthonormée de F. Alors on a :*

$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{j=1}^{p} (x|f_j) f_j \ \text{ et } \ \|p_F(x)\|^2 = \sum_{j=1}^{p} (x|f_j)^2.$$

Remarque 1.4.2 *(IMPORTANTE) Pour obtenir la projection orthogonale d'un vecteur x sur F, on a deux méthodes :*

- *on dispose d'une base orthonormée $(f_1, ..., f_p)$ de F (éventuellement obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) et dans ce cas, on peut utiliser directement la formule :* $p_F(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (x|f_j) f_j$.
- *on dispose d'une base $(e_1, ..., e_p)$ de F qui n'est pas forcément orthonormée. On cherche la projection orthogonale de x sur F sous la forme $p_F(x) = y = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j$ (qui est dans F). On doit donc avoir $x - y$ dans $F^{\perp} = (\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p))^{\perp}$ ce qui revient à avoir : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ (x - y|e_i) = 0$,*

  soit le système : $\left\{ \begin{array}{c} (x|e_1) - \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j (e_j|e_1) = 0 \\ \vdots \\ (x|e_p) - \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j (e_j|e_p) = 0 \end{array} \right.$ *, où l'on doit déterminer les λ_j.*

Exemple 1.4.2
1. *Soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme un. On pose $A = CC^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'endomorphisme p canoniquement associé à A est une projection orthogonale sur un espace que l'on précisera.*

2. *On reprend l'exemple 1.1.1 $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$. Déterminer la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. On rappelle que : $\forall p, q \in \mathbb{N},\ (X^p|X^q) = (p+q)!$.*

   $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = aX^2 + bX + c$ la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. Ceci est équivalent à avoir $X^3 - P \in (\mathbb{R}_2[X])^{\perp} =$ $\left(\mathrm{Vect}(1, X, X^2)\right)^{\perp} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} (X^3 - P|1) & = & 0 \\ (X^3 - P|X) & = & 0 \\ (X^3 - P|X^2) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} (X^3|1) & = & a(X^2|1) + b(X|1) + c(1|1) \\ (X^3|X) & = & a(X^2|X) + b(X|X) + c(1|X) \\ (X^3|X^2) & = & a(X^2|X^2) + b(X|X^2) + c(1|X^2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 6 & = & 2a + b + c \\ 24 & = & 6a + 2b + c \\ 120 & = & 24a + 6b + 2c \end{array} \right.$
   $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 6 & = & 2a + b + c \\ 24 & = & 6a + 2b + c \\ 60 & = & 12a + 3b + c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 6 & = & 2a + b + c \\ 18 & = & 4a + b \\ 54 & = & 10a + 2b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 6 & = & 2a + b + c \\ 18 & = & 4a + b \\ 27 & = & 5a + b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} c & = & 6 \\ b & = & -18 \\ a & = & 9 \end{array} \right.$
   $P = 9X^2 - 18X + 6$.

1.4.2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

$(E, (\cdot|\cdot))$ désigne un espace préhilbertien réel.

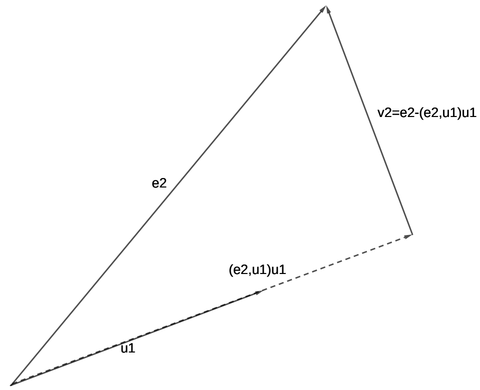
Théorème 1.4.1 (Procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt) *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une famille orthonormale $(u_1, ..., u_n)$ telle que :*

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p) = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p).$$

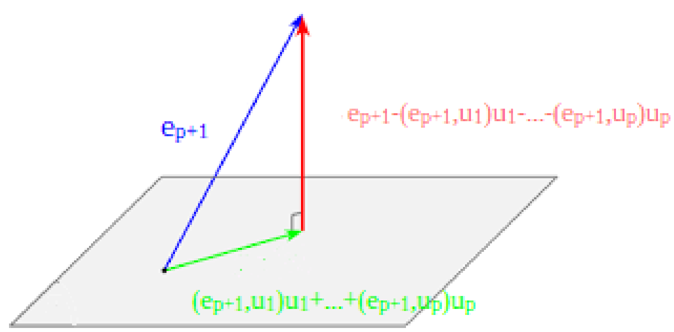
Rappel de la méthode : On procède par récurrence, en construisant d'abord, u_1, puis u_2,..., jusqu'à u_n.

- On pose $u_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.

- À partir de e_2, on doit construire u_2 qui doit être orthogonal à u_1 et de norme 1. Ainsi on enlève d'abord la projection orthogonale de e_2 sur u_1. On pose donc $v_2 = e_2 - (e_2|u_1)u_1$. Ainsi on a bien $(v_2|u_1) = 0$. Ensuite il faut normaliser v_2 et on pose $u_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|}$.



- Supposons que l'on ait construit $(u_1, ..., u_p)$. À partir de e_{p+1}, nous devons construire u_{p+1} qui doit être orthogonal à $u_1, ..., u_p$ et de norme 1. On commence donc par retrancher à e_{p+1}, sa projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p)$. Ainsi on pose : $v_{p+1} = e_{p+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(e_{p+1}|u_i)u_i$. Ainsi on a bien : $\forall j \in [\![1, p]\!],\ (v_{p+1}|u_j) = 0$. Il reste maintenant à normaliser v_{p+1} et on pose $u_{p+1} = \dfrac{v_{p+1}}{\|v_{p+1}\|}$. Et on continue ainsi de suite jusqu'à u_n.



Exemple 1.4.3 *1. On reprend l'exemple 1.1.1 avec $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X],\ \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$. Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ muni de ce produit scalaire. On rappelle que : $\forall p, q \in \mathbb{N},\ (X^p|X^q) = (p+q)!$.*

2. *Déterminer dans $\mathbb{R}^4$ la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale p sur le plan vectoriel (P) d'équation :* $\left\{\begin{array}{lll} x+y-z-t & = & 0 \\ x+3y+z-t & = & 0 \end{array}\right.$.

Déterminons d'abord une base de (P) :

$\left\{\begin{array}{lll} x+y-z-t & = & 0 \\ x+3y+z-t & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x+y-z-t & = & 0 \\ 2y+2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} t & = & x+2y \\ z & = & -y \end{array}\right.$.

Ainsi (P) est $\{(x,y,-y,x+2y),\ x,y\in\mathbb{R}\} = vect(\underbrace{(1,0,0,1)}_{e}, \underbrace{(0,1,-1,2)}_{f})$. Ainsi (e,f) engendre (P). Comme ces deux vecteurs sont indépendants, alors (e,f) est une base de (P).

Orthonormalisons cette base :

$\|e\| = \sqrt{2}$, *on pose donc* $u_1 = \frac{e}{\|e\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Soit $v_2 = f - (f|u_1)u_2 = (0,1,-1,2) - \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0,1,-1,2) - (1,0,0,1) = (-1,1,-1,1)$. *On a* $\|v_2\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2+1^2} = 2$.

On pose donc $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ainsi (u_1,u_2) est une base orthonormée de (P).

Par conséquent : $\forall w \in \mathbb{R}^4,\ p(w) = (w|u_1)u_1 + (w|u_2)u_2$. *On a :*

$p(e_1) = p(1,0,0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}u_1 - \frac{1}{2}u_2 = (1/2,0,0,1/2) - (-1/4,1/4,-1/4,1/4) = (3/4,-1/4,1/4,1/4)$.

$p(e_2) = p(0,1,0,0) = \frac{1}{2}u_2 = (-1/4,1/4,-1/4,1/4)$.

$p(e_3) = p(0,0,1,0) = -\frac{1}{2}u_2 = (1/4,-1/4,1/4,-1/4)$.

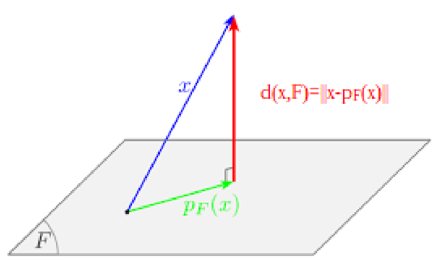
$p(e_4) = p(0,0,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}u_1 + \frac{1}{2}u_2 = (1/4,1/4,-1/4,3/4)$.

La matrice de p dans la base canonique est donc : $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.3 Distance à un sous-espace vectoriel

Ici, F est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus F^\perp = E$ (les espaces ne sont pas forcément de dimension finie).

Définition 1.4.3 (Distance à un sous-espace vectoriel) *Soit $x \in E$. On pose $d(x,F) = \inf\{\|x-f\|,\ f \in F\}$. On appelle ceci distance de x à F.*



Proposition 1.4.2 (Projection orthogonale et distance) *Soit $x \in E$. Alors on a :*
$d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$.
L'unique vecteur y_0 de F vérifiant $\|x-y_0\| = d(x,F)$ est : $p_F(x)$.

Remarque 1.4.3
1. *(IMPORTANTE) Si $x = y+z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, alors : $d(x,F) = \|z\|$, car on a : $y = p_F(x)$. Ainsi si on connaît z, on peut calculer directement $d(x,F) = \|z\|$.*
2. *On a : $\forall x \in E, \forall t \in F,\ \|x-p_F(x)\| = d(x,F) \le \|x-t\|$.*

Exemple 1.4.4 *Déterminer la distance de $u = (1,1,1,-1)$ au plan (P) d'équation :*
$\left\{\begin{array}{lll} x+y-z-t & = & 0 \\ x+3y+z-t & = & 0 \end{array}\right.$.

Grâce à l'exemple précédent, la matrice de $p(u)$ dans la base canonique est $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et donc* $p(u) = (1/2,-1/2,1/2,-1/2)$ *et donc* $u - p(u) = (1/2,3/2,1/2,-1/2)$ *et donc :*

$d(u,P) = \|u-p(u)\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$.

Remarque 1.4.4 *IMPORTANT : voici une méthode pour calculer une distance. Nous avons besoin de déterminer $p_F(x)$, avec F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Nous avons déjà vu comment calculer $p_F(x)$.*
Soit $(f_1, ..., f_p)$ une base orthonormée de F (éventuellement construite par le procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt). Nous avons : $p_F(x) = \sum_{j=1}^{p}(x|f_j)f_j$. De plus $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ qui est la décomposition suivant $F \oplus F^{\perp}$. Ainsi grâce au théorème de Pythagore :
$d(x,F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{p}(x|f_j)^2$, car la base $(f_1, ..., f_p)$ est orthonormée.
Alors on a :

$$d(x,F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{j=1}^{p}(x|f_j)^2}.$$

Exemple 1.4.5

1. *Déterminer $d = \inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$.*

   Nous reprenons le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, défini par :$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$. Nous rappelons que dans l'exemple 1.4.3, nous avons vu que $\left(u_1 = 1, u_2 = X - 1, u_3 = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Nous constatons que : $d = \inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \|X^3 - aX^2 - bX - c\|^2 = \inf_{P\in\mathbb{R}_2[X]} \|X^3 - P\|^2 = \left(d(X^3, \mathbb{R}_2[X])\right)^2 =$
   $\|X^3\|^2 - (X^3|u_1)^2 - (X^3|u_2)^2 - (X^3|u_3)^2 = (X^3|X^3) - (X^3|1)^2 - \left((X^3|X) - (X^3|1)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(X^3|X^2) - 2(X^3|X) + (X^3|1)\right)^2$
   $= 6! - (3!)^2 - (4! - 3!)^2 - (5!/2 - 2.4! + 3!)^2 = 720 - 36 - 324 - 324 = 36.$

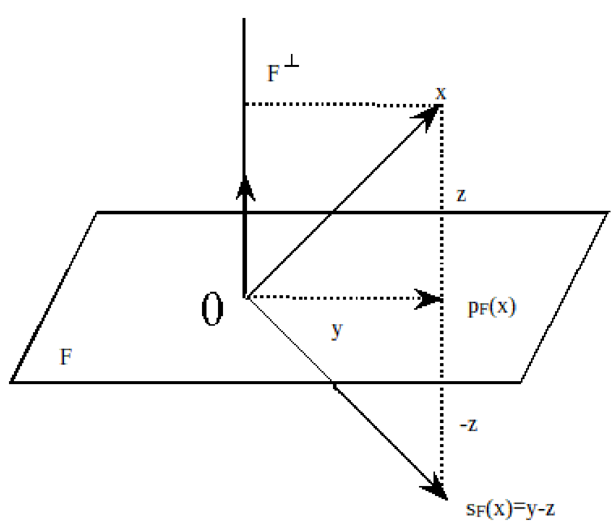
2. *Soient $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$ et on pose $Z = \{f \in E,\ f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$. Déterminer $d = \inf_{f\in Z} \int_0^1 (f^2 + f'^2)$.*

3. *Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel admettant $(e_1, ..., e_n)$ comme base. Pour $x_1, ..., x_p$ dans E, on pose $G(x_1, ..., x_p) = [(x_i|x_j)]_{1\leq i,j\leq p}$ et on pose $\Gamma(x_1, ..., x_p) = \det(G(x_1, ..., x_p))$. Soit $x \in E$.*
   (a) *Si x est dans $F^{\perp}$, exprimer $\Gamma(e_1, ..., e_n, x)$ à l'aide de x et de $\Gamma(e_1, ..., e_n)$.*
   (b) *On revient au cas général pour x. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in [\![1, n]\!]$.*
   Montrer que $\Gamma(e_1, ..., e_n, x + \lambda e_i) = \Gamma(e_1, ..., e_n, x)$.

(c) *Montrer que :* $d^2(x,F) = \dfrac{\Gamma(e_1, ..., e_n, x)}{\Gamma(e_1, ..., e_n)}$.

1.4.4 Symétrie orthogonale (programme de spé)

Définition 1.4.4 (Symétrie orthogonale) *On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie sur F parallèlement à $F^\perp$. On la note s_F et pour $x = y + z$ avec y dans F et z dans $F^\perp$, on a : $s_F(x) = y - z$.*



Remarque 1.4.5 $s_F =$

Définition 1.4.5 (Caractérisation des symétrie orthogonales) *Une symétrie s de E ($s^2 = id_E$) est dite orthogonale lorsqu'elle coïncide avec une symétrie orthogonale. Autrement dit, on a :*

- $s^2 = id_E$
- $\operatorname{Ker}(s + id_E)^{\perp} = \operatorname{Ker}(s - id_E)$, *soit* $\{x \in E,\ s(x) = -x\}^{\perp} = \{x \in E,\ s(x) = x\}$.

Exemple 1.4.6 *Déterminer dans $\mathbb{R}^4$ l'expression de la symétrie orthogonale s par rapport au plan vectoriel (P) d'équation :* $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z-t & = & 0 \\ x+3y+z-t & = & 0 \end{array}\right.$.

Grâce à l'exemple 1.4.3, si on note p le projection sur (P), on a :

$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ p(x,y,z,t) = \frac{1}{4}(3x-y+z+t, -x+y-z+t, x-y+z-t, x+y-z+3t)$.

Ainsi comme $s = 2p - Id$, on a :

$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ s(x,y,z,t) = \frac{1}{2}(x-y+z+t, -x-y-z+t, x-y-z-t, x+y-z+t)$.

1.5 Applications aux hyperplans et aux formes linéaires

Dans ce paragraphe, E désigne un espace euclidien de dimension n.

1.5.1 Description des formes linéaires et hyperplans dans un espace euclidien

Théorème 1.5.1 (Théorème de représentation de Riesz) *Soit f une forme linéaire de E. Alors il existe un unique a dans E tel que : $\forall x \in E,\ f(x) = (x|a) = (a|x)$. On note $f = (\cdot|a) = (a|\cdot)$.*

Démonstration :

Remarque 1.5.1

1. *À l'aide de ce théorème on peut définir le produit vectoriel. Soit $\mathcal{B} = (i,j,k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour u et v dans E, il existe un unique vecteur w de E tel que : $\forall a \in E,\ \det_{\mathcal{B}}(u,v,a) = (a|w)$, car : l'application $a \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u,v,a)$ est une forme linéaire.*
   Cet unique vecteur est appelé produit vectoriel de u et v et on le note $u \wedge v$. Vérifions que ceci coïncide avec le produit vectoriel que vous avez vu en physique ou SI : on note $u = (u_1,u_2,u_3)$, $v = (v_1,v_2,v_3)$ et $a = (a_1,a_2,a_3)$. On a en développant par rapport à la dernière colonne :
   $\det_{\mathcal{B}}(u,v,a) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & a_1 \\ u_2 & v_2 & a_2 \\ u_3 & v_3 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} =$
   $a_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$, *ainsi* $w = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)$, *ce qui correspond aux coordonnées que vous connaissez sur le produit vectoriel.*
   Si u et v sont orthogonaux, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.
   Cette définition du produit vectoriel s'étend à un espace euclidien de dimension n.

2. *Le théorème de Riesz n'est plus vrai en dimension infinie.*
   On se place dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire : $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = \int_0^1 PQ$. Soit la forme linéaire $\psi : P \mapsto P(0)$.
   Montrer qu'il n'existe pas $A \in \mathbb{R}[X]$ telle que : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \psi(P) = (A|P)$.

Corollaire 1.5.1 (Description des hyperplans dans un espace euclidien) *Soit H un hyperplan de E. Il existe a dans E non nul tel que :* $H = \{x \in E,\ (a|x) = 0\} = a^{\perp}$.
Un tel vecteur a est appelé vecteur normal à l'hyperplan H.

Démonstration : Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. La proposition précédente nous dit qu'il existe $a \in E$ tel que $\varphi = (a|\cdot)$. De plus a est non nul, car φ n'est pas nulle, donc $H = \{x \in E,\ \varphi(x) = 0\} = \{x \in E,\ (a|x) = 0\}$.

Exemple 1.5.1 *Si $E = \mathbb{R}^n$ et $H = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}$ avec $a_1, ..., a_n$ des réels non tous nuls. Alors $H = (a_1, ..., a_n)^{\perp}$ et $(a_1, ..., a_n)$ est un vecteur normal de H.*
Par exemple si on se rappelle du lycée, dans l'espace si H est le plan d'équation $2x - y + 3z = 0$, alors un vecteur normal de ce plan est $(2, -1, 3)$.

1.5.2 Projection orthogonale et réflexion par rapport à un hyperplan

Proposition 1.5.1 (Projection orthogonale sur un hyperplan) *Soit $H = a^{\perp} = (\mathrm{Vect}(a))^{\perp}$, un hyperplan, avec $a \in E$ non nul. L'expression de la projection orthogonale sur H est : $x \mapsto$*

Remarque 1.5.2 *La projection sur $\mathrm{Vect}(a)$ est $x \mapsto (x|u)u$, avec $u = \dfrac{a}{\|a\|}$ qui est unitaire.*

Exemple 1.5.2 *On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $H = a^{\perp} = (\mathrm{Vect}(a))^{\perp}$. Quelle est la matrice la projection orthogonale sur H dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$?*

Proposition 1.5.2 (Distance à un hyperplan) *Soit $a \in E \setminus \{0\}$ et $H = a^{\perp}$ un hyperplan de E. Soit $x \in E$. On a : $d(x, H) =$*

Exemple 1.5.3 *On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (A|B) = tr(A^T B)$. Soient $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ tr(M) = 0\}$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec que des 1. Déterminer $d(J, H)$.*

1.5.3 Réflexions (programme de spé)

Définition 1.5.1 (Réflexion) *Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On dit que s est une réflexion lorsque s est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H.*

Proposition 1.5.3 (Expression d'une réflexion) *Soit $a \in E \setminus \{0\}$. La réflexion par rapport à $H = a^\perp$ est : $s_H : x \mapsto x - 2\dfrac{(x|a)}{\|a\|^2}a$.*

Démonstration : Vient de $s_H = 2p_H - Id_E$.

Remarque 1.5.3 *1. On a $E_1(s_H) =$ et $E_{-1}(s_H) =$.*

2. Si E est un espace euclidien et $(e_1, ..., e_{n-1})$ est une base orthonormée de $H = a^\perp$ $(a \neq 0)$, alors $\mathcal{B} = \left(e_1, ..., e_{n-1}, \dfrac{a}{\|a\|}\right)$ est une base orthonormée de E et $Mat_{\mathcal{B}}(s_H) =$
Ainsi $\det(s_H) =$

Exemple 1.5.4 *Soit $a, b \in E$ unitaires tels que $a \neq b$. Montrer qu'il existe une unique réflexion σ telle que $\sigma(a) = b$.*

1.6 Complément : Polynômes orthogonaux

Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soit $\omega \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R}_+^*)$ telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n\omega(t)$ soit intégrable sur $]a, b[$. On pose $E = \left\{f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R}),\ \displaystyle\int_a^b f^2\omega < +\infty\right\}$.

On munit E du produit scalaire : $\forall f, g \in E,\ (f, g) = \displaystyle\int_a^b fg\omega$.

Ce produit scalire a bien un sens, car : $\forall f, g \in E,\ |fg\omega| = |f|\sqrt{\omega}.|g|\sqrt{\omega} \leq \dfrac{1}{2}(f^2\omega + g^2\omega)$ et cette dernière fonction est intégrable.

Nous avons aussi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

La symétrie, bilinéarité et positivité sont immédiates. Prouvons la séparation. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $0 = (P|P) = \displaystyle\int_a^b P^2\omega = 0$. La fonction $P^2\omega$ étant continue et positive, alors $P^2\omega$ est nulle sur $]a, b[$ et comme ω est strictement positive, alors : $\forall x \in [a, b],\ P(x) = 0$. Comme $]a, b[$ est infini, alors P admet une infinité de racines et donc : $P = 0$.

Polynômes orthogonaux :

1. Montrer qu'il existe une unique famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires (coefficient dominant qui vaut un) tels que $\deg P_k = k$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Vect}(P_0, ..., P_n) = \mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ (P_n|Q) = 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $Q_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - \beta_i)$, où $\beta_1, ..., \beta_r$ sont les racines deux à deux distinctes de P_n dans $]a, b[$ de multiplicité impaire. S'il n'y a pas de telles racines, on pose $Q_n = 1$.

(a) Montrer que P_nQ_n est de signe constant sur $]a, b[$.

(b) Montrer que si on a $d^\circ Q_n < n$, alors on a $P_nQ_n = 0$ et donc une contradiction.

(c) En déduire que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont simples et dans $]a; b[$.

4. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$XP_{n+1} = P_{n+2} + b_nP_{n+1} + a_nP_n \text{ avec } a_n = \frac{||P_{n+1}||^2}{||P_n||^2} \text{ et } b_n = \frac{(XP_{n+1}|P_{n+1})}{||P_{n+1}||^2}.$$

(On commencera par écrire $XP_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+2} c_kP_k$ et on cherchera à calculer les c_k.)

Voici diverses situations classiques de polynômes orthogonaux :

Exemple 1.6.1 *Cas $[a,b]=[-1,1]$ et $\omega=1$.*
On pose $L_n=\dfrac{d^n}{dX^n}[(X^2-1)^n]$ (polynômes de Legendre).

1. *Soit $n\in\mathbb{N}$. Quel est le degré de L_n ?*
2. *Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $Q_n=(X^2-1)^n$. Montrer : $\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ Q_n^{(k)}(1)=Q_n^{(k)}(-1)=0$.*
3. *Soit $p,q\in\mathbb{N}$. On suppose $p>q$. Montrer que $(L_p|L_q)=-\displaystyle\int_{-1}^{1}Q_p^{(p-1)}Q_q^{(q+1)}$.*
4. *Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.*

1. $(X^2-1)^n$ est de degré $2n$ et donc : $d^\circ(L_n)=n$, en dérivant n fois.
2. On a $Q_n=(X-1)^n(X+1)^n$. Ainsi 1 et -1 sont des racines de multiplicité n de Q_n.
3. Par intégration par partie : $(L_p|L_q)=\int_{-1}^{1}Q_p^{(p)}Q_q^{(q)}=[Q_p^{(p-1)}Q_q^{(q)}]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}Q_p^{(p-1)}Q_q^{(q+1)}=-\int_{-1}^{1}Q_p^{(p-1)}Q_q^{(q+1)}$, car $Q_p^{(p-1)}(1)=Q_p^{(p-1)}(-1)=0$, grâce à la question précédente.
4. On a de même $\int_{-1}^{1}Q_p^{(p-1)}Q_q^{(q+1)}=[Q_p^{(p-2)}Q_q^{(q+1)}]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}Q_p^{(p-2)}Q_q^{(q+2)}=-\int_{-1}^{1}Q_p^{(p-2)}Q_q^{(q+2)}$, car $Q_p^{(p-2)}(1)=Q_p^{(p-2)}(-1)=0$, grâce à la deuxième question. Puis $(L_p|L_q)=(-1)^2\int_{-1}^{1}Q_p^{(p-2)}Q_q^{(q+2)}$. En itérant p fois ce procédé (en validant cela par récurrence), on a : $(L_p|L_q)=(-1)^p\int_{-1}^{1}Q_p^{(0)}Q_q^{(p+q)}$.
   Or $d^\circ(Q_q)=2q$ et $p+q>2q$, donc $Q_q^{(p+q)}=0$, puis $(L_p|L_q)=0$.
   Par symétrie du produit scalaire, on a la même résultat si $p<q$. Ainsi pour $p\neq q$, on a : $(L_p|L_q)=0$. La famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc orthogonale.

Exemple 1.6.2 *Cas $]a,b[=]-1,1[$ et $w:x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*
Nous avons vu dans le chapitre 5 une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appelés polynômes de Tchebychev telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ T_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta)$ et $d^\circ(T_n)=n$.
Ici on travaille en général plutôt sur $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ et pour tout $f,g\in\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, on a :
$(f|g)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$
Cette intégrale est bien définie car :
$x\mapsto\dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ *est continue sur* $]-1,1[$.
Par ailleurs fg est une fonction continue sur le segment $[-1,1]$, donc il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que :
$|fg|\leq M$. *Ainsi :* $\forall x\in]-1,1[,\ \left|\dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right|\leq\dfrac{M}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{M}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}$.

Or $\frac{M}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \sim_{x\to -1^+} \frac{M}{\sqrt{2}\sqrt{1+x}}$ *et* $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^{1/2}}$ *est intégrable sur* $]-1,0]$*, car c'est un intégrale de Riemann avec* $1/2 < 1$*. Ainsi* $x \mapsto \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ *est intégrable sur* $]-1,0]$*.*

De même $x \mapsto \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ *est intégrable sur* $[0,1[$*, car* $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$ *est intégrable sur* $[0,1[$*.*

On a aussi : $\forall f,g \in E,\ (f|g) = \displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos\theta)g(\cos\theta)d\theta,$ *car*

Cette dernière expression du produit scalaire et des raisonnements proches des séries de Fourier que l'on a vu en exemple 1.1.4, permettent de montrer que la famille $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est orthogonale*
(on a $(T_n|T_m) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = 0$ *si* $n \neq m$*).*

Exemple 1.6.3 *Cas* $[a,b[=[0,+\infty[$ *et* $w : x \mapsto e^{-x}$*.*

On travaille ici avec l'ensemble E *des fonctions* f *continues sur* $\mathbb{R}_+$ *telles que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}dt$ *converge.*

On a : $\forall f,g \in E,\ (f|g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt.$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{R}_+$*,* $L_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!}e^x\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$*, que l'on appelle polynômes de Laguerre.*

1. *Montrer que, si* $n \in \mathbb{N}$*,* L_n *est une fonction polynomiale de degré* n*.*
2. *Montrer que la famille* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est orthonormée.*
3. *Pour* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $x \in \mathbb{R}_+$*, on pose* $e_a : x \mapsto e^{-ax}$*. Montrer que* $\|e_a\|^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(L_n|e_a)^2$*.*
4. *Montrer que* $\mathrm{Vect}\left((e_a)_{a\in\mathbb{R}_+^*}\right) \subset \overline{\mathrm{Vect}\left((L_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)}$*.*
5. *On note* $E_0 = \{f \in E,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0\}$*. Nous avons vu dans le chapitre 8 que* $G = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}, n \in \mathbb{N}^*)$ *est dense dans* E_0 *pour la norme* $\|.\|_\infty$*.*
   (a) *Montrer que* $\overline{E_0} = E$ *(l'adhérence étant au sens de la norme découlant du porduit scalaire).*
   (b) *Montrer que* $\overline{vect((L_n)_{n\in\mathbb{N}})} = E$ *(l'adhérence étant au sens de la norme découlant du porduit scalaire).*

1.

2.

3. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On a :* $(L_n|e_a) = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)e^{-ax}dx$, *ce qui donne comme dans la question précédente par une série d'IPP :* $(L_n|e_a) = a^n\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n e^{-ax}dx = a^n\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-(a+1)x}dx$, *ce qui donne encore par une série d'IPP :* $(L_n|e_a) = (-1)^n\dfrac{a^n}{(a+1)^n}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(a+1)x}dx = (-1)^n\dfrac{a^n}{(a+1)^{n+1}} = \dfrac{1}{a+1}\left(-\dfrac{a}{a+1}\right)^n$. *AInsi on a :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(L_n|e_a)^2 = \dfrac{1}{(a+1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{a^2}{(a+1)^2}\right)^n = \dfrac{1}{(a+1)^2}\times\dfrac{1}{1-\frac{a^2}{(a+1)^2}} = \dfrac{1}{(a+1)^2-a^2} = \dfrac{1}{2a+1} = \int_0^{+\infty} e^{-(2a+1)t}dt$. *Ainsi :* $\|e_a\|^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(L_n|e_a)^2$.

4.

5. (a)

(b) *Soient* $g \in E$ *et* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. *Il existe* $f \in E_0$ *telle que* $\|g-f\| \leq \varepsilon$.

Grâce au rappel, il existe $p \in \mathbb{N}$ *et* $\lambda_0, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ *et* $a_0, \ldots, a_p \in \mathbb{N}$ *tels que :*
$\left\|f - \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_{a_i}\right\|_\infty \leq \varepsilon$. *On a donc :*
$$\left\|f - \sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_{a_i}\right\| = \sqrt{\int_0^{+\infty}\left(f(t) - \sum_{i=0}^{p}\lambda_i e^{-a_i t}\right)^2 e^{-t}dt} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty}\left\|f - \sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_{a_i}\right\|_\infty^2 e^{-t}dt} \leq \varepsilon\sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-t}dt} = \varepsilon.$$
On en déduit que $\left\|g - \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_{a_i}\right\| \leq 2\varepsilon$. *On a donc* $E \subset \overline{\mathrm{Vect}\left((e_a)_{a\in\mathbb{R}_+^*}\right)} \subset \overline{\overline{\mathrm{Vect}\left((L_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)}} \subset \overline{\mathrm{Vect}((L_n)_{n\in\mathbb{N}})} = \overline{\mathrm{Vect}((L_n)_{n\in\mathbb{N}})} \subset E$, *donc :* $\overline{\mathrm{Vect}((L_n)_{n\in\mathbb{N}})} = E$.

2 Adjoint d'un endomorphisme

2.1 Définition et propriétés

Dans ce paragraphe, E désigne un espace euclidien de dimension n.

Proposition 2.1.1 (Existence de l'adjoint) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $y \in E$. Il existe un unique vecteur que l'on note $u^*(y)$ tel que :*

$$\forall x \in E,\ (y|u(x)) = (u(x)|y) = (x|u^*(y)) = (u^*(y)|x).$$

Démonstration :

Définition 2.1.1 (Adjoint d'un endomorphisme) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $y \mapsto u^*(y)$ est appelé adjoint de u et on la note u^*.*

Proposition 2.1.2 (Linéarité de u^*) *L'application u^* est un endomorphisme de E.*

Démonstration : Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall z \in E,\ (z|u^*(\lambda x+\mu y)) = (u(z)|\lambda x+\mu y) = \lambda(u(z)|x)+\mu(u(z)|y) = \lambda(z|u^*(x))+\mu(z|u^*(y)) = (z|\lambda u^*(x)+\mu u^*(y)).$$

Ainsi : $\forall z \in E,\ (z|u^*(\lambda x + \mu y) - (\lambda u^*(x) + \mu u^*(y))) = 0$, soit
$u^*(\lambda x + \mu y) - (\lambda u^*(x) + \mu u^*(y)) \in E^\perp = \{0\}$, puis : $u^*(\lambda x + \mu y) = \lambda u^*(x) + \mu u^*(y)$.

Exemple 2.1.1 *1. On a $(Id_E)^* =$ En effet,*

2. *De la même manière, on montre que $0^* = 0$.*
3. *On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(M, N) \mapsto tr(M^T N)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $L_A : M \mapsto AM$ qui est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer L_A^*.*
4. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $[\forall x \in E,\ (u(x)|x) = 0\ \ (*)] \Leftrightarrow u^* = -u$.*

Proposition 2.1.3 (Propriétés de l'adjoint) *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

1. *$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.*
2. *$u^{**} = u$.*
3. *$(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^*$.*

Démonstration :

1.

2. Soit $y \in E$. On a : $\forall x \in E,\ (u^*(x)|y) = (y|u^*(x)) = (u(y)|x)$. Par unicité de l'adjoint pour l'endomorphisme u^*, on trouve que $u^{**}(y) = u(y)$.
3. Soit $y \in E$. On a :

   $$\forall x \in E,\ ((\lambda u+\mu v)(x)|y) = \lambda(u(x)|y)+\mu(v(x)|y) = \lambda(x|u^*(y))+\mu(x|v^*(y)) = (x|\lambda u^*(x)+\mu v^*(x)).$$

   Par unicité de l'adjoint pour $\lambda u + \mu v$, on a : $(\lambda u + \mu v)^*(y) = \lambda u^*(y) + \mu v^*(y)$.

Remarque 2.1.1 *Il peut être très pratique d'utiliser la propriété $u^{**} = u$ pour limiter les vérifications, comme le montre l'exemple suivant.*

Exemple 2.1.2 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $|||u||| = |||u^*|||$. On rappelle que : $|||u||| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.*

Proposition 2.1.4 (Matrice de l'adjoint) *Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Alors*

$$Mat_{\mathcal{B}}(u^*) =$$

Démonstration :

Remarque 2.1.2 *(IMPORTANTE) Grâce à cette proposition, on a les liens suivants entre u et u^* :*

-
-
-
-

car toutes ces quantités sont les mêmes pour A et A^T.

Exemple 2.1.3
1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Grâce à l'exemple 1.1.6, on a :* $\mathrm{Ker}\,(u^*u) = \mathrm{Ker}\,(u)$ *et* $\mathrm{Im}\,(uu^*) = \mathrm{Im}\,(u)$.
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Grâce à l'exemple 2.1.1, on a : $[\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^TAX = 0] \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, car si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée telle que $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, alors : $(x|u(x)) = X^T(AX) = X^TAX$.*
3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que* $\mathrm{Ker}\,(u^*) = (\mathrm{Im}\,(u))^\perp$ *et* $\mathrm{Im}\,(u^*) = (\mathrm{Ker}\,(u))^\perp$, *puis que* $\mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u^*) = E$.

4. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^* = -u$. Montrer que* $\mathrm{rg}\,(u)$ *est pair.*

   Grâce à l'exemple précédent, comme $\mathrm{Ker}\,(u^*) = \mathrm{Ker}\,(-u) = \mathrm{Ker}\,(u)$*, alors :* $\mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u) = E$.

   Soit $v = u|_{\mathrm{Im}\,(u)}$ *l'endomorphisme induit par u sur* $\mathrm{Im}\,(u)$.

   On a : $\forall x, y \in \mathrm{Im}\,(u),\ (v(x)|y) = (u(x)|y) = (x|u^*(y)) = (x| - u(y)) = (x| - v(y))$*, donc* $v = -v^*$*. De plus* $\mathrm{Ker}\,(v) = \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$*, donc v est un endomorphisme injective d'un espace vectoriel de dimension fini, donc v est bijective. Grâce à la remarque précédente, on a par ailleurs* $\det(v) = \det(v^*) = \det(-v) = (-1)^{\dim(\mathrm{Im}\,(u))} \det(v)$*. Comme* $\det(v) \neq 0$*, alors* $1 = (-1)^{\mathrm{rg}\,(u)}$*, et donc* $\mathrm{rg}\,(u)$ *est pair.*

Proposition 2.1.5 (Stabilité de l'orthogonale par l'adjoint) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel stable par u : $u(F) \subset F$. On a alors*

$$u^*(F^\perp) \subset F^\perp.$$

Démonstration : Soit $x \in u^*(F^\perp)$. Il existe $z \in F^\perp$ tel que $x = u^*(z)$. On a :
$\forall y \in F,\ (x|y) = (u^*(z)|y) = (\underbrace{z}_{\in F^\perp} | \underbrace{u(y)}_{\in u(F) \subset F}) = 0$. Ainsi, on a : $x \in F^\perp$.

2.2 Compléments : endomorphismes normaux

Définition 2.2.1
- *Un endomorphisme u de E est dit normal si $u^*u = uu^*$.*
- *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite normale si $A^T A = AA^T$.*

Exemple 2.2.1
1. *Prouver que les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
   i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   ii. $\forall x, y \in E,\ (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
2. *Montrer que u est normal si et seulement si :* $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Remarque 2.2.1 *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée. On pose $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Ainsi u est normal si et seulement si A est normale.*

Nous allons donner un théorème de réduction des endomorphismes normaux. Commençons par un lemme :

Lemme 2.2.1 (Plan ou droite stable dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel F de dimension finie (pas nécessairement euclidien), alors f admet au moins une droite stable ou un plan stable.*

Démonstration :

Exemple 2.2.2

1. *Soit u normal. Montrer que $Sp(u) = Sp(u^*)$ et que :* $\forall \lambda \in Sp(u),\ E_\lambda(u) = E_\lambda(u^*)$.
2. *Montrer que les sous-espaces propres d'un endomorphisme normal sont deux à deux orthogonaux.*
3. (a) *On suppose qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que : $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que u est diagonalisable dans une base orthonormée.*

   (b) *Si $\dim(E) = 2$, montrer que tout endomorphisme normal peut être représenté dans une base orthonormé par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ou $S(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a; b \in \mathbb{R}$.*
4. *Soit F un sous-ev de E tel que $u(F) \subset F$. Montrer que $u(F^\perp) \subset F^\perp$ et que u induit un endomorphisme normal sur F et $F^\perp$*
5. *Montrer qu'un endomorphisme normal peut être représenté dans une base orthonormée par une matrice de la forme $Diag(\lambda_1, ..., \lambda_p, S(a_1, b_1), ..., S(a_q, b_q))$, où $\lambda_1, ..., \lambda_p, a_1, ..., a_q, b_1, ..., b_q \in \mathbb{R}$.*

3 Isométries vectorielles et matrices orthogonales

3.1 Isométries vectorielles

Dans tout ce paragraphe, E désignera un espace euclidien de dimension n.

3.1.1 Définitions et exemples

Définition 3.1.1 (Isométrie vectorielle) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est une isométrie vectorielle (parfois appelée automorphisme orthogonal), si u conserve la norme :*

$$\forall x \in E, \ \|u(x)\| = \|x\|.$$

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E, que l'on appelle groupe orthogonal.

Exemple 3.1.1 *Id_E, $-Id_E$ sont des isométries vectorielles.*

Remarque 3.1.1 *Soit $u \in O(E)$, alors $|||u||| =$*

Le mot automorphisme employé pour les isométries vectorielles provient de :

Proposition 3.1.1 ($O(E) \subset GL(E)$) *Soit $u \in O(E)$. Alors u est bijective.*

Démonstration : Il suffit de démontrer que u est injectif puisque u est un endomorphisme d'un espace E de dimension finie. Or, si $x \in \operatorname{Ker} u$, alors $u(x) = 0$ donc $\|u(x)\| = 0$ et f conserve la norme ; donc $\|x\| = 0$ puis $x = 0$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u = \{0\}$, ce qui assure l'injectivité de u et donc sa bijectivité.

Proposition 3.1.2 (Une symétrie orthogonale est une isométrie) *Les symétries orthogonales et les réflexions sont des isométries vectorielles.*

Démonstration : Il suffit de le faire pour les symétries orthogonales, car les réflexions sont des symétries orthogonales particulières. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a donc $E = F \oplus F^{\perp}$.

Exemple 3.1.2 *Soient $v \in E \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f : x \mapsto x + \lambda(x|v)v$ soit dans $O(E)$.*

3.1.2 Les différentes caractérisations des isométries vectorielles

Proposition 3.1.3 (Caractérisation par la conservation du produit scalaire) ***(Démo CCP 78)*** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a les équivalences entre les deux propositions suivantes :*

1. *$u \in O(E)$.*
2. *u préserve les produits scalaires, c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in E^2, \ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.*

Démonstration : • Le sens retour est immédiat en posant $x = y$.
• On suppose que : $\forall x \in E, \ \|u(x)\| = \|x\|$. Soit $(x, y) \in E^2$. On a, d'une part, $\|u(x + y)\|^2 = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$ $(*)$.
D'autre part, $\|u(x + y)\|^2 = \|u(x) + u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + 2(u(x)|u(y)) + \|u(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2(u(x)|u(y)) + \|y\|^2$ $(**)$. Grâce à $(*)$ et $(**)$, on en déduit que : $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.

Exemple 3.1.3 1. *Soit $H = u^{\perp}$, avec $u \in E \setminus \{0\}$. Soit $f \in O(E)$ et s la réflexion d'hyperplan H.*

(a) *Montrer que :* $f(H) = (f(u))^{\perp}$.

(b) *Montrer que* $f \circ s \circ f^{-1}$ *est une réflexion dont on précisera les éléments caractéristiques.*

(c) *En déduire toutes les applications* $f \in O(E)$ *telles que :* $\forall g \in O(E),\ fg = gf$.

2. *Soit* $f \in O(E)$.

(a) *Montrer que :* $\operatorname{Im}(f - Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - Id_E) = E$.

(b) *Déterminer* $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f^k$.

Proposition 3.1.4 (Caractérisation par l'adjoint) *Soit $u \in GL(E)$. On a les équivalences entre les deux propositions suivantes :*

1. *$u \in O(E)$.*
2. *$u^* = u^{-1}$.*

Démonstration : $u \in O(E)$ si et seulement si : $\forall (x,y) \in E^2,\ (x|y) = (u(x)|u(y)) = (x|u^* \circ u(y)) \Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2,\ (x|u^* \circ u(y) - y) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E,\ u^* \circ u(y) - y \in E^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow \forall y \in E,\ u^* \circ u(y) = y \Leftrightarrow u^* \circ u = Id_E \Leftrightarrow u^* = u^{-1}$.

Proposition 3.1.5 (Caractérisation par l'image d'une base orthonormée) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. On a les équivalences suivantes :*

1. *u est une isométrie vectorielle.*
2. *$u(\mathcal{B}) = (u(e_1), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée.*

Démonstration :

Exemple 3.1.4

1. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ f(e_j) = e_{\sigma(j)}$, alors f est isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$, car $(f(e_1), ..., f(e_n)) = (e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(n)})$, donc f envoie une base orthonormée en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (on change juste l'ordre des vecteurs), donc f est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que : $f^* \circ f = g^* \circ g$.*
   Grâce à l'exemple 2.1.3, on a $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(g)$.
   Montrer qu'il existe $u \in O(E)$ tel que $g = u \circ f$.

3.1.3 Les groupes $O(E)$ et $SO(E)$

Proposition 3.1.6 (Structure de $O(E)$) *$(O(E), \circ)$ est un groupe.*

Démonstration : Nous allons en fait démontrer que $(O(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

- On a : $O(E) \subset GL(E)$.
- Il est clair que Id_E est un automorphisme orthogonal, donc l'élément neutre de $(GL(E), \circ)$ appartient à $O(E)$.
- Soit $(u, v) \in O(E)^2$. On a : $(v \circ u^{-1})^* = (v \circ u^*)^* = u^{**} \circ v^* = u \circ v^{-1} = (v \circ u^{-1})^{-1}$, donc $v \circ u^{-1}$ est dans $O(E)$

Le couple $(O(E), \circ)$ est bien un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$, donc un groupe.

Exemple 3.1.5 *Montrer que tiut $u \in O(E)$ peut s'écrire comme composée d'au plus r réflexions, avec $r = \mathrm{rg}\,(u - Id_E)$.*
Ainsi les réflexions engendrent $O(E)$.
Procédons par récurrence sur r.
Si $r = 0$, alors $u = Id_E$, il n'y a rien à vérifier.
Soit $r \in \mathbb{R}^*$ et supposons le résultat pour tout $v \in O(E)$ tel que $\mathrm{rg}\,(v - Id_E) < r$.
Soit $u \in O(E)$ tel que $\mathrm{rg}\,(u - Id_E) = r > 0$. On a donc $u \neq Id_E$, puis il existe $e \in E$ tel que $u(e) \neq e$. Grâce à l'exemple 1.5.4, la réflexion s d'hyperplan $H = (u(e) - e)^\perp$ échange e et $u(e)$.
Montrons que $\mathrm{Ker}\,(u - Id_E) \subset \mathrm{Ker}\,(s \circ u - Id_E)$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u - Id_E)$. On a : $s \circ u(x) = s(x)$. On a $s(x) = x$, car x est dans H : $(x|u(e) - e) = (x|u(e)) - (x|e) = (u(x)|u(e)) - (x|e) = 0$.
Cependant l'inclusion $\mathrm{Ker}\,(u - Id_E) \subset \mathrm{Ker}\,(s \circ u - Id_E)$ est stricte, car $e \notin \mathrm{Ker}\,(u - Id_E)$ et $e \in \mathrm{Ker}\,(s \circ u - Id_E)$. AInsi grâce au théorème du rang $\mathrm{rg}\,(s \circ u - Id_E) < r$, donc grâce à l'hypothèse de récurrence il existe des réflexions $s_1, ..., s_p$ telles que $s \circ u = s_1 \circ ... \circ s_p$, avec $p \leq \mathrm{rg}\,(s \circ u - Id_E) \leq r - 1$. Ainsi : $u = s \circ s_1 \circ ... \circ s_p$, avec $p + 1 \leq r$, ce qui achève la récurrence.

Proposition 3.1.7 (Déterminant d'une isométrie vectorielle) *Soit $u \in O(E)$. Alors on a : $\det(u) \in$.*

Démonstration : On a grâce à la remarque 2.1.2 : $\det(u^*) = \det(u)$, soit : $\det(u^{-1}) = \det(u)$, soit : $\dfrac{1}{\det(u)} = \det(u)$, soit : $1 = (\det(u))^2$, soit : $\det(u) \in \{1, -1\}$.

Remarque 3.1.2 *ATTENTION : $\det(f) = \pm 1$, n'implique pas : $f \in O(E)$.*
Contre-exemple : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, y) \end{array} \right.$. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\det(f) = 1$, mais $\|f((0,1))\| = \|(1,1)\| = \sqrt{2} \neq 1 = \|(0,1)\|$.

Définition 3.1.2 (Le groupe $SO(E)$) *On note $SO(E) = \{f \in O(E),\ \det(f) = 1\}$ appelé groupe spécial orthogonal et ses éléments sont nommés isométries directes.*
Les éléments de $O(E) \setminus SO(E)$ sont appelés isométries indirectes.

Proposition 3.1.8 (Structure de $SO(E)$) *$(SO(E), \circ)$ est un groupe en tant que sous-groupe de $O(E)$.*

Démonstration :

3.2 Matrices orthogonales

3.2.1 Définition et caractérisations

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous rappelons que nous avons les équivalences :
$A^T A = I_n \Leftrightarrow AA^T = I_n \Leftrightarrow A^{-1} = A^T$.

Définition 3.2.1 (Matrice orthogonale) *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^T A = I_n$ est dite orthogonale. On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n.*

Remarque 3.2.1 *(IMPORTANTE) On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soient $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a alors $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX\| =$*

Ainsi $|||A||| =$

Exemple 3.2.1

1. *Dénombrer le nombre de matrices de $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R})$.*

2. *$O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte.*

3. *Soit $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in O(n)$ et on pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.*

   (a) *Montrer que : $\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\right| \leq n$.*

   (b) *Étudier le cas d'égalité.*

Proposition 3.2.1 (Matrice d'un automorphisme orthogonal) *Soient E espace euclidien de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Alors on a :*

$$u \in O(E) \Leftrightarrow A \in O_n(\mathbb{R}).$$

Démonstration : On sait que $A^T = Mat_{\mathcal{B}}(u^*)$. On a donc les équivalences suivantes :

$$u \in O(E) \Leftrightarrow u^{-1} = u^* \Leftrightarrow A^{-1} = A^T \Leftrightarrow A \in O_n(\mathbb{R}).$$

Remarque 3.2.2 *Si on munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel, alors pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors l'endomorphisme canoniquement associé $f : X \mapsto AX$ est une isométrie vectorielle si et seulement si A est dans $O_n(\mathbb{R})$. En effet la matrice de f dans la base canonique est A. Comme la base canonique est orthonormée, il suffit d'utiliser la proposition précédente.*

Exemple 3.2.2 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $M_\sigma = [\delta_{i,\sigma(j)}]_{1\leq i,j\leq n}$.*

1. *Soient $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $M_\sigma M_{\sigma'} = M_{\sigma\circ\sigma'}$.*
2. *Montrer que : $M_\sigma^T = M_{\sigma^{-1}}$.*

Proposition 3.2.2 (Caractérisation des matrices orthogonales par les lignes ou les colonnes) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(C_1, ..., C_n)$ ses vecteurs colonnes et $(L_1, ..., L_n)$ ses vecteurs lignes. On a les équivalences suivantes :*

1. *$A \in O(n)$.*
2. *$(C_1, ..., C_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel.*
3. *$(L_1, ..., L_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel.*

Démonstration :

Cette famille est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car on a donc n vecteurs colonnes libres (famille orthonormée) dans un espace vectoriel de dimension n.
Pour le dernier point, on conclut de même en constatant que : $AA^T = [(L_i|L_j)]_{1\leq i,j\leq n}$, d'où :
$AA^T = I_n \Leftrightarrow \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ (L_i|L_j) = \delta_{i,j}$.

Remarque 3.2.3 *Si $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ est dans $O(n)$, alors : $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ |a_{i,j}| \leq 1$, car :*

Exemple 3.2.3

1. *Soit $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.*

   Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a : $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| \leq \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2}\sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} 1^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \|C_j\|^2}\sqrt{n^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} 1}n = n\sqrt{n}$.

2. *Déterminer l'inverse de : $A = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$.*

   On constate que les colonnes de A sont de norme un (attention au $\frac{1}{\sqrt{6}}$) et qu'elles sont orthogonales entre elles. Ainsi A est dans $O_3(\mathbb{R})$ et donc $A^{-1} = A^T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*

(a) *Pour quels a, b a-t-on A dans $O(3)$?*

(b) *Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A ?*

Corollaire 3.2.1 (Matrice de passage orthogonale) *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. M est dans $O(n)$ si et seulement si M est la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée.*

Démonstration : On suppose que M dans $O(n)$ et on note $(C_1, ..., C_n)$ les colonnes de M. Ainsi M est la matrice de passage de la base canonique à la base $(C_1, ..., C_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ces deux bases sont orthonormées pour le produit scalaire usuel.
Soient $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ et $\mathcal{C} = (v_1, ..., v_n)$ deux bases orthonormées d'un espace euclidien E telles que $M = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [m_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$. On note $(C_1, ..., C_n)$ les colonnes de M. On a : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ v_j = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j} u_k$.
Ainsi on a : $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \delta_{i,j} \underbrace{=}_{\mathcal{C}\text{ B.O.N.}} (v_i|v_j) \underbrace{=}_{\mathcal{B}\text{ B.O.N.}} \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j} = (C_i|C_j)$. Ainsi les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc M est dans $O(n)$.

Remarque 3.2.4 *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux bases orthonormées de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A = Mat_{\mathcal{U}}(f)$ et $A' = Mat_{\mathcal{U}'}(f)$ et $P = P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}$ qui est dans $O(n)$. On a : $A' =$*

Exemple 3.2.4 *Soit $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$. On note $(C_1, ..., C_n)$ les vecteurs colonnes de A et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les vecteurs colonnes forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on appelera $\mathcal{C}$. Montrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure telle que $A = QR$.*

Définition 3.2.2 (Matrices orthogonalement semblables) *Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et A' sont orthogonalement semblables s'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que :*

$$A = PA'P^{-1} = PA'P^T.$$

3.2.2 Les groupes $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ et orientation

Proposition 3.2.3 (Structure de $O_n(\mathbb{R})$) *$(O_n(\mathbb{R}),.)$ est un groupe.*

Démonstration : Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. On a bien sûr : $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

- On a $I_n \in O_n(\mathbb{R})$.
- Soient $M, N \in O_n(\mathbb{R})$. On a :
  $(M^{-1}N)^T(M^{-1}N) = (M^T N)^T(M^T N) = N^T \underbrace{MM^T}_{=I_n} N = N^T N = I_n$. Donc $M^{-1}N$ est dans $O_n(\mathbb{R})$.

Proposition 3.2.4 (Déterminant d'une matrice orthogonale) *Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors on a :* $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Démonstration : On a : $\det(A^T A) = \det(I_n)$, donc $\det(A^T)\det(A) = 1$, soit $(\det(A))^2 = 1$.

Exemple 3.2.5 ***(Inégalité d'Hadamard)*** *Montrer que :* $|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2}$.

Étudier le cas d'égalité.

Définition 3.2.3 ($SO(n)$) *L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant $+1$ est appelé groupe spécial orthogonal et on le note $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$.*
Les éléments de $SO_n(\mathbb{R})$ sont appelés matrices orthogonales positives ou diretces et les éléments de $O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$ sont appelés matrices orthogonales négatives ou indirectes.

Proposition 3.2.5 (Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$) *$SO_n(\mathbb{R})$ est un groupe en tant que sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration : C'est la même preuve que pour $SO(E)$.

Définition 3.2.4 (Orientation d'un espace euclidien) *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Pour toute base orthonormée $\mathcal{B}'$ on dit qu'elle possède la même orientation que $\mathcal{B}$ si $\det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) > 0$.*
Orienter un espace euclidien, c'est choisir l'une de ses bases orthonormées $\mathcal{B}$ comme base de référence. Ainsi toute base orthonormée $\mathcal{B}'$ ayant la même orientation que $\mathcal{B}$ est dite directe et sinon indirecte (ou rétrograde).

Remarque 3.2.5 *Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E. Ces deux bases ont la même orientation si et seulement si la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est dans $SO(n)$.*

Proposition 3.2.6 (Déterminant dans deux bases orthonormées directes) *Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Alors : $\forall x_1, ..., x_n \in E$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(x_1, ..., x_n)$*

Démonstration : Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. On a :
$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$. Or $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \det(P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}) = 1$, car $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ est dans $SO_n(\mathbb{R})$ en tant que matrice de passage entre deux bases orthonormées. Ainsi on a :
$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$.

3.3 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans ce paragraphe, E est un espace euclidien de dimension deux que l'on munit d'une orientation.

Proposition 3.3.1 (Description de $O(2)$) *Les éléments de $O_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, *avec* $\theta \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est orthogonale si et seulement si $a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2$ et $ab + cd = 0$ (car ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée). De manière équivalente, il existe θ et θ' tels que $(a, c) = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $(b, d) = (\sin\theta', \cos\theta')$, avec $\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta' = 0$, soit $\sin(\theta + \theta') = 0$.
Deux cas se présentent alors : $\theta' + \theta \equiv 0[2\pi]$ et $\theta' + \theta \equiv \pi[2\pi]$ soit : $\theta' \equiv -\theta[2\pi]$ et $\theta' \equiv \pi - \theta[2\pi]$, ce qui donne le résultat.

Corollaire 3.3.1 (Description de $SO(2)$) *On a :* $SO(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

Démonstration : En reprenant la proposition précédente, pour tout θ réel, nous avons :
$\det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1$ et $\det \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = -1$.

Proposition 3.3.2 (Opérations dans $SO(2)$) *Soient $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :*

1. $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$.
2. $R_\theta^n = R_{n\theta}$.
3. $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.
4. $R_\theta = I_2 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[2\pi]$.

Démonstration :

1. Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. On a : $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} =$
$R_{\theta_1+\theta_2}$.
2. Se montre par récurrence grâce au point précédent.
3. Grâce au premier point : $R_\theta R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = R_0 = I_2$.
4. $R_\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 1$ et $\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[2\pi]$.

Corollaire 3.3.2 (Morphismes de groupes)

1. *L'application* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \to & (SO_2(\mathbb{R}), .) \\ \theta & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array} \right.$ *est un morphisme surjectif de groupes de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.*
2. *L'application* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{U}, \times) & \to & (SO_2(\mathbb{R}), .) \\ e^{i\theta} & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array} \right.$ *est un isomorphisme de groupes.*

Démonstration : Le premier point découle directement de la proposition précédente.
Pour le deuxième point, nous constatons que l'application est bien définie, car si $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$, alors $\theta \equiv \theta'[2\pi]$ et donc : $R_\theta = R_{\theta'}$, puis : $g(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta'})$.
Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. On a $g(e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}) = g(e^{i(\theta_1+\theta_2)}) = R_{\theta_1+\theta_2} = R_{\theta_1} R_{\theta_2} = g(e^{i\theta_1}) g(e^{i\theta_2})$ et donc g est bien un morphisme de groupes. Il est clairement surjectif.
Enfin on a : $g(e^{i\theta}) = I_2 \Leftrightarrow R_\theta = I_2 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow e^{i\theta} = 1$. Ainsi $\operatorname{Ker}(g) = \{1\}$ et donc g est aussi injectif, ce qui en fait un isomorphisme.

Remarque 3.3.1 *La première application étant continue et $\mathbb{R}$ étant connexe par arcs, alors $f(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R})$ l'est aussi.*

Corollaire 3.3.3 (Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$) *Pour toute matrice A, B de $SO_2(\mathbb{R})$, on a : $AB = BA$.*

Démonstration : Grâce au corollaire 3.3.1, il existe θ_1 et θ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que $A = R_{\theta_1}$ et $B = R_{\theta_2}$. Ainsi grâce à la proposition précédente : $AB = R_{\theta_1}R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2} = R_{\theta_2+\theta_1} = R_{\theta_2}R_{\theta_1} = BA$.

Remarque 3.3.2 *Attention, $SO(n)$ n'est pas commutatif si $n \geq 3$.*

Définition 3.3.1 (Rotation vectorielle d'un espace euclidien) *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle rotation vectorielle d'angle θ, noté r_θ l'endomorphisme défini par :*

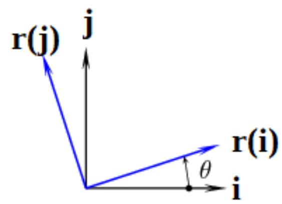
$$Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta) = R_\theta.$$

Cette définition ne dépend pas de la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ choisie (donc θ est bien défini de façon unique modulo 2π).

Remarque 3.3.3

1. *Si $\mathcal{C}$ est une autre base orthonormée directe, alors $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est dans $SO(2)$ (grâce à la remarque 3.2.5, car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ ont la même orientation) donc commute avec $Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta)$. Et donc $Mat_{\mathcal{C}}(r_\theta) = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1}Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta)P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1}P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta) = Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta)$, donc θ est bien indépendant de la base orthonormée directe choisie.*

2. *Représentons cela géométriquement. On se place dans $\mathbb{R}^2$, et on note (i, j) la base canonique qui fixe aussi l'orientation de $\mathbb{R}^2$. Soit r la rotation vectorielle d'angle θ (de centre O). On a alors : $r(i) =$ et $r(j) =$*



3. *Pour définir la notion d'angle, on peut se baser sur les rotations.*
Soit u et v deux vecteurs unitaires. Il existe une unique rotation r telle que $r(u) = v$. En effet on complète la famille orthonormée (u) en une base orthonormée $\mathcal{B} = (u, w)$ de E. On peut considérer cette base directe en prenant $-w$ au lieu de w. On a ainsi $v = au + bw$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$, car $\|v\| = 1$.
Soit r une telle rotation. On pose $r(u) = v$. Comme une rotation conserve le produit scalaire, alors $r(u) = v$ et $r(w)$ sont orthogonaux. Or $v^\perp$ est de dimension 1 et $-bu + aw$ est orthogonal à v et non nul. Ainsi $v^\perp = \mathrm{Vect}(-bu + aw)$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $r(w) = \lambda(-bu + aw)$. On a donc : $Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} a & -\lambda b \\ b & \lambda a \end{pmatrix}$. Or le déterminant de cette matrice doit valoir 1, donc $1 = \lambda(a^2 + b^2) = \lambda$, ce qui donne au plus une matrice.
Réciproquement, soit $r \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. C'est bien la matrice d'une rotation, car les colonnes sont de norme un et orthogonale entre elles et le déterminant de cette matrice vaut un.
On définit l'angle $(\widehat{u, v})$ comme l'unique θ à 2π-près tel que r_θ vérifie $r_\theta(u) = v$.
Plus généralement, soient u et v deux vecteurs non nuls de E. On pose $u_1 = \dfrac{u}{\|u\|}$ et $v_1 = \dfrac{v}{\|v\|}$. On pose $(\widehat{u, v}) = (\widehat{u_1, v_1})$.

Exemple 3.3.1

1. *Les angles des rotations vectorielles suivantes sont :*
   (a) *Id_E : 0*
   (b) *$-Id_E$: π.*

2. *Identifier l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$*

On constate que $A = R_{4\pi/3}$, donc f est la rotation d'angle $4\pi/3$.

3. *Un endomorphisme u d'un espace euclidien E vérifiant : $\forall x \in E,\ (x|u(x)) = 0$ est-il forcément nul ?*

4. *Soit f la rotation vectorielle d'angle θ d'un plan euclidien E orienté. Soit $a \in E$ unitaire. Calculer $(f(a)|a)$.*

Le deuxième point du corollaire 3.3.2 permet d'identifier les rotations de $\mathbb{R}^2$, avec l'écriture complexe d'une rotation :

Proposition 3.3.3 (Écriture complexe d'une rotation) *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit M un point du plan d'affixe z. Soit M' d'affixe z' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ. Alors : $z' = e^{i\theta}z$.*

Démonstration : Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, tels que $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On a donc :
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$ et donc :
$z' = x' + iy' = x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy) = e^{i\theta}z.$

Remarque 3.3.4 *Rappelons l'écriture complexe d'autres transformations :*

1. *Soit a un nombre complexe. Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur d'affixe a. À un point M du plan d'affixe z_M, on associe son image M' par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Alors M' a pour affixe : $z_{M'} = z_M + a$.*
2. *Soit $k \in \mathbb{R}^*$. À un point M du plan d'affixe z_M, on associe son image M' par l'homothétie de centre O et de rapport k. Alors M' a pour affixe : $z_{M'} = kz_M$*
3. *On appelle similitude directe du plan complexe toute application de la forme $f : z \mapsto az + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \times \mathbb{C}$.*
   On pose $a = re^{i\theta}$. On pose $\omega = \dfrac{b}{1-a}$, qui est un point fixe de f. Ainsi :
   $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) - \omega = re^{i\theta}(z - \omega)$. On parle donc de similitude de centre ω, de rapport r et d'angle θ. C'est donc la composée de l'homothétie de rapport r et de centre ω et de la rotation de centre ω et d'angle θ.

Nous rappelons que les éléments de $O(2) \setminus SO(2)$ sont de la forme $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.3.1 (Classification des isométries du plan) *Une isométrie vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension 2 est soit une réflexion (si son déterminant vaut -1 dans une base orthonormée directe), soit une rotation (si son déterminant vaut 1 dans une base orthonormée directe).*

Démonstration : Le cas des éléments de $SO(E)$ vient d'être traité via $SO_2(\mathbb{R})$, ce sont toutes les rotations.
Maintenant, soit $f \in O(E) \setminus SO(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = S_\theta$. Le polynôme caractéristique de S_θ est :
$\begin{vmatrix} X - \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & X + \cos\theta \end{vmatrix} = (X - \cos\theta)(X + \cos\theta) - \sin^2\theta = X^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = X^2 - 1 = (X-1)(X+1).$
Ainsi le polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc S_θ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Cherchons $E_1(S_\theta)$. Nous avons : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(S(\theta)) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} (\cos\theta - 1)x + (\sin\theta)y & = & 0 \\ (\sin\theta)x - (\cos\theta + 1)y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -(2\sin^2(\theta/2))x + 2(\sin(\theta/2)\cos(\theta/2))y &= 0 \\ 2(\sin(\theta/2)\cos(\theta/2))x - (2\cos^2(\theta/2))y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin(\theta/2)(-(\sin(\theta/2))x + (\cos(\theta/2))y) &= 0 \\ 2\cos(\theta/2)((\sin(\theta/2))x - (\cos(\theta/2))y) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$-(\sin(\theta/2))x + (\cos(\theta/2))y = 0$, car on ne peut pas avoir en même temps $\sin(\theta/2) = 0$ et $\cos(\theta/2) = 0$, sinon $\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) = 0 \neq 1$.
Ainsi $E_1(S_\theta)$ est une droite vectorielle et comme le vecteur $\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{pmatrix}$ vu dans $\mathbb{R}^2$ vérifie équation précédente, alors $E_1(S_\theta) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{pmatrix}$. De même on montre que $E_{-1}(S_\theta) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-\sin(\theta/2)\\ \cos(\theta/2)\end{pmatrix}$.
Comme les vecteurs $\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-\sin(\theta/2)\\ \cos(\theta/2)\end{pmatrix}$ sont orthogonaux et que l'on est en dimension 2, alors $E_1(S_\theta)) = (E_{-1}(S_\theta))^\perp$. Ainsi f correspond à la réflexion d'axe $\mathcal{D}_\theta$ engendrée par le vecteur de coordonnées $(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$.

3.4 Réduction des isométries vectorielles en base orthonormé

3.4.1 Cas général

Proposition 3.4.1 (Isométries vectorielles et sous-espaces stables) *Soit $f \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par f (c'est-à-dire $f(F) \subset F$). Alors on a :*

- *f induit une isométrie vectorielle sur F.*
- *$f(F^\perp) \subset F^\perp$.*

Démonstration : Pour le premier point, soit $\tilde{f} : F \to F$ l'endomorphisme induit par f sur F et on a toujours : $\forall x \in F,\ \|\tilde{f}(x)\| = \|f(x)\| = \|x\|$ et donc $\tilde{f}$ est dans $O(F)$.
Pour le deuxième point : comme $\tilde{f}$ est dans $O(F)$, alors $\tilde{f}$ est un isomorphisme de F et donc f réalise une bijection de F dans F, en particulier $f(F) = F$.
Soit $x \in F^\perp$. Soit $y \in F$. Il existe donc $z \in F$ tel que : $y = f(z)$. On a :
$(f(x)|y) = (f(x)|f(z)) = (\underbrace{x}_{\in F^\perp}|\underbrace{z}_{\in F}) = 0$. Ainsi : $f(x) \in F^\perp$, puis $f(F^\perp) \subset F^\perp$.

Remarque 3.4.1 *Comme f induit une isométrie vectorielle $\tilde{f}$ sur F, alors la proposition 3.1.1, nous dit que $\tilde{f}$ est une bijection de F dans F et donc : $f(F) = \tilde{f}(F) = F$.*
On a même $f(F^\perp) = F^\perp$, en remplaçant F par $F^\perp$ (car $F^\perp$ est stable par f grâce à la proposition précédente).

Exemple 3.4.1 ***(Théorème de Maschke)*** *Soit G un groupe fini de $GL(E)$.*

1. *Montrer que $(x, y) \mapsto \sum_{g\in G} \langle g(x), g(y)\rangle$ définit un produit scalaire sur E que l'on notera $(\,.\, | \,.\,)$.*
2. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G. Montrer que F possège un supplémentaire stable par tous les éléments de G.*

1. *L'application est bien symétrique, bilinéaire et positive.*
Soit $x \in E$ tel que $0 = (x|x) = \sum_{g\in G} \|g(x)\|^2$, donc tous les $g(x)$ sont nuls et pour $g = Id_E$, on a : $x = 0$.
2. *Montrons que pour ce produit scalaire tous les éléments de g sont dans $O(E)$.*
Soit $f \in G$. Comme $g \mapsto g \circ f$ est une bijection de G dans G, alors :
$\forall x \in E,\ (f(x)|f(x)) = \sum_{g\in G} \langle g \circ f(x), g \circ f(x)\rangle = \sum_{h\in G} \langle h(x), h(x)\rangle = (x|x)$.
Grâce à la proposition précédente, $F^\perp$ (orthogonal pour notre nouveau produit scalaire) est stable par tous les éléments de G et répond donc à notre question.

Théorème 3.4.1 (Réduction d'une isométrie vectorielle) *Si $u \in O(E)$ alors il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de blocs diagonaux de la forme*

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix},$$

avec $p,q,s\in\mathbb{N}$ tels que $p+q+2s=n$ et pour tout i de $[\![1,s]\!]$, l'angle θ_i choisi dans $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$ et :
$\forall\theta\in\mathbb{R},\ R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$.
Autrement dit, l'espace E est la somme directe orthogonale de $E_1(u)$, $E_{-1}(u)$ et de plans sur lesquels u induit des rotations.

Démonstration : On a : $u^*u=u^{-1}u=Id_E=uu^{-1}=uu^*$. Ainsi u est un endomorphisme normal.
Dans une certaine base orthonormée la matrice de u est : dans une base orthonormée par une matrice de la forme $M=Diag(\lambda_1,...,\lambda_k,S(a_1,b_1),...,S(a_l,b_l))$, où $\lambda_1,...,\lambda_k,a_1,...,a_l,b_1,...,b_l\in\mathbb{R}$ et :
$\forall a,b\in\mathbb{R},\ S(a,b)=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$.
Soit $i\in[\![1,k]\!]$. Comme λ_i est valeur propre de u, il existe $x\in E$ non nul tel que : $u(x)=\lambda_i x$, puis $\|x\|=\|u(x)\|=|\lambda_i|.\|x\|$, puis comme x est non nul, alors : $|\lambda_i|=1$, donc : $\lambda_i\in\{-1,1\}$.
Soit $i\in[\![1,l]\!]$. De $M^TM=I_n$, on a : $S(a_i,b_i)^TS(a_i,b_i)=I_2$, puis comme $\det(S(a_i,b_i))=a_i^2+b_i^2\geq 0$, alors $S(a_i,b_i)$ est dans $SO_2(\mathbb{R})$ et donc est de la forme $R(\theta_i)$ ou I_2 ou $-I_2$.

Remarque 3.4.2 *(IMPORTANTE) Soit $f\in O(E)$, alors $Sp(f)$*
Cherchons les valeurs propres de $R(\theta)$ pour $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$. On a :
$\chi_{R(\theta)}=X^2-tr(R(\theta))X+\det(R(\theta))=X^2-2\cos\theta X+1=X^2-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})X+e^{i\theta}\times e^{-i\theta}$. *Ainsi $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont les valeurs propres complexes de $R(\theta)$ et elles ne sont pas réelles. Ainsi les seules valeurs propres réelles possibles sont 1 et -1.*

Exemple 3.4.2

1. *Soit $f\in O(E)\setminus SO(E)$. Montrer que : $-1\in Sp(f)$.*

2. *Retrouver le fait que pour $u\in O(E)$, si on note $r=\mathrm{rg}\,(u-Id_E)$, alors u peut s'écrire comme la composée d'au plus r réflexions.*

En reprenant la proposition précédente avec ses notations, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $M=Mat_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}I_{n-r} & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots\\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s)\end{pmatrix}$.

On a par calcul matriciel $R(\theta)=S_\theta S_0$. Or pour $\psi\in\mathbb{R}$, la matrice $M_\psi=\begin{pmatrix}1 &&&&&\\ &\ddots&&&&\\ &&1&&&\\ &&&S_\psi&&\\ &&&&1&\\ &&&&&\ddots\\ &&&&&&1\end{pmatrix}$ est la matrice d'une réflexion s dans $\mathcal{B}$, car nous avons vu dans le paragraphe précédent que S_ψ correspondait à une réflexion sur un plan P et comme $\mathcal{B}$ est orthogonale, alors sur $s|_{P^\perp}=Id_{P^\perp}$, vu la construction de la matrice. Ainsi M est le produit de $2s$ matrices M_ψ et q matrices $\begin{pmatrix}1 &&&&&\\ &\ddots&&&&\\ &&1&&&\\ &&&-1&&\\ &&&&1&\\ &&&&&\ddots\\ &&&&&&1\end{pmatrix}$ qui correspondent aussi à des réflexions. Donc u est la composée de $q+2s=r$ réflexions.

Corollaire 3.4.1 (Réduction des matrices orthogonales) *Pour toute matrice M de $O_n(\mathbb{R})$ il existe une matrice P dans $O_n(\mathbb{R})$ telle que :*

$$M=P\begin{pmatrix}I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots\\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s)\end{pmatrix}P^{-1},$$

avec $p, q, s \in \mathbb{N}$ tels que $p+q+2s = n$ et pour tout i de $[\![1, s]\!]$, l'angle θ_i choisi dans $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

Démonstration : Nous considérons la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ qui est orthonormée pour le produit scalaire usuel. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = M$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, alors f est un automorphisme orthogonal et grâce à la proposition précédente a une matrice de la forme $M' = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $\mathcal{B}'$. Si on pose $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage des base orthonormées $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, qui est donc dans $O_n(\mathbb{R})$, alors $M = PM'P^{-1}$.

Exemple 3.4.3 1. *Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.*

Vu la proposition précédente, il suffit de montrer que tout matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix}$, $\theta_1, .., \theta_s$ choisis dans $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Soit $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$. Montrons que $R(\theta)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Nous avons vu dans la remarque précédente que $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont les valeurs propres complexes de $R(\theta)$ et elles sont en plus distinctes, donc $R(\theta)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Ainsi pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, il existe $P_k \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $R(\theta_k) = P_k \begin{pmatrix} e^{i\theta_k} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_k} \end{pmatrix} P_k^{-1}$. Ainsi : $\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix} =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & P_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & P_s \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \begin{matrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1} \end{matrix} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & \begin{matrix} e^{i\theta_s} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_s} \end{matrix} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & P_1^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & P_s^{-1} \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

et donc notre matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2. *Quelles sont les composantes connexes par arcs de $O_n(\mathbb{R})$?*

3. Montrer que $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$.

3.4.2 Cas des isométries vectorielles directes en dimension 3

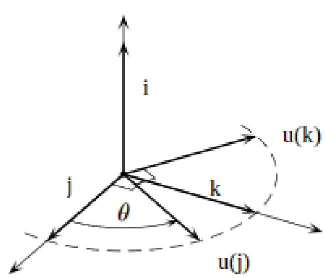
Dans ce paragraphe, on suppose que $\dim(E) = 3$ et on munit E d'une orientation.

Proposition 3.4.2 (Réduction des isométries directes en dimension 3) *Soit $u \in SO(E)$. Il existe alors une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Grâce un théorème de réduction des isométries, la matrice de u dans une certaine base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$ est de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, avec $p + q = 3$ ou $\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Comme $\det(u) = 1$, alors dans le premier cas, nous avons $p = 3$ ou $p = 1$ et dans le deuxième $\epsilon = 1$. Comme $R(0) = I_2$ et $R(\pi) = -I_2$, dans tous les cas on a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$.

Définition 3.4.1 (Rotation vectorielle de l'espace) *Si une application u a pour matrice $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe, alors on dit que u est la rotation d'axe orienté par i et d'angle θ.*



Remarque 3.4.3

1. *(IMPORTANTE) u induit une rotation d'angle θ dans la plan $P = vect(i)^{\perp} = vect(j, k)$, qui orienté par (j, k).*
2. *L'axe de la rotation se trouve en cherchant $\mathrm{Ker}\,(u - Id_E)$ car u laisse fixe l'axe de la rotation qui est $vect(i)$.*
3. *Nous avons $(u(j)|j) =$ et $(u(j)|k) =$*
   Ces relations permettent de trouver l'angle de la rotation.
4. *Une rotation d'angle π est appelé retournement de l'espace.*
   C'est une symétrie par rapport à $vect(i)$.

Exemple 3.4.4

1. *Soit $u \in SO(E)$ tel que $tr(u) = -1$. Que dire de u ?*

2. *Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation r d'angle $2\pi/3$ autour de l'axe orienté par $a = (1,1,1)$.*

4 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

Dans tout ce paragraphe, $(E, (\cdot|\cdot))$ désignera un espace euclidien de dimension n.

4.1 Endomorphismes autoadjoints

Définition 4.1.1 (Endomorphismes autoadjoints) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est autoadjoint (que l'on appelle aussi endomorphisme symétrique) lorsque $u^* = u$, autrement dit :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ (u(x)|y) = (x|u(y)).$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Remarque 4.1.1 *u^*u et uu^* sont autoadjoints, car $(u^*u)^* = u^*u^{**} = u^*u$ et de même pour uu^*.*

Exemple 4.1.1 1. *On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :*

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|Q) = \int_{-1}^{1} PQ.$$

On pose l'endomorphisme $d : P \mapsto (X^2-1)P'' + 2XP'$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

(a) *Montrer que :* $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (d(P)|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)P'(x)Q'(x)dx$. *En déduire que* d *est un endomorphisme autoadjoint de* $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) *Déterminer* $\operatorname{Ker}(d)$.

2. *Si* u *est en endomorphisme autoadjoint, alors :* $(\operatorname{Ker} u)^{\perp} = \operatorname{Im} u$.

Proposition 4.1.1 (Caractérisation matricielle des endomorphismes autoadjoints)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\mathcal{B}$ *une base* *orthonormée* *de* E. u *est autoadjoint si et seulement si* $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ *est symétrique.*

Démonstration : On rappelle que $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = (Mat_{\mathcal{B}}(u))^T$, car $\mathcal{B}$ est une base orthonormée. Ainsi $u = u^*$ si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(u) = Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = (Mat_{\mathcal{B}}(u))^T$.

Remarque 4.1.2

1. *Ceci ne dépend pas du choix de la base orthonormée. En effet si* $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ *et* $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *est la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$ *orthonormée, alors* P *est orthogonale et la matrice de* u *dans* $\mathcal{B}'$ *est* $P^{-1}AP = P^TAP$, *encore symétrique.*
2. *Ceci est faux si la base n'est pas orthonormée. Si dans la remarque précédente, on prend une base* $\mathcal{B}'$ *quelconque, alors* P *n'est plus orthogonale et si on pose* $M = P^{-1}AP$, *donc :* $M^T = (P^{-1}AP)^T = P^TA^T(P^T)^{-1} = P^TA(P^T)^{-1}$. *A priori il n'y a aucune raison d'avoir* $M^T = M$.
3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *L'application* $u : X \mapsto AX$ *est un endomorphisme autodjoint de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *si et seulement si* A *est symétrique.*
   En effet, dans la base canonique $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, *on a* $Mat_{\mathcal{B}}(u) = A$. *Comme* $\mathcal{B}$ *est orthonormée, alors* $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = A^T$. *Ainsi* $u = u^*$ *si et seulement si* $A = A^T$.
4. *Si on note* $\varphi : u \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(u)$, *alors* φ *est un isomorphisme de* $\mathcal{L}(E)$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Ainsi* $\varphi^{-1}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(E)$ *est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}(E)$ *de dimension* $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.

Proposition 4.1.2 (Caractérisation des projecteurs orthogonaux) *Soit p un projecteur. Alors p est une projection orthogonale si et seulement si p est autoadjoint.*

Démonstration : On suppose que p est une projection orthogonale.
Soient x, y deux vecteurs quelconques de E. Alors :
$x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \operatorname{Im} p$, $x_2 \in \operatorname{Ker}(p)$, $\quad y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \operatorname{Im}(p)$, $y_2 \in \operatorname{Ker}(p)$.
Par conséquent : $(p(x)|y) = (x_1|y_1+y_2) = (x_1|y_1)+(x_1|y_2) = (x_1|y_1) = (x_1|y_1)+(x_2|y_1) = (x_1+x_2|y_1) = (x|p(y))$, car $\operatorname{Im}(p)$ et $\operatorname{Ker}(p)$ sont orthogonaux.
Il s'ensuit que p est bien autoadjoint.
Réciproquement si p est autoadjoint, l'exemple précédent donne : $(\operatorname{Ker} p)^{\perp} = \operatorname{Im} p$.

Exemple 4.1.2 *Soit* $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. *Montrer que l'endomorphisme p canoniquement associé à A est une projection orthogonale sur un espace que l'on précisera.*

4.2 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

Proposition 4.2.1 (Orthogonalité des sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint)

1. *Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. Alors ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*
2. *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

Démonstration :

1. u est un endomorphisme normal, car $u^*u = u^2 = uu^*$, puis voir le paragraphe sur les endomorphismes normaux.
2. Cela provient du premier point et de la remarque 4.1.2.

Exemple 4.2.1 *Soit s une symétrie vectorielle. Alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est autadjoint.*
On suppose que s est une symétrie orthogonale par rapport à F. Soient x, y deux vecteurs quelconques de E. Alors :
$x = x_1 + x_2$ *avec* $x_1 \in F$, $x_2 \in F^{\perp}$, $\quad y = y_1 + y_2$ *avec* $y_1 \in F$, $y_2 \in F^{\perp}$.
Par conséquent : $(s(x)|y) = (x_1 - x_2|y_1 + y_2) = (x_1|y_1) + (x_1|y_2) - (x_2|y_1) - (x_2|y_2) = (x_1|y_1) - (x_2|y_2) = (x_1|y_1) - (x_1|y_2) + (x_2|y_1) - (x_2|y_2) = (x_1 + x_2|y_1 - y_2) = (x|s(y))$.
Il s'ensuit que s est bien autoadjoint.
Réciproquement si s est autoadjoint : les sous-espaces propres $E_1(s)$ et $E_{-1}(s)$ sont orthogonaux et donc s est une symétrie orthogonale.

Proposition 4.2.2 (Sous-espace stable par un endomorphisme autoadjoint) *Soit u un endomorphisme autoadjoint de E et F un sous-espace vectoriel de E stable de u. Alors on a : $u(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$ et u induit un endomorphisme autoadjoint sur F et $F^{\perp}$.*

Démonstration : On sait que $u^*(F^\perp) \subset F^\perp$ et comme $u = u^*$, on a donc le résultat. u induit un endomorphisme autoadjoint sur F, car on a encore : $\forall x, y \in F,\ (u(x)|y) = (x|u(y))$.

Remarque 4.2.1 *Ainsi si u est autoadjoint, alors si on a $E = F \oplus F^\perp$, avec $u(F) \subset F$, alors dans toute base orthonormée $\mathcal{B}$ adaptée à cette somme, la matrice de u est :*

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u(F) & u(F^\perp) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix} & \begin{array}{c} F \\ F^\perp \end{array} \end{array}$$

, avec A et B symétriques.

Théorème 4.2.1 (Théorème spectral) *Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.*
u est autoadjoint si et seulement si u est diagonalisable dans une base orthonormée.
On peut reformuler ceci de la façon suivante : u est autoadjoint si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ avec les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration : Pour le sens retour, si u est diagonalisable dans une base orthonormée, alors sa matrice dans celle-ci est symétrique (car diagonale) et donc u est autoadjoint (proposition 4.1.1).
Supposons que u soit autoadjoint. Comme $u^*u = u^2 = uu^*$, alors u est un endomorphisme normal et donc il existe une base orthonormée telle que $M = Mat_{\mathcal{B}}(u) = Diag(\lambda_1, ..., \lambda_k, S(a_1, b_1), ..., S(a_l, b_l))$, où $\lambda_1, ..., \lambda_k, a_1, ..., a_l, b_1, ..., b_l \in \mathbb{R}$ et :
$\forall a, b \in \mathbb{R},\ S(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Mais u étant autoadjoint et $\mathcal{B}$ une base orthonormée, alors M est symétrique donc : $\forall i \in [\![1, l]\!],\ b_i = 0$.
Ainsi M est diagonale.
Pour la reformulation, u est diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$. On suppose maintenant u diagonalisable.
Si $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ est constituée d'espaces orthogonaux deux à deux, alors u est diagonalisable en base orthonormée, en concaténant des bases orthonormées sur chaque $E_\lambda(u)$. Ainsi u est autoadjoint.
Si u est autoadjoint, on peut trouver une base orthonormée de diagonalisation. On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de u et on numérote la base de diagonalisation $(e_1^{(1)}, ..., e_{n_1}^{(1)}, ..., e_1^{(p)}, ..., e_{n_p}^{(p)})$, avec $e_k^{(i)}$ qui est vecteur propre pour la valeur propre λ_i, pour i dans $[\![1, p]\!]$ et donc $\text{Vect}(e_1^{(i)}, ..., e_{n_i}^{(i)}) \subset E_{\lambda_i}$. Pour l'inclusion inverse, on a par diagonalisabilité de u : $n = \sum_{i=1}^{p} n_i \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) = n$, donc dans ces inégalités, on n'a que des égalités, soit : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ n_i = \dim(E_{\lambda_i})$ et donc : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \text{Vect}(e_1^{(i)}, ..., e_{n_i}^{(i)}) = E_{\lambda_i}$.
Le fait que les vecteurs $e_k^{(i)}$ soient orthogonaux entre eux fait que les sous-espaces E_{λ_i} le sont aussi.

Remarque 4.2.2 *En reprenant ce qui a été dit au début de la preuve précédente, si u est autoadjoint, alors u est diagonalisable et $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$, avec $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ et pour construire une base orthonormée de diagonalisation, il suffit de contruire une base orthonormée de chaque $E_{\lambda_i}(u)$ (par exemple grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) et de regrouper toutes ces bases, car les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*

Exemple 4.2.2 1. *On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :*
$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|Q) = \int_{-1}^{1} PQ.$
On pose l'endomorphisme $d : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
(a) *Montrer que d est diagonalisable dans une base orthonormée pour le produit scalaire cité.*
(b) *Soit $\lambda \in Sp(d)$. Donner une relation entre les degrés des vecteurs propres associés à λ et λ.*

2. *Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de E. On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ ses valeurs propres rangées dans l'ordre croissant ($\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_p$). Pour i dans $[\![1, p]\!]$, on note E_i le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i.*
   - (a) *Montrer que :* $\forall x \in E,\ \lambda_1 \|x\|^2 \leq (u(x)|x) \leq \lambda_p \|x\|^2$.
   - (b) *Pour quels vecteurs x l'une des deux inégalités ci-dessus est-elle une égalité ?*
   - (c) ***(Théorème de Courant-Fischer)*** *On note $\mu_1 \leq ... \leq \mu_n$ les valeurs propres de u avec des éventuelles répétitions et $S^{n-1} = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}$.*
     Soit $d \in [\![1, n]\!]$ et on note $\mathcal{V}_d$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension d.
     Montrer que pour k dans $[\![1, n]\!]$, on a :
     $\mu_k = \min\limits_{V \in \mathcal{V}_k} \max\{(u(x)|x),\ x \in V \cap S^{n-1}\} = \max\limits_{V \in \mathcal{V}_{n-k+1}} \min\{(u(x)|x),\ x \in V \cap S^{n-1}\}$.
   - (d) *Montrer que* $|\!|\!|u|\!|\!| = \max\limits_{\lambda \in Sp(u)} |\lambda|$.

(a)

(b)

(c) •

- *Soit $V \in \mathcal{V}_{n-k+1}$. Soit $W = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, on a $V \cap W \neq \{0\}$. Soit $y \in V \cap W$ unitaire, on a donc $y = \sum_{i=1}^{k} y_i e_i$, puis : $(u(y)|y) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i y_i^2 \leq \mu_k$, puis : $\min\{(u(x)|x),\ x \in V \cap S^{n-1}\} \leq (u(y)|y) \leq \mu_k$.*

Cela donne : $\max_{V \in \mathcal{V}_{n-k+1}} \min\{(u(x)|x),\ x \in V \cap S^{n-1}\} \leq \mu_k$.

On pose $W_k = \operatorname{Vect}(e_k, \dots, e_n) \in \mathcal{V}_{n-k+1}$.

$$\forall z \in W_k \cap S^{n-1},\ (u(z)|z) = \sum_{i=k}^{n} \mu_i z_i^2 \geq \mu_k \sum_{i=k}^{n} z_i^2 = \|z\|^2 \mu_k = \mu_k.$$

Ce minorant est atteint en prenant $z = e_k$, donc : $\min\{(u(x)|x),\ x \in W_k \cap S^{n-1}\} = \mu_k$.

On en déduit que : $\mu_k = \max_{V \in \mathcal{V}_{n-k+1}} \min\{(u(x)|x),\ x \in V \cap S^{n-1}\}$ et le maximum est atteint en $V = W_k$.

(d) *Soit $k \in [\![1, p]\!]$ tel que : $|\lambda_k| = \max_{\lambda \in Sp(u)} |\lambda|$.*

Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. D'après les calculs précédents :

$\|u(x)\|^2 = \| \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\lambda_i x_i}_{\in E_i} \|^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \|x_i\|^2$, grâce au théorème de Pythagore.

On a donc : $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \|x_i\|^2 \leq \lambda_k^2 \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2 = \lambda_k^2 \|x\|^2 = \lambda_k^2$, grâce au théorème de Pythagore. Ainsi $\|u(x)\| \leq \sqrt{\lambda_k^2} = |\lambda_k|$ et $|\lambda_k|$ majore $\{\|u(x)\|,\ x \in E$ et $\|x\| = 1\}$.

Par ailleurs ce majorant est atteint. En effet, on prend $x \in E_k$ non nul et quitte à diviser par $\|x\|$, on peut supposer que $\|x\| = 1$. Ainsi $\|u(x)\| = \|\lambda_k x\| = |\lambda_k| \times \|x\| = |\lambda_k|$.

On a donc $|||u||| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \|u(x)\| = |\lambda_k| = \max_{\lambda \in Sp(u)} |\lambda|$.

3. *Soient p, q deux projecteurs orthogonaux de E.*
   (a) *Montrer que pqp est diagonalisable.*
   (b) *Montrer que $(\operatorname{Im}(p) + \operatorname{Ker}(q))^\perp = \operatorname{Im}(q) \cap \operatorname{Ker}(p)$.*
   (c) *En déduire que pq est diagonalisable.*

4. *Soit E un espace euclidien de dimension n et $u_1, \ldots, u_p$ des endomorphismes autoadjoints de E. On suppose que*
   i. $\operatorname{rg} u_1 + \cdots + \operatorname{rg} u_p = n$.
   ii. $\forall x \in E, \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (u_i(x)|x) = \|x\|^2$.

   Montrer que $E = \operatorname{Im} u_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} u_p$, que les $\operatorname{Im} u_i$ sont orthogonaux entre eux deux à deux, et que pour tout i, u_i est le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u_i$.

   La relation (ii) s'écrit aussi : $\forall x \in E, \quad (u_1 + \cdots + u_p - \mathbf{Id}_E)(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$..

   L'endomorphisme $v = u_1 + \cdots + u_p - \mathrm{Id}_E$ étant autoadjoint, on a : $v = 0$ (en effet, v est diagonalisable et si λ est une valeur propre associé à un vecteur propre x, on a : $0 = (v(x)|x) = \lambda\|x\|^2$, puis $\lambda = 0$, donc $Sp(v) = \{0\}$). Donc $u_1 + \cdots + u_p = \mathbf{Id}_E$, d'où on tire $E = \operatorname{Im} u_1 + \cdots + \operatorname{Im} u_p$. Comme de plus $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(\operatorname{Im} u_i) = \dim E$ d'après (i), on a : $E = \operatorname{Im} u_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} u_p \quad (*)$.

   En appliquant maintenant l'égalité $\mathrm{Id}_E = u_1 + \cdots + u_p$ au vecteur $u_k(x)$, on obtient : $\forall k \in [\![1, n]\!], \forall x \in E, \quad u_k(x) = u_1 u_k(x) + \cdots + u_p u_k(x) \quad (**)$.

   D'après $(*)$, la décomposition d'un élément de $\operatorname{Im} u_k$ se fait de manière unique dans $\oplus_{i=1}^{p} \operatorname{Im} u_i$, d'où on déduit, avec $(**)$ que $u_k(x) = u_k^2(x)$ et $\forall \ell \neq k, u_k u_\ell(x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en tire : $u_k = u_k^2$ et : $\forall \ell \neq k, u_k u_\ell = 0$. Les endomorphismes u_k sont donc des projecteurs, orthogonaux puisqu'ils sont autoadjoints.

   Il nous reste à montrer que les $\operatorname{Im} u_k$ sont orthogonaux entre eux deux à deux. Pour $k \neq \ell$, on a vu $u_k u_\ell = 0$, ce qui entraîne $\operatorname{Im} u_\ell \subset \operatorname{Ker} u_k$. L'endomorphisme u_k étant un projecteur orthogonal, on a $\operatorname{Ker} u_k = (\operatorname{Im} u_k)^\perp$, donc $\operatorname{Im} u_\ell \subset (\operatorname{Im} u_k)^\perp$, ce qui prouve que $\operatorname{Im} u_\ell$ et $\operatorname{Im} u_k$ sont orthogonaux. Ceci est vrai dès que le couple (k, ℓ) vérifie $k \neq \ell$, d'où le résultat.

Théorème 4.2.2 (Théorème spectral version matricielle) *Pour toute matrice A symétrique réelle, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telle que : $A = PDP^{-1} = PDP^T$.*

Démonstration : Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qui est une base orthonormée pour le produit scalaire usuel. Ainsi u est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire usuel et il existe donc une base orthonormée $\mathcal{B}'$ qui diagonalise u. Ainsi on a : $A = Mat_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}'}(u)(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}$. Si on pose $D = Mat_{\mathcal{B}'}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, alors D est diagonale et P est orthogonale en tant que matrice de passage d'une base orthonormée à une autre. Ainsi on a aussi $P^{-1} = P^T$.

Remarque 4.2.3

1. *ATTENTION, ceci n'est valable que pour les matrices réelles. Si on prend $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, elle est symétrique, mais elle n'est pas diagonalisable. En effet, on a : $\chi_A(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, donc si A est diagonalisable, alors il existe P dans $GL_2(\mathbb{C})$ tel que : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$, ce qui n'est pas le cas.*
2. *Pour trouver P en pratique, on cherche les sous-espaces propres de A, puis on trouve une base orthonormée de chaque sous-espace propre en utilisant éventuellement l'algorithme de Gram-Schmidt.*
3. *Quitte à échanger deux colonnes de P, on peut imposer que $\det(P) = 1$, soit $P \in SO_n(\mathbb{R})$.*
4. *En imitant les preuves précédentes, on peut montrer que toute matrice antisymétrique est ortho-*

gonalement semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 \\ \theta_1 & 0 \end{pmatrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -\theta_s \\ \theta_s & 0 \end{pmatrix} & \\ & & & & 0_r \end{pmatrix}$.

Exemple 4.2.3 1. *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres rangées dans l'ordre croissant ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$). Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lambda_1 X^T X \leq X^T AX \leq \lambda_n X^T X$.*

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A sur $\mathbb{R}^n$ et on note $\mathcal{B}$ la base canonique. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(x) = X$. Ainsi on a $X^T AX = (X|AX) = (x|u(x))$. De plus $X^T X = (x|x) = \|x\|^2$. On conclut grâce grâce au deuxième exemple de l'exemple 4.2.2.

2. *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que :$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T AX = 0$. Montrer que $A = 0$.*

4.3 Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques positifs, définis positifs

Définition 4.3.1 (Matrices ou endomorphismes positifs) 1. *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T AX \geq 0 (\textit{respectivement : } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^T AX > 0).$$

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

2. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. On dit que u est autoadjoint positif (respectivement autoadjoint défini positif) si*

$$\forall x \in E,\ (u(x)|x) \geq 0 (\textit{respectivement : } \forall x \in E \setminus \{0\},\ (u(x)|x) > 0).$$

On note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E autoadjoints positifs et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E autoadjoints définis positifs.

Remarque 4.3.1 1. *(IMPORTANTE) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On a : $u \in S^+(E) \Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(u) \in S_n^+(\mathbb{R})$ et de même : $u \in S^{++}(E) \Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(u) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.*

2. *(IMPORTANTE) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice symétrique $A^T A$ est positive :*

$A^T A$ est définie positive si et seulement si

3. *(IMPORTANTE) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Nous avons vu que u^*u est autoadjoint. En faisant le lien entre matrice et application linéaire, u^*u est positif et il est défini positif si et seulement si u est bijectif.*

4. *Soit $u \in S^{++}(E)$. On peut montrer que $(x, y) \mapsto (u(x)|y)$ est un produit scalaire sur E (pour $x, y \in E$, on a $(u(x)|y) = (x|u(y)) = (u(y)|x)$, $(u(x)|x) \geq 0$ et : $(u(x)|x) = 0 \Rightarrow x = 0$).*

5. *Soit* $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. *On peut montrer que* $(X,Y) \mapsto X^T AY$ *est un produit scalaire sur* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. *Si on pose* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, *on a* $X^T AY =$

   En effet :

Exemple 4.3.1 1. *On munit* $\mathbb{R}_n[X]$ *du produit scalaire défini par :*
$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} PQ$. *On pose l'endomorphisme*
$d : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ *de* $\mathbb{R}_n[X]$. *On a vu dans l'exemple 4.1.1, que :*
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ (d(P)|P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2)(P'(x))^2 dx \geq 0$ *et donc :* $d \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}_n[X])$.

2. *Soit* $H = \left[\dfrac{1}{i+j}\right]_{1 \leq i,j \leq n}$. *Montrer que* H *est dans* $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Proposition 4.3.1 (Caractérisation spectrale de la positivité) 1. *Soit* $A \in S_n(\mathbb{R})$. *Alors* A *est dans* $S_n^+(\mathbb{R})$ *(respectivement dans* $S_n^{++}(\mathbb{R})$*) si et seulement si :* $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ *(respectivement* $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$*).*

2. *Soit* $u \in S(E)$. *Alors* u *est dans* $S^+(E)$ *(respectivement dans* $S^{++}(E)$*) si et seulement si :* $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$ *(respectivement* $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$*).*

Démonstration :

1.

2. Faire le lien entre application linéaire et matrice.

Remarque 4.3.2 *On a :* $S^{++}(E) \subset GL(E)$ *et* $S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Pour les endomorphismes :

Exemple 4.3.2

1. *Les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes autoadjoints positifs, car un projecteur a un spectre dans* $\{0, 1\}$ *qui est inclus dans* $\mathbb{R}_+$.
   Ainsi pour un projecteur orthogonal p*, on a :*

2. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Montrer que :* $|||u||| = \sqrt{|||u^* u|||}$.
   On a par stricte croissance de la fonction carrée :
   $|||u|||^2 = \left(\sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|\right)^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} (u(x)|u(x)) = \sup\limits_{\|x\|=1} (u(x)|u(x)) = \sup\limits_{\|x\|=1} (u * u(x)|x)$. *Or* $u^* u$ *est dans* $S^+(E)$*, donc ses valeurs propres sont* $0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_p$*, puis grâce à l'exemple 4.3.1, on a :* $\sup\limits_{\|x\|=1} (u * u(x)|x) = \lambda_p = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in Sp(u^* u)\} = |||u^* u|||$.

3. *Soit* $u \in S^{++}(E)$. *Montrer que :* $\forall x \in E,\ \|x\|^4 \leq (x|u(x))(x|u^{-1}(x))$.

4. *Soient* $u, v \in S^+(E)$.
   (a) *Montrer que :* $u + v \in S^+(E)$.
   (b) *Montrer que* $\mathrm{Ker}\,(u + v) = \mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(v)$.

Pour les matrices :

Exemple 4.3.3 1. *Soit* $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. *Soit* $k \in [\![1, n]\!]$ *et on pose* $A_k = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq k}$. *Montrer que :* $\det(A_k) > 0$.

2. *Soit* $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. *Montrer que :* $\det(A) \leq \left(\dfrac{tr(A)}{n}\right)^n$.

3. *Déterminer les matrice* $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *telle que* $M^T M = M M^T$ *et* $M^2 + 4I_2 = 0$.

   Analyse : *Soit* M *une telle matrice. On pose* $A = M^T M$.

   On a : $A^2 = M^T M M^T M \underset{M^T M = M M^T}{=} M^2 (M^2)^T \underset{M^2 = -4I_2}{=} (-4I_2)(-4I_2) = 16 I_2$.

   $X^2 - 16$ *est un polynôme annulateur de* A, *donc le spectre de* A *est inclus dans les racines de ce polynôme :* $Sp(A) \subset \{-4, 4\}$.

   A *est dans* $S_2^+(\mathbb{R})$, *grâce à l'exemple 4.3.1 donc elle est diagonalisable et à valeurs propres positives. Ainsi* $Sp(A) = \{4\}$.

   Ainsi il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ *tel que* $A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} = 4 P I_2 P^{-1} = 4 P P^{-1} = 4 I_2$. *Ainsi* $\left(\dfrac{M}{2}\right)^T \dfrac{M}{2} = \dfrac{M^T M}{4} = \dfrac{A}{4} = I_2$, *donc* $\dfrac{M}{2}$ *est orthogonale.*

   Premier cas : $M/2$ *est dans* $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$.

   L'endomorphiusme canoniquement associé est donc une symétrie vectorielle, donc $(M/2)^2 = I_2$, *soit* $M^2 = 4I_2$, *ce qui est contradictoire avec* $M^2 = -4I_2$.

   Deuxième cas : $M/2$ *est dans* $SO_2(\mathbb{R})$. *Il existe donc* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $M/2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

   Ainsi $M^2 = 4 \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$ *et* $M^2 + 4I_2 = 4 \begin{pmatrix} 1 + \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & 1 + \cos(2\theta) \end{pmatrix}$. *On veut donc* $\cos(2\theta) = -1$ *et* $\sin(2\theta) = 0$, *soit* $2\theta \equiv \pi[2\pi]$, *soit* $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, *soit* $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ *ou* $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. *Ainsi* $M = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *ou* $M = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Examen : *On vérifie réciproquement que* $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ *vérifient les relations voulues.*

4. *Soient* $A \in S_n(\mathbb{R})$. *Montrer que :* $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow [\forall B \in S_n^+(\mathbb{R}),\ tr(AB) \geq 0]$.

5. *(Racine carrée d'une matrice) Nous rappelons un résultat vu dans le chapitre 6 : soient* u *et* v *deux endomorphismes de* E *diagonalisables tels que :* $uv = vu$. *Alors* u *et* v *admettent une base commune de diagonalisation.*

   (a) *Soit* $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe* B *dans* $S_n^+(\mathbb{R})$ *tel que* $B^2 = A$.

   (b) *On note* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *les valeurs propres de* A *comptées avec multiplicité et* $\mu_1, ..., \mu_p$ *les valeurs propres de* A *sans répétitions.*
   i) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ *tel que :* $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $Q(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}$.
   ii) En déduire que $(Q(A))^2 = A$.

(c) *Montrer que* B *est unique.*

6. *(Décomposition polaire)*
   (a) *Soit* $M \in GL_n(\mathbb{R})$. *Montrer que :* $\exists (A, \Omega) \in S_n^+(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}),\ M = \Omega A$.
   (b) *Même question avec* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7. *Soient* $n \geq 2$, $p \in [\![1, n-1]\!]$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. *On écrit* $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$, *avec* $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ *et* $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. *Nous avons vu dans cet exemple que* B *est dans* $S_p^{++}(\mathbb{R})$ *et et de même on montre que* D *est dans* $S_{n-p}^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer que : $\det(A) \leq \det(B)\det(D)$.

B et D sont symétriques réelles, donc diagonalisables en base orthonormée, ce qui donne des matrices de passage orthogonales P et Q telles que $P^T BP = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = D_1$ *et* $Q^T DQ = diag(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n) = D_2$. *Par hypothèse, tous les λ_i sont strictement positifs. On pose* $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0^T & Q \end{pmatrix}$ *et on vérifie que* $R^{-1} = R^T$ *puis que* $U = R^T AR = \begin{pmatrix} D_1 & L \\ {}^tL & D_2 \end{pmatrix}$ *où* $L = P^T CQ$ *est une matrice de même taille que* C.

U est aussi dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, *car :* $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T UX = (RX)^T A(RX) > 0$, *car* $RX \neq 0$ *(R est inversible).*

Il existe $V = [v_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$ *tel que* $U = VDV^T$, *avec* $D = diag(\mu_1, ..., \mu_n)$ *et :* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_i > 0$.

En regardant les coefficients diagonaux, on a : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = \sum_{j=1} v_{i,j}^2 \mu_j$. *Comme :* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} v_{i,j}^2 = 1$, *alors par concavité de* $\ln$, *on a :* $\ln(\lambda_i) \geq \sum_{j=1}^{n} v_{i,j}^2 \ln(\mu_j)$, *puis :* $\sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda_i) \geq \sum_{1 \leq i,j \leq n} v_{i,j}^2 \ln(\mu_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} v_{i,j}^2 \right) \ln(\mu_j) = \sum_{j=1}^{n} \ln(\mu_j) = \ln\left(\prod_{j=1}^{n} \mu_j \right)$, *puis* $\det(U) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j \leq \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Comme $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (\det(P))^2 (\det(Q))^2 \det(B)\det(D) = \det(B)\det(D)$ *et de même* $\det(A) = \det(U)$, *alors* $\det(A) \leq \det(B)\det(D)$.