1 Dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles

1.1 Définition et premières propriétés

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dans tout ce paragraphe, F désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$.
On rappelle que dans ce cas, toutes les normes sur F sont équivalentes, donc la notion de convergence est indépendante de celle-ci.

Définition 1.1.1 (Dérivée en un point) *Soit $f : I \longrightarrow F$ une application et soit $t_0 \in I$. On dit que f est dérivable en t_0 si : $\lim\limits_{t \to t_0} \left(\dfrac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) \right)$ existe.*
Dans ce cas, cette limite est appellée la dérivée de f en t_0 (ou le vecteur dérivé de f en t_0), et on la note $f'(t_0)$.

Remarque 1.1.1 *Lorsque $F = \mathbb{R}^2$ ou $F = \mathbb{R}^3$ et que la fonction f représente le mouvement d'un point matériel en fonction du temps, le vecteur $f'(t_0)$ représente la vitesse instantannée du point à l'instant t_0.*

Définition 1.1.2 (Dérivée à gauche et à droite) *Soit $f : I \longrightarrow F$ et $t_0 \in I$.*

1. *Si $t_0 \neq \sup I$, on dit que f est dérivable à droite en t_0 lorsque : $\lim\limits_{t \to t_0^+} \left(\dfrac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) \right)$ existe.*
   Dans ce cas, on note $f'_d(t_0)$ cette limite et on l'appelle la dérivée de f à droite en t_0.
2. *Si $t_0 \neq \inf I$, on dit que f est dérivable à gauche en t_0 lorsque : $\lim\limits_{t \to t_0^-} \left(\dfrac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) \right)$ existe.*
   Dans ce cas, on note $f'_g(t_0)$ cette limite et on l'appelle la dérivée de f à gauche en t_0.

Remarque 1.1.2 *De façon équivalente, f est dérivable à droite en t_0 si $f|_{I \cap [t_0, +\infty[}$ est dérivable en t_0.*

Proposition 1.1.1 (Lien entre dérivabilité et dérivabilité à gauche et à droite) *Soient une fonction $f : I \to F$ et $t_0 \in \overset{\circ}{I}$.*
Alors f est dérivable en t_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en t_0 et $f'_d(t_0) = f'_g(t_0)$.

Démonstration : Provient du fait que d'avoir une limite en un point est équivalent à avoir des limites identiques à gauche et à droite de ce point.

Proposition 1.1.2 (Lien entre dérivabilité et développement limité à l'ordre un) *Soient $f \in \mathcal{F}(I, F)$ et $t_0 \in I$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) f est dérivable en t_0 ;

(ii) il existe $l \in F$ et $\varepsilon \in \mathcal{F}(I, F)$ tels que :

$$\forall t \in I \ , \ f(t) = f(t_0) + (t - t_0)l + (t - t_0)\varepsilon(t) \ \text{avec} \ \lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0$$

De plus, lorsque l'une de ces conditions est vérifiée, $l = f'(t_0)$.

Démonstration : • Montrons $(i) \Rightarrow (ii)$.
On suppose f dérivable en a. Posons $l = f'(t_0)$ et pour $t \in I$:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t - t_0}\left(f(t) - f(t_0)\right) - f'(t_0) & \text{si } t \neq t_0 \\ 0 & \text{si } t = t_0 \end{cases}$$

On vérifie que pour tout $t \in I$, $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$. De plus, par définition de la dérivabilité, on a : $\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0$.

• Montrons $(ii) \Rightarrow (i)$.
On suppose qu'il existe $l \in F$ et une fonction $\varepsilon \in \mathcal{F}(I, F)$ tels que :

$$\forall t \in I \ , \ f(t) = f(t_0) + (t - t_0)l + (t - t_0)\varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0$$

Alors, pour tout $t \in I \setminus \{t_0\}$, on a : $\dfrac{1}{t - t_0}\left(f(t) - f(t_0)\right) = l + \varepsilon(t)$.
Par suite, $\lim_{t \to t_0} \dfrac{1}{t - t_0}\left(f(t) - f(t_0)\right) = l$, ce qui prouve que f est dérivable en t_0 et $f'(t_0) = l$.

Exemple 1.1.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to E$ telle que $f(0) = 0$ et f dérivable en 0. Déterminer $\lim s_n$, avec :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ s_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$.

Corollaire 1.1.1 (Dérivable implique continue) *Soient $a \in I$ et une fonction $f : I \to F$ dérivable en t_0. Alors f est continue en t_0.*

Démonstration : D'après la proposition précédente, il existe $l \in F$ et $\varepsilon \in \mathcal{F}(I, F)$ tels que :
$\forall t \in I \ , \ f(t) = f(t_0) + (t - t_0)l + (t - t_0)\varepsilon(t)$. En faisant tendre t vers t_0, on a : $\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$, ce qui prouve la continuité en t_0.

Remarque 1.1.3 *ATTENTION, la réciproque est fausse.*
Soient $y \in F \setminus \{0\}$ et $f : t \mapsto \|ty\|_F$.
On a : $\forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) = |t| \times \|y\|_F$, donc f est continue en 0, car $t \mapsto |t|$ l'est. Cependant cette fonction n'est pas dérivable en 0. Ainsi f n'est pas dérivable en 0.

Proposition 1.1.3 (Dérivation et coordonnées) *Soient $f \in \mathcal{F}(I, F)$ et $t_0 \in I$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de F. On a donc $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$, avec $(f_1, \cdots, f_n)$ les applications coordonnées de f. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) f est dérivable en t_0.

(ii) Toutes les applications coordonnées f_i de f dans la base $\mathcal{B}$ sont dérivables en t_0.

Dans ce cas,

$$f'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0) e_i.$$

Démonstration : Soit $t \in I$, avec $t \neq t_0$. On a : $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{f_i(t)-f(t_0)}{t-t_0} e_i$ $(*)$. On a vu que dans un espace vectoriel dimension finie, une fonction converge en t_0 si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées convergent. Ainsi $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ existe si et seulement si $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \frac{f_i(t)-f_i(t_0)}{t-t_0}$ pour tout i de $[\![1,n]\!]$. Le passage à la limite quand t tend vers t_0 dans $(*)$ donne la relation.

Remarque 1.1.4 *L'étude de la dérivabilité d'une fonction à valeurs dans F de dimension finie $n \geq 1$ se ramène à l'étude de la dérivabilité de n fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Définition 1.1.3 (Fonction dérivée) *Si f est dérivable en tout point de I, on dit qu'elle est dérivable sur I.*
De plus, dans ce cas, l'application de I dans E : $t \mapsto f'(t)$ est appelée fonction dérivée de f, et notée f', ou $D(f)$, ou $\dfrac{df}{dt}$.

Exemple 1.1.2 *Sur $\mathbb{R}$, on définit $R : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.*
Alors : $\forall t \in \mathbb{R},\ R'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} = R\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Corollaire 1.1.2 *Soit $f : I \longrightarrow F$. On suppose que f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Alors,*

$$f \text{ est constante sur } I \text{ si et seulement si : } \forall t \in \overset{\circ}{I}\ ,\ f'(t) = 0.$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la propriété déjà vue pour les fonctions à valeurs réelles (ou complexes) aux applications coordonnées de f.

1.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 1.2.1 (Dérivation d'une combinaison linéaire) *Soient f et g des applications de I dans E dérivables en un point $t_0 \in I$ (resp. dérivable sur I). Soit α et β deux scalaires. Alors $\alpha f + \beta g$ est dérivable en t_0 (resp. dérivable sur I) et :*

$$(\alpha f + \beta g)'(t_0) \ = \ \alpha f'(t_0) + \beta g'(t_0) \quad (\textit{resp.} \quad (\alpha f + \beta g)' \ = \ \alpha f' + \beta g').$$

Démonstration : Posant $h = \alpha f + \beta g$, on passe à la limite quand t tend vers t_0 dans l'égalité :

$$\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0} = \alpha\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} + \beta\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}.$$

Les cas dérivables sur I s'en déduisent immédiatement.

Remarque 1.2.1 *On en déduit que l'ensemble des applications de I dans E dérivables sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel noté $\mathcal{D}^1(I,E)$ et que l'application $f \mapsto f'$ est linéaire de $\mathcal{D}^1(I,E)$ sur $\mathcal{F}(I,E)$.*

Proposition 1.2.2 (Dérivation d'une composée) *Soient I et J deux intervalles réels, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $t_0 \in J$ (resp. sur J) telle que : $\varphi(J) \subset I$. Soit $f : I \to F$ une fonction dérivable en $u_0 = \varphi(t_0)$ (resp. sur I). Alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 (resp. sur J) et*

$$(f\circ\varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0).f'(\varphi(t_0)) \ (\textit{resp.}\ (f\circ\varphi)' = \varphi'.(f'\circ\varphi)).$$

Démonstration : Écrivons le développement limité à l'ordre un de f au voisinage de u_0 :
$f(u) - f(u_0) = (u-u_0)f'(u_0) + (u-u_0)\varepsilon(u)$, avec $\varepsilon : J \to F$ une fonction telle que $\displaystyle\lim_{u\to u_0} \varepsilon(u) = 0$.
On a donc : $\forall t \in I,\ f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0)) = (\varphi(t)-\varphi(t_0))f'(u_0) + (\varphi(t)-\varphi(t_0))\varepsilon(\varphi(t))$.
Pour t dans I avec $t \neq t_0$, on a : $\dfrac{f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0))}{t-t_0} = \dfrac{(\varphi(t)-\varphi(t_0))}{t-t_0}f'(u_0) + \dfrac{(\varphi(t)-\varphi(t_0))}{t-t_0}\varepsilon(\varphi(t))$.
Or φ est dérivable en t_0, donc elle y est aussi continue. Par composition de limites, on a :
$\displaystyle\lim_{t\to t_0} \varepsilon(\varphi(t)) = \lim_{u\to u_0} \varepsilon(u) = 0$, puis : $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \frac{f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0))}{t-t_0} = \varphi'(t_0)f'(u_0)$.

Remarque 1.2.2 *$\varphi'(t_0)$ est un scalaire (c'est un réel) et $f'(\varphi(t_0))$ est un vecteur de F, donc $\varphi'(t_0).f'(\varphi(t_0))$ est la multiplication issue de la loi externe définie sur $\mathbb{K} \times F$.*

Proposition 1.2.3 (Dérivée et application linéaire) *Soit F, G deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, u une application linéaire de F dans G, et f une fonction dérivable en $t_0 \in I$ (resp. sur I) à valeurs dans F.*
Alors $u \circ f$ est dérivable en t_0 (resp. sur I) et :

$$(u \circ f)'(t_0) \;=\; u(f'(t_0)) \text{ (resp. } (u \circ f)' = u \circ f' \text{).}$$

Démonstration : Pour tout $t \in I \setminus \{t_0\}$, on pose $g = u \circ f$.
On a : $\dfrac{1}{t-t_0}\,(g(t) - g(t_0)) =$

Proposition 1.2.4 (Dérivée et application bilinéaire) *Soient F et G deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies, $f : I \to F$, $g : I \to G$ deux fonctions dérivables en $t_0 \in I$ (resp. sur I) et B une application bilinéaire de $F \times G$ dans H (un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie). Alors :*

(i) l'application $B(f,g) : t \longmapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable en t_0 (resp. sur I) ;

(ii) et on a la relation :

$$B(f,g)'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)) \text{ (resp. } B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g') \text{)}$$

Démonstration : Pour tout $t \in I \setminus \{t_0\}$, en posant $\varphi = B(f,g)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t-t_0}\,(\varphi(t) - \varphi(t_0)) &= \frac{1}{t-t_0}\,(B(f(t),g(t)) - B(f(t_0),g(t_0))) \\
&= \frac{1}{t-t_0}\,(B(f(t),g(t)) - B(f(t),g(t_0)) + B(f(t),g(t_0)) - B(f(t_0),g(t_0)))
\end{aligned}$$

Soit encore, par bilinéarité de B :

$$\frac{1}{t-t_0}\,(\varphi(t) - \varphi(t_0)) \;=\; B\left(f(t), \frac{1}{t-t_0}(g(t)-g(t_0))\right) + B\left(\frac{1}{t-t_0}(f(t)-f(t_0)), g(t_0)\right).$$

Puisque f est dérivable en t_0, f est aussi continue en t_0 et puisque g est aussi dérivable en t_0, on a donc :

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)\ ,\ \lim_{t\to t_0}\left(\frac{1}{t-t_0}(f(t)-f(t_0))\right) = f'(t_0) \text{ et } \lim_{t\to t_0}\left(\frac{1}{t-t_0}(g(t)-g(t_0))\right) = g'(t_0).$$

Enfin, puisque F et G sont de dimensions finies, et B est bilinéaire sur $F \times G$, B est continue sur $F \times G$. Par conséquent,

$$\lim_{t\to t_0}\left(\frac{1}{t-t_0}\,(\varphi(t)-\varphi(t_0))\right) = B(f(t_0), g'(t_0)) + B(f'(t_0), g(t_0)).$$

Remarque 1.2.3 *Soient $\lambda : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to F$ deux fonctions dérivables sur I. Alors λf est dérivable sur I et : $\forall t \in I,\ (\lambda f)'(t) = \lambda'(t)f(t) + \lambda(t)f'(t)$.*

Exemple 1.2.1 *Soient M et N deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la dérivée de $u \mapsto M(u)N(u)$.*

Corollaire 1.2.1 (Dérivation d'un produit scalaire) *Soient f et g deux fonctions dérivables en t_0 (resp. sur I). Si F est un espce euclidien, alors $\langle f, g\rangle : t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ est dérivable en t_0 (resp. sur I) et*

$$\langle f, g\rangle' (t_0) =$$

Démonstration : L'application $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est bilinéaire sur F^2 qui est de dimension finie, donc : $\forall t \in I,\ \langle f, g\rangle' (t) = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle$.

Exemple 1.2.2 *Soit f une fonction dérivable de I dans F, avec F un espace euclidien.*

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit de norme constante.*

2. *On suppose que : $\forall t \in I,\ f(t) \neq 0$. Montrer que $k : t \mapsto \|f(t)\|$ est dérivable sur I et déterminer k'.*

Proposition 1.2.5 (Dérivation d'une application multilinéaire) *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, ..., F_p, G$ des espaces vectoriels de dimension finie. Soient $M : F_1 \times ... \times F_p \to G$ une application multilinéaire et $f_i : I \to F_i$ des applications dérivables en t_0 (resp. sur I), pour $i \in [\![1, p]\!]$. Alors l'application $M(f_1, ..., f_p) : t \mapsto M(f_1(t), ..., f_p(t))$ est dérivable en t_0 (resp. I) et*

$$M(f_1, ..., f_p)'(t_0) =$$

Démonstration : On a $\dfrac{1}{t - t_0}(M(f_1(t), ..., f_p(t)) - M(f_1(t_0), ..., f_p(t_0))) =$
$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} M\left(f_1(t_0), ..., f_{i-1}(t_0), \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0}, f_{i+1}(t), ..., f_p(t)\right)$ et on conclut comme dans la preuve de la proposition 1.2.4.

Corollaire 1.2.2 (Dérivation du déterminant) *Soient $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions dérivables en t_0 (resp. sur I) de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F muni d'une base $\mathcal{B}$, alors la fonction $\det_{\mathcal{B}}(f_1, \ldots, f_n) : t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f_1(t), \ldots, f_n(t))$ est dérivable en t_0 (resp. sur I) et :*

$$\det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, \ldots, f_n)'(t_0) =$$

$$\det_{\mathcal{B}}(f_1'(t_0), f_2(t_0), \ldots, f_n(t_0)) + \det_{\mathcal{B}}(f_1(t_0), f_2'(t_0), \ldots, f_n(t_0)) + \cdots + \det_{\mathcal{B}}(f_1(t_0), f_2(t_0), \ldots, f_n'(t_0)).$$

Démonstration : $\det : F^p \to \mathbb{R}$ est multilinéaire et F est de dimension finie.

1.3 Dérivées successives

Définition 1.3.1 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$) *Soit $f : I \to F$ une fonction. Soit $k \in \mathbb{N}$. Sous réserve d'existence, la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f est définie par*

$$f^{(0)} = f,\ f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ si $f^{(k)}$ existe et est continue. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si ses dérivées à tout ordre existent, ce qui est équivalent à être de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k de $\mathbb{N}$.

Remarque 1.3.1 $(f^{(n)})^{(m)} = f^{(m+n)}$.

Proposition 1.3.1 (Dérivation coordonnée par coordonnée) *Soient $f \in \mathcal{F}(I, F)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de F. On a donc $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$, avec $(f_1, \cdots, f_n)$ les applications coordonnées de f. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

(ii) Toutes les applications coordonnées f_i de f dans la base $\mathcal{B}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I

Dans ce cas, on a :

$$\forall l \in [\![0, k]\!], \forall t \in I,\ f^{(l)}(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(l)}(t) e_i.$$

Démonstration : Pour $k = 1$, nous avons déjà fait la preuve. Ensuite le formule se généralise par récurrence.

Exemple 1.3.1 *Déterminer la dérivée n-ème de $f : t \mapsto e^t \cos(t)$.*

Proposition 1.3.2 (Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$) *Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), définies sur I à valeurs dans des espaces vectoriels de dimension finie, λ un réel, L une application linéaire et B une application bilinéaire. Alors, $\lambda f + g$, $L \circ f$ et $B(f, g)$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ et pour $l \leq k$:*

1. $(\lambda f + g)^{(l)} = \lambda f^{(l)} + g^{(l)}$.
2. $(L \circ f)^{(l)} = L \circ (f^{(l)})$.
3. $B(f, g)^{(l)} = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} B(f^{(j)}, g^{(l-j)})$ *(formule de Leibniz).*

Démonstration : Les trois points se montrent par récurrence. La dernière démonstration est sur le même principe que la formule de Leibniz vue en sup.

Démontrons la formule de Leibniz par récurrence. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose (P_k) : si $f : I \to F$ et $g : I \to G$ sont des applications de classe $\mathcal{C}^k$, avec F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $B : F \times G \to H$ est une application bilinéaire (avec H un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie), alors $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $(B(f, g))^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} B(f^{(p)}, g^{(k-p)})$.

• Pour $k = 0$, cela provient du fait qu'en dimension finie les applications bilinéaires sont continues sur I et donc par composition $B(f, g)$ est continue et $B(f, g)^{(0)} = B(f, g) = \sum_{p=0}^{0} \binom{0}{p} B(f^{(p)}, g^{(0-p)})$.

• Soit $k \in \mathbb{N}$ et on suppose (P_k). Soient $f : I \to F$ et $g : I \to G$ sont des applications de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, et $B : F \times G \to H$ est une application bilinéaire.
Grâce à (P_k) comme f et g sont aussi de classe $\mathcal{C}^k$, alors $B(f,g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $(B(f,g))^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} B(f^{(p)}, g^{(k-p)})$. Soit $p \in [\![0,k]\!]$. Les applications $f^{(p)}$ et $g^{(k-p)}$, sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc dérivables et grâce à la proposition 1.2.4, $B(f^{(p)}, g^{(k-p)})$ est dérivable et :
$\big(B(f^{(p)}, g^{(k-p)})\big)' = B(f^{(p+1)}, g^{(k-p)}) + B(f^{(p)}, g^{(k-p+1)})$. Les fonctions $f^{(p+1)}$, $g^{(k-p)}$, $f^{(p)}$ et $g^{(k-p+1)}$ sont continues sur I, alors le raisonnement fait pour $k=0$ nous dit que $B(f^{(p+1)}, g^{(k-p)}) + B(f^{(p)}, g^{(k-p+1)})$ est continue sur I et donc $B(f^{(p)}, g^{(k-p)})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. La fonction $(B(f,g))^{(k)}$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I par combinaison linéaire et donc $B(f,g)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I. De plus :

$$(B(f,g))^{(k+1)} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \big(B(f^{(p)}, g^{(k-p)})\big)' = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \big(B(f^{(p+1)}, g^{(k-p)}) + B(f^{(p)}, g^{(k-p+1)})\big) =$$

$$\binom{k}{k} B(f^{(k+1)}, g^{(0)}) + \binom{k}{0} B(f^{(0)}, g^{(k+1)}) + \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} B(f^{(p+1)}, g^{(k-p)}) + \sum_{p=1}^{k} B(f^{(p)}, g^{(k-p+1)}) =$$

$$B(f^{(k+1)}, g^{(0)}) + B(f^{(0)}, g^{(k+1)}) + \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l-1} B(f^{(l)}, g^{(k-(l-1))}) + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} B(f^{(p)}, g^{(k-p+1)}) =$$

$$\binom{k+1}{k+1} B(f^{(k+1)}, g^{(0)}) + \binom{k+1}{0} B(f^{(0)}, g^{(k+1)}) + \sum_{p=1}^{k} \left(\binom{k}{p-1} + \binom{k}{p} \right) B(f^{(p)}, g^{(k+1-p)}) =$$

$\sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} B(f^{(p)}, g^{(k+1-p)})$, grâce à la formule du triangle de Pascal, ce qui donne la proposition pour $k+1$ et qui achève la récurrence.

Remarque 1.3.2

1. *L'ensemble $\mathcal{C}^k(I,F)$ (avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
2. *Pour $f : I \to \mathbb{K}$ et $g : I \to \mathbb{K}$, et $B : (x,y) \mapsto xy$ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, le troisième point nous redonne la formule de Leibniz classique. En effet $B(f^{(p)}, g^{(q)}) = f^{(p)} g^{(q)}$, pour p, q dans $\mathbb{N}$.*

Exemple 1.3.2

Soit u, v, w trois fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). On suppose $\begin{vmatrix} u(a) & u(b) & u'(a) \\ v(a) & v(b) & v'(a) \\ w(a) & w(b) & w'(a) \end{vmatrix} = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ vérifiant $\begin{vmatrix} u(a) & u(b) & u''(c) \\ v(a) & v(b) & v''(c) \\ w(a) & w(b) & w''(c) \end{vmatrix} = 0$.

1.4 Dérivation des suites et séries de fonctions vectorielles

1.4.1 Extension des théorèmes de dérivation

Nous pouvons étendre les résultats sur la dérivation des suites et séries de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ à des fonctions à valeurs dans F.

Proposition 1.4.1 (Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions) *1. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions à valeurs dans F telles que :*

- *pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;*
- *la suite (f_n) converge simplement vers f définie sur I à valeurs dans F.*
- *la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction h définie sur I à valeurs dans F,*

alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $f' = h$, soit : $\forall x \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x) = f'(x)$

et (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I.

2. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions telle que

- *pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;*
- *la suite (f_n) converge simplement vers f sur I.*
- *la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ inclus I vers une fonction h définie sur I à valeurs dans F,*

alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $f' = h$, donc : $\forall x \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x) = f'(x)$

et (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I.

Démonstration : 1. On se fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de F. On décompose chaque fonction f_n dans cette base. On munit F de la norme N, définie par $N\left(\sum\limits_{i=0}^{p} x_i e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{p} |x_i|$. Le choix d'une norme n'influence pas la notion de convergence en dimension finie, donc si on a convergence pour la norme N, nous l'aurons aussi pour toute norme sur F.

On note : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = \sum\limits_{i=1}^{p} f_{n,i} e_i$, $f = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i e_i$ et $h = \sum\limits_{i=1}^{p} h_i e_i$.

Comme les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors toutes les fonctions coordonnées $f_{n,i}$ le sont aussi et on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ f'_n = \sum\limits_{i=1}^{p} f'_{n,i} e_i$.

Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Soit $x \in I$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, alors la notion de convergence dans un espace vectoriel de dimension finie nous dit que l'on a convergence pour chaque coordonnée : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{n,i}(x) = f_i(x)$. Ainsi $\underline{(f_{n,i})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f_i \text{ sur } I}$.

On a : $\forall x \in I,\ |f'_{n,i}(x) - h_i(x)| \leq \sum\limits_{k=1}^{p} |f'_{n,k}(x) - h_k(x)| = N(f'_n(x) - h(x)) \leq \|f'_n - h\|_\infty$. Ainsi on a $\|f'_{n,i} - h_i\|_\infty \leq \|f'_n - h\|_\infty$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f'_n - h\|_\infty = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f'_{n,i} - h_i\|_\infty = 0$. Donc $\underline{(f'_{n,i})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } h_i \text{ sur } I}$.

Grâce aux résultats que l'on a vu sur les suites de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, les fonctions f_i sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, donc f aussi. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} f'_{n,i}(x) = f'_i(x)$ et comme la notion de convergence dans un espace vectoriel de dimension finie est équivalente à la convergence pour chaque coordonnée, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x) = f'(x)$.

Par ailleurs la suite $(f_{n,i})$ converge uniformément vers f_i sur chaque segment J de I. On a :

$\forall x \in J,\ N(f_n(x) - f(x)) = \sum\limits_{k=1}^{p} |f_{n,k}(x) - f_k(x)| \leq \sum\limits_{k=1}^{p} \|f_{n,k} - f_k\|_{J,\infty}$. On a donc :

$\|f_n - f\|_{J,\infty} \leq \sum_{k=1}^{p} \|f_{n,k} - f_k\|_{J,\infty}$ et comme pour tout k de $[\![1,p]\!]$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \|f_{n,k} - f_k\|_{J,\infty} = 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{J,\infty}$, ce qui donne la convergence uniforme de (f_n) vers f sur J.
2. Même démonstration que pour les suites de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition 1.4.2 (Dérivation terme à terme) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs dans F.*

- *pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*
- *la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur I*
- *la série $\sum f'_n$ converge uniformément ou normalement sur I (ou sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I).*

Alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Démonstration : Même démonstration que pour les séries de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1.4.2 Application à l'exponentielle

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme $\|.\|_2$ (on rappelle $\|A\|_2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2$, avec $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$) qui vérifie : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2$ (voir chapitre 7).
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Sur $\mathcal{L}(E)$, on définit la norme $\|.\|$ par : $\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \|f\| = \|Mat_{\mathcal{B}}(f)\|_2$.
Cette norme vérifie aussi : $\forall f, g \in E,\ \|f \circ g\| \leq \|f\| \times \|g\|$ $(*)$. N'importe quelle norme subordonnée aurait pu faire l'affaire, dans la mesure où $(*)$ est encore vérifiée dans ce cas.

Proposition 1.4.3 (Dérivation de $t \mapsto \exp(ta)$) *Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. L'application $e_a : t \mapsto \exp(ta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{d}{dt}(\exp(ta)) =$$

Démonstration :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e'_a(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}.a^{n+1} = a \circ \exp(t.a) = \exp(t.a) \circ a,$$

car l'application $x \mapsto x \circ a$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ qui est de dimension finie, donc continue, ce qui implique que :

$$\exp(t.a) \circ a = \left(\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!}.a^n \right) \circ a = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!}.a^n \circ a = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!}.a^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}.a^{n+1}.$$

Proposition 1.4.4 (Dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $e_A : t \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A \exp(tA) = \exp(tA) A.$$

Démonstration : Identique à la démonstration précédente.

Remarque 1.4.1 *Par récurrence, on obtient que $t \mapsto \exp(t.a)$ et $t \mapsto \exp(t.A)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{d^p}{dt^p}(\exp(ta)) = a^p \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ a^p$ et :*
$\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{d^p}{dt^p}(\exp(tA)) = A^p \exp(tA) = \exp(tA) A^p$.

2 Généralités sur les équations différentielles linéaires d'ordre un

Ici I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.1 Rappels de sup des équations différentielles linéaires du premier ordre

Soient α, β, γ trois fonctions définies sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit I un intervalle tel que pour tout $t \in I$, $\alpha(t) \neq 0$. On cherche à identifier les fonctions y telles que pour tout $t \in I$, $\alpha(t)\, y'(t) + \beta(t)\, y(t) = \gamma(t)$.

Pour commencer on résout cette équation sur chaque intervalle I où α ne s'annule pas, en cherchant les solutions de l'équation dite **normalisée** :

$$y'(t) + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} y(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}.$$

Cette équation est équivalente à la première, car α ne s'annule pas sur I.
Ceci explique l'interêt d'avoir α qui ne s'annule pas. Nous recollerons ensuite dans un deuxième temps les solutions trouvées sur chaque intervalle I, pour pouvoir avoir des solutions définies sur J tout entier.
Ainsi pour toute résolution d'équation, on précisera bien sur quels intervalles on travaille.
Nous sommes donc amenés à résoudre dans un premier temps des équations du type

$$y'(t) + a(t) y(t) = b(t),$$

avec $a = \beta/\alpha$ et $b = \gamma/\alpha$.
À partir de maintenant, a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

2.1.1 L'équation homogène

On résout tout d'abord l'équation sans second membre, ou l'équation homogène associée :

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0,\ t \in I.$$

On rappelle que cette équation est équivalente sur I à $\alpha y' + \beta y = 0$.

Proposition 2.1.1 (Solutions homogènes d'une équation du premier ordre) *Les solutions de l'équation homogène que l'on appelle* ***solutions homogènes*** *sont les fonctions définies sur I de la forme $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, où A est une primitive de a.*
Soit $t_0 \in I$. On peut aussi écrire les solutions sous la forme

$$t \mapsto \lambda e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds},\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\mathcal{S}_H = \{\lambda e^{-A},\ \lambda \in \mathbb{K}\} = \{\mu y_H,\ \mu \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}(y_H),$$

où y_H est une solution non nulle quelconque de l'équation homogène.

Exemple 2.1.1 *À connaître : soit $c \in \mathbb{K}$. L'ensemble des solutions de $y' + cy = 0$ est $\{t \mapsto \lambda e^{-ct},\ \lambda \in \mathbb{K}\}$.*

2.1.2 Une solution particulière

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, $t \in I$ (ou $\alpha y' + \beta y = \gamma$). Pour cela, on utilise la méthode de **variation de la constante**.
On cherche une solution définie sur I de la forme $t \mapsto \lambda(t)y_H(t)$, où y_H est une solution non nulle de l'équation homogène.
On injecte ensuite cette solution particulière dans l'équation différentielle :

$$\lambda' y_H + \lambda y_H' + a\lambda y_H = b \Leftrightarrow \lambda' y_h + \lambda(y_H' + a y_H) = b \Leftrightarrow \lambda' y_H = b \quad (*)$$

car y_H est solution de l'équation homogène $y_H' + a y_H = 0$.
Ceci donne une expression de λ', puis on trouve ainsi λ en intégrant. Sur I, on notera $f : t \mapsto \lambda(t)y_H(t)$, une solution particulière de l'équation (ne pas oublier de multiplier par y_H après avoir trouvé λ). Vous pouvez retenir si vous le souhaitez l'expression $\lambda' y_H = b$ et la redonner directement, mais faites très attention, cette expression n'est valable que pour l'équation normalisée : $y' + ay = b$.
Pour retrouver la relation $(*)$, pour éviter les calculs trop lourds, gardez les notations y_H, ne remplacez pas y_H par la solution trouvée.

Si vous regardez attentivement votre équation, parfois une solution particulière se voit (par exemple une fonction constante). Dans ce cas vous pouvez toujours dire : « vérifions que cette fonction est solution de notre équation différentielle ».

2.1.3 Solution complète de l'équation différentielle

Théorème 2.1.1 (Équations différentielles du premier ordre) *En notant $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène et f une solution particulière, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation générale (équation de départ $\alpha y' + \beta y = \gamma$) sur chaque intervalle I est*

$$\mathcal{S} = f + \mathcal{S}_H = \{f + g,\ g \in \mathcal{S}_H\} = \{f + \lambda y_H,\ \lambda \in \mathbb{K}\},$$

avec y_H une solution non nulle de l'équation homogène.

Exemple 2.1.2 *Résoudre sur les intervalles appropriés : $x(1-x)y' - y = x$.*
Chercher les solutions définies sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 1[$.

2.2 Équations différentielles d'ordre un dans un espace vectoriel

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère :

- une application a continue de I dans $\mathcal{L}(E)$: $a : \begin{cases} I & \to & \mathcal{L}(E) \\ t & \mapsto & a(t) \end{cases}$;
- une application x dérivable de I dans E : $x : \begin{cases} I & \to & E \\ t & \mapsto & x(t) \end{cases}$;
- une application b continue de I dans E : $b : \begin{cases} I & \to & E \\ t & \mapsto & b(t) \end{cases}$.

On désigne par $a.x$ l'application de I dans E : $a.x : \begin{cases} I & \to & E \\ t & \mapsto & a(t)(x(t)) \end{cases}$.

Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ continue et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continue également.

Définition 2.2.1 (Équation différentielle linéaire d'ordre un)

- *L'équation* $(\mathcal{E})$: $x' = a.x + b$ *est appelée équation linéaire du premier ordre .*
  Une solution de cette équation est une application x dérivable de I dans E, telle que :
  $$\forall t \in I \quad x'(t) = a(t)\,(x(t)) + b(t).$$
- *L'application b est appelé second membre de $(\mathcal{E})$.*
- *On appelle équation homogène (ou sans second membre) associée à $(\mathcal{E})$ l'équation :*
  $$(\mathcal{E}_0) : \quad x' = a.x \ .$$

Remarque 2.2.1 1. *Une solution x de $(\mathcal{E})$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En effet l'application* $B : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \times E & \to & E \\ (a, x) & \mapsto & a(x) \end{cases}$ *est bilinéaire et $\mathcal{L}(E) \times E$ est de dimension finie, donc B est continue. Comme x est continue, car dérivable, alors par composition $t \mapsto a(t)(x(t)) = B(a(t), x(t))$ est continue sur I. Comme b est continue sur I, alors par somme x' l'est aussi.*

2. *Si a et b sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, alors toute solution x le sera aussi.*
   Prouvons cela par récurrence et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: x est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
   - *$\mathcal{P}(0)$ est clair, car toute fonction dérivable est continue.*
   - *Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Comme a et x sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors $t \mapsto a(t)(x(t)) = B(a(t), x(t))$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, donc x' aussi, puis x est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, d'où $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.*

Définition 2.2.2 (Système différentiel d'ordre un) 1. *On appelle système différentiel d'ordre un de taille n toute équation de la forme $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.*
Avec les notations usuelles pour les coordonnées, l'équation s'écrit
$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{2,1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{2,n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \quad\vdots \\ x_n'(t) = a_{n,1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}.$$

2. *Si B est nulle, le système $X'(t) = A(t)X(t)$ est dit homogène.*
3. *Le système linéaire homogène associé à $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ est $X'(t) = A(t)X(t)$.*

Remarque 2.2.2 *(IMPORTANTE) En choisissant une base $\mathcal{B}$ de E, l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ peut se représenter matriciellement par un système différentiel : $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$, avec pour tout t de I : $A(t) = Mat_{\mathcal{B}}(a(t)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B(t) = Mat_{\mathcal{B}}(b(t)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système différentiel homogène associé est $X'(t) = A(t)X(t)$ et B représente le second membre.*

Exemple 2.2.1 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel :* $(S) : \begin{cases} x' &= x+y \\ y' &= y+t \end{cases}$.

Résolvons d'abord : $y'-y=t$. Les solutions homogènes (de l'équation $y'-y=0$) sont $t\mapsto \lambda e^t$, avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

On constate que $t\mapsto -(t+1)$ est une solution particulière, ainsi les solutions de $y'=y+t$ sont $t\mapsto \lambda e^t - t - 1$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Ainsi une fois que l'on a trouvé y, on doit avoir pour $\lambda\in\mathbb{R}$: $x'-x=\lambda e^t - t - 1$.

Les solutions homogènes sont de la forme $t\mapsto \mu e^t$.

Cherchons une solution particulière de la forme $t\mapsto \mu(t)e^t$. On doit donc avoir : $\mu'(t)e^t = \lambda e^t - t - 1$, soit : $\mu'(t)=\lambda - te^{-t} - e^{-t}$. Or $\int(-te^{-t})dt = te^{-t} - \int e^{-t}dt = te^{-t}+e^{-t}$, ainsi

$\mu(t) = \lambda t + te^{-t} + e^{-t} + e^{-t} = \lambda t + te^{-t} + 2e^{-t}$ convient et donc $t\mapsto \lambda te^t + t + 2$ est une solution particulière. Ainsi on a : $x(t) = \mu e^t + \lambda te^t + t + 2$, $\mu\in\mathbb{R}$.

Les solutions sont : $\left\{ t\mapsto \begin{pmatrix} \mu e^t + \lambda te^t + t + 2 \\ \lambda e^t - t - 1 \end{pmatrix},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ t\mapsto \lambda\begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t+2 \\ -t-1 \end{pmatrix},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R} \right\}$

$= t\mapsto \begin{pmatrix} t+2 \\ -t-1 \end{pmatrix} + vect\left(t\mapsto \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix}, t\mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Proposition 2.2.1 (Principe de superposition) *Soient deux équations différentielles :*
$(\mathcal{E}_1) : x' = a.x + b_1$ *et* $(\mathcal{E}_2) : x' = a.x + b_2$.
Soient x_1 et x_2 des solutions des équations respectives $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$. Alors pour tout $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}$. La fonction $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ est solution de l'équation :

Nous avons le même résultat pour les systèmes différentiels, si X_1 est solution de $X' = AX + B_1$ et X_2 est solution de $X' = AX + B_2$, alors $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est solution de

Démonstration : On a $x_1' = a.x_1 + b_1$ et $x_2' = a.x_2 + b_2$ donc :
$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)' = \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' = \lambda_1(a.x_1 + b_1) + \lambda_2(a.x_2 + b_2) = a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)$.

Exemple 2.2.2 *Donner une solution de* $(S) : \begin{cases} x' &= x+y+1 \\ y' &= y+3t \end{cases}$.

Le système s'écrit $X' = AX + 3\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution particulière de $X' = AX + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ $\left(\text{qui est } \begin{cases} x' &= x+y \\ y' &= y+t \end{cases}\right)$: $t\mapsto \begin{pmatrix} t+2 \\ -t-1 \end{pmatrix}$, grâce à l'exemple précédent avec $\lambda=\mu=0$.

Solution particulière de $X' = AX + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left(\text{qui est } \begin{cases} x' &= x+y+1 \\ y' &= y \end{cases}\right)$: constate que $t\mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en est une.

Grâce au principe de superposition $t\mapsto \begin{pmatrix} 3t+5 \\ -3t-3 \end{pmatrix}$ est une solution de (S).

Remarque 2.2.3 *Soient $A\in \underline{\mathcal{C}(I,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$ et $B\in\mathcal{C}(I,\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$ et X une solution de $X' = AX + B$.*

Alors $Re(X)$ est solution de $X' = AX + Re(B)$ et $Im(X)$ est solution de $X' = AX + Im(B)$.

2.3 Problème de Cauchy et structure de l'espace des solutions

2.3.1 Problème de Cauchy

Définition 2.3.1 (Problème de Cauchy) *Soient $t_0\in I$, $x_0\in E$ et a,b,A,B des fonctions continues sur I.*
On appelle problème de Cauchy la donnée : $\begin{cases} \forall t\in I, \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \ \ (*) \end{cases}$.

Pour un système linéaire, cela se traduit par : $\begin{cases} \forall t\in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \ \ (*) \end{cases}$.

Remarque 2.3.1 *Les relation $(*)$ s'appellent conditions initiales à l'instant t_0.*

Théorème 2.3.1 (Cauchy-Lipschitz) *Soient $t_0\in I$ et a,b,A,B des fonctions continues sur I.*
Soit $x_0\in E$ Il existe une unique solution sur I de l'équation différentielle $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$ vérifiant la condition $x(t_0) = x_0$.

Pour un système, soit $X_0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une unique solution sur I de l'équation différentielle $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ vérifiant la condition $X(t_0) = X_0$.

Démonstration : Admis.

Remarque 2.3.2 *Le théorème précédent dit que le problème de Cauchy de la définition 2.3.1 admet une unique solution.*

Exemple 2.3.1

1. *Soient x_1 et x_2 deux solutions distinctes de $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$, avec a et b continues sur I. Montrer que : $\forall t \in I,\ x_1(t) \neq x_2(t)$.*

2. *Soient $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ et $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$ des fonctions 1 périodique.Soit X une solution de (S) : $X' = AX + B$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que X est 1-périodique si et seulement si $X(0) = X(1)$.*

3. *Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique application $M : \mathbb{R} \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $M(0) = I_n$ et : $\forall t \in \mathbb{R},\ M'(t) = SM(t)S$.*

4. *Soit $z \in D(0,1)$. On pose $L(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$. Montrer que $\exp(L(z)) = 1 + z$ (on pourra dériver la fonction $t \mapsto \exp(L(tz))$ sur $[0,1]$).*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose : $u_n : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n z^n}{n}$ définie sur $[0,1]$.

On a : $\forall t \in [0,1],\ L(tz) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$.

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.*
- *Sur $[0,1]$ la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement, car on reconnaît de DSE de la série entière associée à $x \mapsto \ln(1+x)$ dont le rayon de convergence vaut 1 et $\forall t \in [0,1],\ |tz| \leq |z| < 1$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\forall t \in [0,1],\ u_n'(t) = (-1)^{n-1} t^{n-1} z^n$ et donc $\|u_n'\|_\infty = |z|^n$, donc $\sum_{n \geq 1} \|u_n'\|_\infty$ converge puis on a convergence normale sur $[0,1]$.*

On peut donc dériver terme à terme : $\forall t \in [0,1],\ \dfrac{d}{dt}(L(tz)) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-tz)^{n-1} z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-tz)^k z = \frac{z}{1+tz}$, car $|tz| < 1$.

On pose $\psi : t \mapsto \exp(L(tz))$. On a : $\forall t \in [0,1],\ \psi'(t) = \dfrac{z}{1+tz}\psi(t)$.

Par ailleurs on pose $\varphi : t \mapsto 1 + tz$. On a : $\forall t \in [0,1],\ \varphi'(t) = z = \dfrac{z}{1+tz}\varphi(t)$.

Ainsi ϕ et ψ vérifient la même équation différentielle, normalisée à coefficients continus et $\psi(0) = \varphi(0) = 1$ donc grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, on a : $\forall t \in [0,1],\ \exp(L(tz)) = 1 + tz$, d'où le résultat pour $t = 1$.

2.3.2 Structure de l'espace des solutions

On note $n = \dim(E)$.

Proposition 2.3.1 (Structure des solutions d'une équation homogène)
• *L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation différentielle homogène $x' = a.x$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$ de dimension n.*

Précisément pour tout $t_0 \in I$, l'application $\phi_{t_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \to & E \\ x & \mapsto & x(t_0) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme de $\mathcal{S}_H$ sur E.*

• *Pour les systèmes différentiels, l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions du système différentiel homogène $X' = AX$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ de dimension n et* $\phi_{t_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ Y & \mapsto & Y(t_0) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme de $\mathcal{S}_H$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.*

Démonstration : Montrons que $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$:

- La fonction nulle est solution de $x' = a.x$, donc $\mathcal{S}_H$ est non vide.
- Soient $x_1, x_2 \in \mathcal{S}_H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a : $(\lambda x_1 + x_2)' = \lambda x_1' + x_2' = \lambda a.x_1 + a.x_2 = a.(\lambda x_1 + x_2)$. Ainsi $\lambda x_1 + x_2$ est dans $\mathcal{S}_H$.

La bijectivité de ϕ_{t_0} découle du théorème de Cauchy-Lipschitz (dans le cas $b = 0$), sa linéarité est immédiate. C'est donc un isomorphisme et donc $\mathcal{S}_H$ est un espace vectoriel de dimension $\dim(E) = n$.

Remarque 2.3.3 *Si pour une solution x de $x' = a.x$, il existe $t_0 \in I$ tel que : $x(t_0) = 0$, alors :*

Exemple 2.3.2 *Soient $x_1, ..., x_n$ des solutions de $(H) : x' = a.x$, avec $\dim(E) = n$ et $\mathcal{B}$ une base de E.*

1. *Montrer que l'on a les équivalences entre les assertions suivantes :*

   (a) *$(x_1, ..., x_n)$ est une base de $\mathcal{S}_H$.*

   (b) *Il existe $t_0 \in I$ tel que $(x_1(t_0), ..., x_n(t_0))$ soit une base de E.*

   (c) *$\forall t \in I,\ W(t) = \det_{\mathcal{B}}(x_1(t), ..., x_n(t)) \neq 0$.*

2. (a) *Dans ce cas, montrer que toute application $\varphi : I \to E$ dérivable s'écrit de manière unique : $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, avec $\lambda_k : I \to \mathbb{R}$, pour $k \in [\![1, n]\!]$.*

   (b) *Montrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!], \forall t \in I,\ \lambda_k(t) = \dfrac{\det_{\mathcal{B}}(x_1(t), ..., \overbrace{\varphi(t)}^{k\text{-ème place}}, ..., x_n(t))}{W(t)}$.*

   (c) *En déduire que les λ_k sont dérivables sur I.*

3. *On suppose encore que $(x_1, ..., x_n)$ est une base de $\mathcal{S}_H$.*
   Montrer que : $\forall t \in I,\ W'(t) = \operatorname{tr}(a(t)) W(t)$, puis en déduire une expression de W.

Corollaire 2.3.1 (Ensemble des solutions de $x' = a.x + b$) *Soit x_p une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : x' = a.x + b$.*
L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}) : x' = a.x + b$ est $x_p + \mathcal{S}_H = \{x_p + x,\ x \in \mathcal{S}_H\}$, avec $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $(\mathcal{E}_H) : x' = a.x$.
C'est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de direction $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.

Pour les systèmes différentiels, soit Y_p une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$.
L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}) : Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ est $\{Y_p + Y,\ Y \in \mathcal{S}_H\}$, avec $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $(\mathcal{E}_H) : Y'(t) = A(t)Y(t)$.

Démonstration : On a les équivalences : $z' = az + b \Leftrightarrow z' = az + x_p' - a.x_p \Leftrightarrow (z - x_p)' = a(z - x_p) \Leftrightarrow z - x_p \in \mathcal{S}_H$.

2.4 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Dans ce paragraphe a est un endomorphisme de E et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
qui ne dépendent pas de t.

2.4.1 Résolution des systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Proposition 2.4.1 (Solutions de l'équation homogène) *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$.*
Soit $x_0 \in E$. L'application $\psi : t \mapsto \exp((t - t_0)a)(x_0)$ est l'unique solution du problème de Cauchy :
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & a.x \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right. .$$
Pour les systèmes différentiels, soit $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. L'application $\psi : t \mapsto \exp((t - t_0)A)X_0$ est l'unique solution du problème de Cauchy : $\left\{ \begin{array}{lcl} X' & = & AX \\ X(t_0) & = & X_0 \end{array} \right.$.

Démonstration : Soit $\varphi : t \mapsto \exp((t-t_0)a)$. Par composition de dérivation, nous avons :
$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = a \circ \exp((t-t_0)a)$. Comme l'application $\tau : u \mapsto u(x_0)$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans E, qui sont de dimension finie, alors :
$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi'(t) = (\tau \circ \varphi)'(t) = \tau(\varphi'(t)) = \varphi'(t)(x_0) = a\left(\exp((t-t_0)a)(x_0)\right) = a(\psi(t))$. Ainsi ψ est solution de $x' = a.x$. De plus $\psi(t_0) = \exp(0)x_0 = Id_E(x_0) = x_0$. Ainsi l'unicité est donnée par le théorème de Cauchy Lipschitz.

Exemple 2.4.1

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$ qui est 1-périodique. Soit $(S) : X' = AX + B(t)$. On suppose que $Sp(A) \cap 2i\pi\mathbb{Z} = \emptyset$. Montrer que (S) a une unique solution 1-périodique.*

2. *Soient p un projecteur de E et $x_0 \in E$. Déterminer les solutions de $x' = p.x$ telles que $x(0) = x_0$.*

Remarque 2.4.1 *(IMPORTANTE) Pour résoudre un système $X' = AX$, il est rare de passer par l'exponentielle, car l'expression de $\exp(tA)$ peut être compliquée à calculer. Cela sert surtout dans des exercices théroriques. Les paragraphes suivants donnent des méthodes lorsque A est diagonalisable ou trigonalisable.*

Corollaire 2.4.1 (Exponentielle de matrices/endomorphismes qui commutent)

- *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors :* $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
- *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $uv = vu$. Alors :* $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$.

Démonstration : Montrons le cas matriciel.

2.4.2 Résolution de $X' = AX$ quand A est diagonalisable

Proposition 2.4.2 ($X' = AX$, avec A diagonalisable) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (répétées suivant leurs mutliplicités), et soient $U_1, \ldots, U_n$ des vecteurs propres associés. Alors une base de solutions de l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$ est*

$$(X_i : t \longmapsto e^{\lambda_i t} U_i)_{1 \leq i \leq n}.$$

Ces solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Autrement dit l'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}(X_1, ..., X_n) = \left\{ t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} U_i, C_1, ..., C_n \in \mathbb{K} \right\}$.

Démonstration :

Remarque 2.4.2 *(IMPORTANTE) Concrètement, si P est la matrice dont les colonnes sont $U_1, \ldots, U_n$, alors $A = PDP^{-1}$, avec $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On a : $X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow X'(t) = PDP^{-1}X(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) \Leftrightarrow Z'(t) = DZ(t)$, par linéarité de la dérivation, avec $Z = P^{-1}X : t \mapsto \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$. On obtient n équations scalaires : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $z_i'(t) = \lambda_i z_i(t)$, qui se résolvent en $z_i : t \longmapsto C_i e^{\lambda_i t}$, $C_i \in \mathbb{R}$. Enfin X est donné par $X : t \longmapsto PZ(t)$.*

Exemple 2.4.2

1. *Résoudre* $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 2x + 3y + 3z \\ y' & = & 3x + 2y + 3z \\ z' & = & 3x + 3y + 2z \end{array} \right.$.

2. *Résoudre* $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x - y \\ y' & = & 2x - y \end{array} \right.$.

Remarque 2.4.3 *IMPORTANTE, si vous partez d'une matrice réelle qui n'est pas diagonalisable sur* $\mathbb{R}$*, mais qui l'est sur* $\mathbb{C}$*, vous obtenez comme dans l'exemple précédent, des solutions complexes. Si vous voulez retrouver des solutions réelles, les solutions de la forme* $t \longmapsto e^{\lambda_i t}U_i$*, avec* λ_i *réel sont à garder et les solutions* $t \longmapsto e^{\lambda_i t}U_i$ *et* $t \longmapsto e^{\overline{\lambda_i} t}\overline{U_i}$*, avec* λ_i *complexe sont à remplacer par* $t \longmapsto Re(e^{\lambda_i t}U_i)$ *et* $t \longmapsto Im(e^{\lambda_i t}U_i)$*, car* $vect(t \longmapsto e^{\lambda_i t}U_i, t \longmapsto e^{\overline{\lambda_i} t}\overline{U_i}) = vect(t \longmapsto Re(e^{\lambda_i t}U_i), t \longmapsto Im(e^{\lambda_i t}U_i))$*, car :* $Re(e^{\lambda_i t}U_i) = \dfrac{e^{\lambda_i t}U_i + e^{\overline{\lambda_i} t}\overline{U_i}}{2}$ *et* $Im(e^{\lambda_i t}U_i) = \dfrac{e^{\lambda_i t}U_i - e^{\overline{\lambda_i} t}\overline{U_i}}{2i}$.

Exemple 2.4.3 *Donner les solutions réelles de* $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x - y \\ y' & = & 2x - y \end{array} \right.$.

2.4.3 Résolution de $X' = AX$ quand A est trigonalisable

Il n'y a pas de résultats généraux exigibles au programme, travaillons donc sur un exemple.

Exemple 2.4.4 1. *Résoudre le système* $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -x - 4y \\ y' & = & x + 3y \end{array} \right.$.

2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si chaque valeur propre de A est de partie réelle strictement négative, alors toute solution de $(S) : X' = AX$ tend vers 0 en $+\infty$.*

3 Équations différentielles scalaires linéaires d'ordre n

3.1 Définition et lien avec les systèmes différentiels

Dans ce paragraphe, $a_{n-1}, ..., a_0$ et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

3.1.1 Définitions

Définition 3.1.1 (Équation différentielles linéaires) *1. Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n est une équation différentielle qui s'écrit sous la forme :*

$$(\mathcal{E}) : y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = b(t).$$

2. *La fonction b est appellée second membre de l'équation différentielle. Lorsque b est nulle, on dit que l'équation différentielle est homogène ou sans second membre .*
3. *Pour une équation différentielle $(\mathcal{E}) : y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = b(t)$, l'équation différentielle homogène associée est*
$(\mathcal{E}_h) : y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = 0.$

Nous avons toujours

Proposition 3.1.1 (Principe de superposition) *Soient deux équations différentielles*
$(\mathcal{E}_1) : y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = b_1(t)$ *et*
$(\mathcal{E}_2) : y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = b_2(t)$ *ayant la même équation différentielle homogène associée. Soient y_1 et y_2 deux solutions des équations respectives $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$. Alors pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle :*

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t).$$

Démonstration : Calquer la preuve de l'ordre un.

Définition 3.1.2 (Problème de Cauchy) *Soient $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.*
On appelle problème de Cauchy le recherche de solutions y de $(\mathcal{E})$ vérifiant

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = b(t) \\ (y(t_0), y'(t_0), ..., y^{(n-1)}(t_0)) = (y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \end{cases}.$$

3.1.2 Lien équation différentielles scalaire linéaire d'ordre n et les systèmes différentiels

Proposition 3.1.2 (Équation différentielle scalaire d'ordre n et système différentielle) *L'application* $\varphi : y \longmapsto Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ *induit une bijection de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle* $(\mathcal{E}) : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0y = b$ *sur l'ensemble des solutions de l'équation $(S) : Y' = AY + B$, où*

$$A = \qquad\qquad\qquad \textit{et} \quad B =$$

La bijection réciproque est $Y = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto z_0.$

Démonstration : En regardant la première coordonnée de $\varphi(y)$, qui est y, on constate que celle-ci est injective. Si y est solution de $y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_0y + b$, il est clair que $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ est solution de $Y' = AY + B$, donc φ va bien dans les bons espaces.

Montrons la surjectivité de φ.

Soit $Y = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$ une solution de $Y' = AY + B$. Montrons qu'il existe une unique fonction n fois dérivable $y : I \to \mathbb{K}$ solution de $(\mathcal{E})$ et vérifiant $\varphi(y) = Y$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} z_0' \\ \vdots \\ z_{n-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Ainsi : $\forall i \in [\![0, n-2]\!],\ z_i' = z_{i+1}$ et $z_{n-1}' = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k z_k + b$. Ainsi nous obtenons par récurrence : $\forall i \in [\![0, n-2]\!],\ z_i = z_0^{(i)}$ et $z_0^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z_0^{(k)} = b$. Ainsi z_0 est n fois dérivable, est solution de $(\mathcal{E})$ et $\varphi(z_0) = Y$, donc φ est surjective.
Ainsi φ est une bijection des solutions de $(\mathcal{E})$ dans les solutions de (S) et $\varphi^{-1}(Y) = z_0$.

3.1.3 Espace des solutions

Corollaire 3.1.1 (Cauchy-Lipschitz et conséquences) *1. Soient $t_0 \in I$ et $(y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{K}^n$. Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0 y(t) = b(t) \\ (y(t_0), y'(t_0), ..., y^{(n-1)}(t_0)) = (y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \end{cases}$$

admet une unique solution.

2. *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$ est un espace vectoriel de dimension n.*
3. *Si on note $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$, alors l'application $y \mapsto (y(t_0), y'(t_0), ..., y^{(n-1)}(t_0))$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_0$ dans $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration :

1. On reprend les notations de la proposition précédente. L'application φ nous permet de nous ramener au problème de Cauchy suivant : $Y' = AY + B$, avec la condition initiale $Y'(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$. Grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz (A et B sont continues), ce système différentiel admet une unique solution, donc notre problème initial aussi, via la bijection φ.
2. De la même manière l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$ est isomorphe, via φ, à l'espace vectoriel des solutions de $X' = AX$ qui est de dimension n.
3. Soit ψ l'application linéaire : $y \mapsto (y(t_0), y'(t_0), ..., y^{(n-1)}(t_0))$. En identifiant $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'application $\psi \circ \varphi^{-1}$ est $Y \mapsto \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$, qui est un isomorphisme de l'ensemble des solutions de $Y' = AY$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, grâce à la proposition 2.3.1. En composant par φ qui est un isomorphisme, alors ψ est bien un isomorphisme de $\mathcal{S}_0$ dans $\mathbb{K}^n$.

Exemple 3.1.1 1. *Soient* $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. *On pose* $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = 0$.

(a) *On suppose que* P *est scindé à racines simples* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *Déterminer une base de solution* (E).

(b) *On suppose que :* $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ a_k = \binom{n}{k}$. *Déterminer une base de solution* (E).

(c) *On se place dans le cas* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *On suppose que la décompisition e facteurs irréductibles de* P *dans* $\mathbb{C}[X]$ *est* $P = \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{n_i}$. *Résoudre* (E) *dans ce cas.*

(a)

(b)

(c) *En imitant la preuve de la remarque 2.2.1, on montre que toute solutions est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

Ainsi on considère l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$ *de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

L'ensemble des solutions de (E) *est* $\operatorname{Ker}(P(D)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}\left((D - Id_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})})^{n_i}\right)$, *grâce au lemme des noyaux, car les* $(X - \alpha_i)^{n_i}$ *sont deux à deux premiers entre eux.*

D'après la question précédente, $\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \sum_{i=1}^{k} P_i(t) e^{\alpha_i t},\ \forall i \in [\![1, k]\!],\ P_i \in \mathbb{R}_{n_i - 1}[X] \right\}$.

2. *Soit* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Résoudre* $y^{(n)} = f$, *avec :* $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$.

3. Quelle est la dimension des solutions du système différentiel $\left\{ \begin{array}{lcl} x'' & = & -2x+y \\ y'' & = & x-2y \end{array} \right.$ *?*

Proposition 3.1.3 (Ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$) *On note $(\mathcal{E}_H)$ l'équation homogène $y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = 0$ associée à $(\mathcal{E})$et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions homogènes. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ s'écrit sous la forme $\{y_p+z, z \in \mathcal{S}_H\}$, avec y_p une solution particulière de $(\mathcal{E})$.*

Démonstration : Calquer la preuve faite pour l'ordre un.

3.2 Équations différentielles scalaires linéaires d'ordre 2

3.2.1 Structure de l'espace des solutions

Partons d'une équation de la forme $\alpha(t)y''(t) + \beta(t)y'(t) + \gamma(t)y(t) = \delta(t)$.
Pour utiliser les théorèmes (comme le théorème de Cauchy-Lipschitz) qui vont suivre, nous devons dans un premier temps normaliser l'équation différentielle. Nous devons donc diviser l'équation par la fonction α et résoudre l'équation $y''(t)+\dfrac{\beta(t)}{\alpha(t)}y'(t)+\dfrac{\gamma(t)}{\alpha(t)}y(t) = \dfrac{\delta(t)}{\alpha(t)}$ sur des intervalles où α ne s'annule pas.

On va donc résoudre $(\mathcal{E}) : y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$, avec a, b, c des fonctions continues sur I.

Lemme 3.2.1 (Ecriture de $(\mathcal{E})$ sous la forme de système linéaire d'ordre un) *L'équation $(\mathcal{E})$ peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire d'ordre un :*

Théorème 3.2.1 (Cauchy-Lipschitz) *Soit $t_0 \in I$. Le problème de Cauchy d'ordre deux :*

$$\left\{ \begin{array}{l} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{array} \right.$$

admet une et une seule solution.

Exemple 3.2.1 *1. Montrer que* $f : x \mapsto \operatorname{sh}(\operatorname{Arcsin}(x))$ *est décomposable en série entière sur un intervalle à préciser et donner celui-ci.*

2. *Soient a et b deux fonctions continues sur $[c,d]$ et $(\mathcal{E}) : y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$. Soit u une solution non nulle de $(\mathcal{E})$ sur $[c,d]$.*
   (a) *Soit (t_n) une suite à valeurs dans $[c,d]$ qui converge vers α, avec tous les t_n deux à deux distincts. On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u(t_n) = 0$. Montrer que $u(\alpha) = u'(\alpha) = 0$.*
   (b) *En déduire que u n'a qu'un nombre fini de zéros sur $[c,d]$.*

Remarque 3.2.1 *Pour chercher les solutions développables en série entière d'une équation différentielle, il faut procéder de la façon suivante :*

- *On fixe une suite (a_n) et on suppose que le rayon de convergence R de $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est strictement positif.*
- *On substitue S dans l'équation différentielle et quitte à faire des décalages d'indices, on essaye de se ramener à une somme classée par puissances : $\sum (...)\, x^n$. Par unicité du DSE, on identifie les coefficients pour que S soit solution.*
- *Habituellement, on obtient une relation de récurrence qui permet alors de définir (a_n). On montre alors que $R > 0$ (avec par exemple la règle de D'Alembert) et éventuellement on explicite a_n.*
- *On obtient ainsi toutes les solutions développables en série entière. Mais attention, toutes les solutions de l'équation différentielle ne sont pas forcément DSE.*

Proposition 3.2.1 (Dimension de l'équation homogène) *L'ensemble des solutions de $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ est un espace vectoriel de dimension 2.*

Exemple 3.2.2 *Soient a et b deux fonctions continues 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et E l'espace des solutions de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $y \in E \setminus \{0\}$ tels que :*
$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t+1) = \lambda y(t)$.

Proposition 3.2.2 (Ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$) *On note (E_H) l'équation homogène $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ associée à $(\mathcal{E})$ et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions homogènes. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ s'écrit sous la forme $\{y_p + z, z \in \mathcal{S}_H\}$, avec y_p une solution particulière de $(\mathcal{E})$.*

3.2.2 Wronskien

Soit $(\mathcal{E})$ l'équation $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ et $(\mathcal{E}_H)$ l'équation homogène $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ associée.

Définition 3.2.1 (Wronskien) *Soient y_1 et y_2 deux solutions de $(\mathcal{E}_H)$. On appelle wronskien de la famille (y_1, y_2) l'application définie sur I par*

$$w : t \mapsto \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

Remarque 3.2.2 *Les solutions y_1 et y_2 étant deux fois dérivables, alors le wronskien est dérivable.*

Proposition 3.2.3 (Wronskien et base de solutions homogènes) *Soient y_1 et y_2 deux solutions de $(\mathcal{E}_H)$ et w leur wronkien. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *(y_1, y_2) est une base de solution de $\mathcal{E}_H$.*
2. *$\forall t \in I,\ w(t) \neq 0$.*
3. *$\exists t \in I,\ w(t) \neq 0$.*

Démonstration : C'est l'exemple 2.3.2 dans le cas $n = 2$.

Remarque 3.2.3 *Soient y_1 et y_2 deux solutions de $(\mathcal{E}_H)$. Alors leur wronskien w vérifie l'équation :*

En particulier pour une équation du type $y'' + q(t)y = 0$, alors w est

Exemple 3.2.3

1. *Soient $a, b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(E) : y'' + ay' + by = 0$ et on note $\mathcal{S}$ l'espace des solutions.*
   (a) *Montrer qu'il existe une base de solutions (f, g) telle que $(f(0), f'(0)) = (1, 0)$ et $(g(0), g'(0)) = (0, 1)$.*
   (b) *Montrer que (E) admet un système une base de solutions (f, g) avec f paire et g impaire si et seulement si a est impaire et b est paire.*

2. *Soit $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + qy = 0$. Soit (u,v) une base de solutions telle que $u(0) = v'(0) = 1$ et $u'(0) = v(0) = 0$ (cela existe grâce à l'exemple précédent).*

   (a) *On suppose que u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ v(x) = u(x) \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{u^2(t)}$.*

   (b) *On suppose que q est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

      i. *Montrer que si u est bornée sur $\mathbb{R}$, alors : $\lim\limits_{t\to+\infty} u'(t)$ est réelle, puis que celle-ci est nulle.*

      ii. *Montrer que u et v ne peuvent pas être toutes les deux bornées.*

   (c) *Dans cette question, on suppose que : $\forall t \in \mathbb{R},\ q(t) = \cos^2(t)$.*

      i. *Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant $\alpha < 0 < \beta, u'(\alpha) > 0$ et $u'(\beta) < 0$. En déduire que u possède au moins un zéro dans $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.*

      ii. *Justifier l'existence de réels $\gamma = \max\{t < 0,\ u(t) = 0\}$ et $\delta = \min\{t > 0,\ u(t) = 0\}$.*

      iii. *En étudiant les variations de $W = uv' - u'v$, montrer que v possède au moins un zéro dans$]\gamma, \delta[$.*

      iv. *Soit w une solution non nulle de (E). Démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $w_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$.*

   (d) *Nous rappelons le lemme de Gronwall (vu dans le chapitre 1) : soient v et y sont deux fonctions de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}_+)$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.*

      On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall t \in I,\ y(t) \le \lambda + \displaystyle\int_a^t v(s)y(s)ds$, avec $a \in I$.

      Alors on a : $\forall t \in I,\ y(t) \le \lambda \exp\left(\displaystyle\int_a^t v(s)ds\right)$.

      Dans cette question, on suppose que q est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$. Montrer que toutes les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

   (a)

   (b)

(c) i. *Puisque la fonction* u *est continue et* $u(0) = 1$*, la fonction* u *est strictement positive au voisinage de 0 et comme* $u'' = -qu$*, alors :* u'' *est strictement négative au voisinage de* 0*. La fonction* u' *étant alors strictement décroissante an voisinage de* 0 *et comme on a :* $u'(0) = 0$*, d'où les existences de* α *et* β*.*

Par l'absurde, supposons que la fonction u *ne s'annule par sur* $\mathbb{R}_+$*. La fonction* u *est alors positive (car* $u(0) > 0$*) et* u'' *est négative sur* $\mathbb{R}_+$*.*

Ainsi u *est concave sur* $[\beta, +\infty[$ *et :* $\forall x \geq \beta, u(x) \leq u(\beta) + u'(\beta)(x - \beta)$*.*

Or cette affirmation est incompatible avec un passage à la limite quand $x \to +\infty$ *(on aurait* $\lim\limits_{+\infty} u = -\infty$*, donc* u *sertait négative à partir d'un certain rang.*

On en déduit que u *s'annule au moins une fois sur* $\mathbb{R}_+$*.*

De même, on justifie que u *s'annule au moins une fois sur* $\mathbb{R}_-^+$

ii.

iii.

iv.

(d) *Soit y une solution. On a alors :* $2y'y''+2qyy'=0$. *Par intégration, on a :*

$\forall t\in\mathbb{R}_+\ y'^2(t)-y'^2(0)+2\int_0^t q(s)y(s)y'(s)ds=0.$

Par intégration par parties, on a en posant $a=y'^2(0)+y^2(0)q(0)$ *:*

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ y'^2(t)+q(t)y^2(t)=a+\int_0^t q'(s)y^2(s)ds.$

Ainsi : $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ q(s)y^2(s)\leq a+\int_0^t q'(s)y^2(s)ds=a+\int_0^t \frac{q'(s)}{q^2(s)}\times(y^2(s)q(s))ds.$

Grâce au lemme de Gronwall, on a :

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ q(t)y^2(t)\leq a\exp\left(\int_0^t\frac{q'(s)}{q(s)}ds\right)=a\exp(\ln(q(t))-\ln(q(0)))=a\frac{q(t)}{q(0)}$, *car* $q>0$, *puis :* $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ y^2(t)\leq\frac{a}{q(0)}$ *et donc* $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ |y(t)|\leq\sqrt{\frac{a}{q(0)}}.$

3.2.3 Méthode de la variation des constantes

Nous allons adapter dans ce paragraphe la méthode de la variation des constantes à une équation $(\mathcal{E}): y''+a(t)y'+b(t)y=c(t)$. On note $(\mathcal{E}_H): y''+a(t)y'+b(t)y=0$ l'équation homogène associée. Soit (y_1,y_2) une base de solution de $(\mathcal{E}_H)$.
Nous allons maintenant donner une méthode pour trouver une solution particulière de $(\mathcal{E})$.

Proposition 3.2.4 (Variation des constantes) *Soit (y_1,y_2) une base de solutions de $(\mathcal{E}_H): y''+a(t)y'+b(t)y=0$. Soit $y=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2$, avec λ_1 et λ_2 dérivables sur I. Alors y est solution de $(\mathcal{E}): y''+a(t)y'+b(t)y=c(t)$ si*

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1'(t)y_1(t)+\lambda_2'(t)y_2(t)&=&0\\ \lambda_1'(t)y_1'(t)+\lambda_2'(t)y_2'(t)&=&c(t)\end{array}\right.$$

Démonstration : Repassons par le système différentiel d'ordre un associé.

Exemple 3.2.4 1. *Résoudre* $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}.$

2. *Soit $g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Résoudre : $y'' + y = g$.*
   Applications :

   (a) i. *Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

   ii. *Montrer que F est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $y'' + y = 1/x$ admettant une limite en $+\infty$.*

   iii. *Montrer que $h : x \mapsto \cos(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ est une solution de $y'' + y = 1/x$.*
   La convergence de ces intégrales ont été vues dans le chapitre 1.

   iv. *En déduire que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.*

   (b) *Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $f + f'' \geq 0$.*
   Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geq 0$.

(a) i. *On pose* $g : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ *définie sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

- *Soit* $t \in \mathbb{R}_+$. $x \mapsto g(x,t)$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$.
- *Soient* $x \in \mathbb{R}_+$. $t \mapsto g(x,t)$ *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+$.
- *On a :* $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2, |g(x,t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$, *et* φ*est continue par morceaux et intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.

Ainsi $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)dt$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$.

- *Soit* $t \in \mathbb{R}_+$. $x \mapsto g(x,t)$ *est* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
- *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$. $t \mapsto g(x,t)$ *est continue par morceaux et intégrable sur* $\mathbb{R}_+$, *grâce à ce qui précède.*
- *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *On a :* $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}$. *Ainsi* $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+$. *De plus* $\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{-xt})$, *car* $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{1+t^2} = 0$. *Comme* $t \mapsto e^{-xt}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$ $(x > 0)$, *alors* $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ *l'est aussi.*
- *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *On a :* $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$. *Ainsi* $t \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+$.
- *Soit* $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. *On a :* $\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq e^{-xt} \leq e^{-at} = \psi(t)$. *La fonction* ψ *est continue par morceaux et intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.

F *est donc de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

ii.

iii. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *On a :* $\cos(x)\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt =$
$\cos(x)\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt - \sin(x)\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt - \cos(x)\int_1^{x} \frac{\sin(t)}{t}dt + \sin(x)\int_1^{x} \frac{\cos(t)}{t}dt$ *et on utilise la première question.*

iv.

(b)

3.2.4 Révision de sup : équation du second ordre à coefficients constants

Soient a, b, c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$ et d une fonction continue définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On recherche les solutions de l'équation différentielle

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t),\ t \in I.$$

a) L'équation homogène

On considère dans un premier temps l'équation homogène

$$(\mathcal{E}) : ay'' + by' + cy = 0.$$

Proposition 3.2.5 (Le cas complexe) *L'ensemble des fonctions complexes solutions homogènes est*

$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t),\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}\} = \mathrm{Vect}(y_1, y_2),$$

- *Si $ar^2 + br + c = 0$ a deux solutions distinctes r_1 et r_2, $y_1(t) = e^{r_1 t}$, $y_2(t) = e^{r_2 t}$.*
- *Si $ar^2 + br + c = 0$ a une unique solution r, $y_1(t) = e^{rt}$, $y_2(t) = te^{rt}$.*

L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée ***équation caractéristique*** *associée à l'équation.*

Remarque 3.2.4 *ATTENTION, la méthode précédente ne marche que si a, b et c sont constantes !*

Proposition 3.2.6 (Le cas réel) *On suppose maintenant a, b et c réels. L'ensemble des fonctions réelles solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ est*

$$(\mathcal{S}_H)_{\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t),\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(y_1, y_2),$$

- *Si $ar^2 + br + c = 0$ a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, $y_1(t) = e^{r_1 t}$, $y_2(t) = e^{r_2 t}$.*
- *Si $ar^2 + br + c = 0$ a une unique solution réelle r, $y_1(t) = e^{rt}$, $y_2(t) = te^{rt}$.*
- *Si $ar^2 + br + c = 0$ a deux solutions complexes distinctes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, $y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$.*

Remarque 3.2.5 *Dans le cas où $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement négatif, on peut écrire les solutions sous la forme $t \mapsto Ae^{\alpha t}\cos(\beta t - \phi)$, avec A dans $\mathbb{R}_+$ et ϕ dans $\mathbb{R}$ (on prend ici $A = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$ et $\cos(\phi) = \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}$ et $\sin(\phi) = \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}$).*
Réciproquement une fonction de la forme $t \mapsto Ae^{\alpha t}\cos(\beta t - \phi)$ est solution de l'équation différentielle, car en développant on trouve $\lambda_1 = A\cos(\phi)$ et $\lambda_2 = A\sin(\phi)$.
Dans le dernier cas l'ensemble des solutions est aussi $\{t \mapsto Ae^{\alpha t}\cos(\beta t - \phi),\ A \in \mathbb{R}_+, \phi \in \mathbb{R}\}$.

C'est en général la forme utilisée en physique. ϕ est le déphasage et A l'amplitude du signal. Ces deux grandeurs dépendent des conditions initiales. β est la pulsation et α est le coefficient d'amortissement (s'il est négatif) ou d'amplification (s'il est positif). S'il est nul, le signal est périodique de période $\dfrac{2\pi}{\beta}$. Ces deux dernière quantités ne dépendent pas des conditions initales, mais sont caractériqtiques de l'équation différentielle (ou du système physique) étudié.

Un résultat classique à connaître par coeur : $b = 0$ et a, c réels

On a en divisant par a une équation du type : $y'' + \alpha y = 0$.

- Premier cas : $\alpha < 0$
  Il existe donc $\omega \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait $\alpha = -\omega^2$ (par exemple $\omega = \sqrt{-\alpha}$) et l'équation devient : $y'' - \omega^2 y = 0$.
  Les racines de l'équation caractéristiques sont ω et $-\omega$.
  $\mathcal{S} = \{x \mapsto \beta e^{\omega x} + \gamma e^{-\omega x},\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \lambda\,\mathrm{ch}\,(\omega x) + \mu\,\mathrm{sh}\,(\omega x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

- <u>Deuxième cas : $\alpha > 0$</u>
  Il existe donc $\omega \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait $\alpha = \omega^2$ (par exemple $\omega = \sqrt{\alpha}$) et l'équation devient : $y'' + \omega^2 y = 0$.
  Les racines de l'équation caractéristiques sont $i\omega$ et $-i\omega$.
  $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 3.2.5 1. *Trouver toutes les fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :*
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = e^x \quad (E)$.

2. *Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $f \in E$. On pose $T(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t) dt$ définie sur $[0,1]$.*
Montrer que T est un endomorphisme de E et déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres.
On peut écrire $T(f)(x) = \int_0^x t f(t)\mathrm{d}t + x \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$.
L'application $T(f)$ est bien continue.
La linéarité provient de la linéarité de l'intégrale.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ vérifiant $T(f) = \lambda f$.
Si $\lambda = 0$, on a : $T(f) = 0$ donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x t f(t)\mathrm{d}t + x \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$.
En dérivant, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ x f(x) - x f(x) + \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$
En dérivant à nouveau, on obtient $f = 0$. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de T.
Ainsi λ est non nul.
On a $T(f) = \lambda f$, puis $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x t f(t)\mathrm{d}t + x \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = \lambda f$. On a aussi $f(0) = 0$ car $T(f)(0) = 0$.
Comme $T(f)$ est dérivable, alors $f = \dfrac{(T(f)}{\lambda}$ l'est aussi, puis en dérivant, on : $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = \lambda f'(x)$.
En particulier $f'(1) = 0$.
Le premier membre de cette nouvelle équation étant dérivable, la fonction f est deux fois dérivable et on obtient en dérivant l'équation différentielle : $\lambda f''(x) + f(x) = 0$.
Si $\lambda < 0$ Sachant $f(0) = 0$, la résolution de l'équation différentielle donne : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A \operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{\sqrt{|\lambda|}}\right)$.
La condition $f'(1) = 0$ entraîne toujours $f = 0$ et donc un tel λ n'est pas valeur propre de T.
Il reste $\lambda > 0$.
Sachant $f(0) = 0$, on obtient par résolution de l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A \sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$.
De $f'(1) = 0$, pour ne pas avoir $f = 0$, il faut que : $\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$, soit : $\lambda = \dfrac{4}{((2k+1)\pi)^2}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. On a : $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{(2k+1)\pi x}{2}\right)$ qui est vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 4/((2k+1)\pi)^2$, en remontant les calculs précédents.

3. (a) *Déterminer les fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non nulles, telles que :*
   $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.
   (b) *Même question, en supposant f seulement continue.*

b) Une solution particulière

On note (Eq) l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. Pour identifier une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = de^{\alpha t}$, avec α et d des constantes dans $\mathbb{C}$. On pourra s'aider des formes suivantes.

...sur (Eq)...	...chercher la solution particulière sous la forme
α non racine	$t \mapsto \lambda e^{\alpha t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$
α racine simple	$t \mapsto \lambda t e^{\alpha t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$
α racine double	$t \mapsto \lambda t^2 e^{\alpha t}, \lambda \in \mathbb{C}$

Remarque 3.2.6 1. *Lorsque le second membre est une constante, ceci correspond au cas* $\alpha = 0$.

2. *(IMPORTANT) Si a, b, c et d sont réels et que le second membre est de la forme $t \mapsto d\cos(\alpha t)$ ou $t \mapsto d\sin(\alpha t)$, on cherche une solution particulière de $t \mapsto de^{i\alpha t}$, puis on passe à la partie réelle pour avoir une solution particulière associée au second membre $t \mapsto d\cos(\alpha t)$ et à la partie imaginaire si le second membre est $t \mapsto d\sin(\alpha t)$.*

c) Les solutions générales

Théorème 3.2.2 (Équations différentielles du second ordre) *En notant $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène et f une solution particulière, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation générale est $\mathcal{S} = f + \mathcal{S}_H = \{f + g,\ g \in \mathcal{S}_H\} = \{f + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\}$.*

Exemple 3.2.6 *Résoudre :* $(\mathcal{E}) : y'' + y' - 2y = 8\sin 2x + 3e^x$

L'équation homogène associée est : $y'' + y' - 2y = 0$ et l'équation caractéristique est $(Eq) : r^2 + r - 2 = 0$. Ses solutions sont 1 et -2. Les solutions homogènes sont donc $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Nous allons utiliser le principe de superposition pour chercher une solution particulière.

On recherche une solution de $(E_1) : y'' + y' - 2y = \sin 2x$ et $(E_2) : y'' + y' - 2y = e^x$.

Pour (E_1), cherchons plutôt une solution de $y'' + y' - 2y = e^{2ix}$. Comme $2i$ n'est pas solution de (Eq), alors on cherche une solution particulière de cette équation sous la forme $x \mapsto ae^{2ix}$, $a \in \mathbb{C}$, ce qui donne : $a(2i)^2e^{2ix} + 2iae^{2ix} - 2ae^{2ix} = e^{2ix}$, soit : $a(-6 + 2i) = 1$, soit $a = \dfrac{1}{-6+2i} = \dfrac{-6-2i}{40} = \dfrac{-3-i}{20}$.

Pour revenir à (E_1) nous voulons : $z_1(x) = Im\left(\frac{-3-i}{20}\underbrace{e^{i2x}}_{\cos(2x)+i\sin(2x)}\right) = -\frac{3}{20}\sin(2x) - \frac{1}{20}\cos(2x)$. Pour (E_2), comme 1 est racine simple de (Eq), on cherche une solution particulière sous la forme $z_2 : x \mapsto bxe^x$, $b \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $z'(x) = b(x+1)e^x$ et $z''(x) = b(x+2)e^x$. On veut donc : $b(x+2)e^x + b(x+1)e^x - 2bxe^x = e^x$, ce qui donne $b = 1/3$. Ainsi une solution particulière est $y_p : x \mapsto 8z_1(x) + 3z_2(x) = -\frac{6}{5}\sin(2x) - \frac{2}{5}\cos(2x) + xe^x$.
Ainsi l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x} + y_p(x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

4 Compléments (hors-programme, mais des méthodes pratiques)

4.1 Méthodes de recherche des solutions de $X' = A(t)X + B(t)$

4.1.1 Recherche d'une solution particulière : méthode de variation des constantes

Soit $(X_1, ..., X_n)$ une base de $X' = AX$. On cherche une solution particulière sous la forme $Z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$ de $X' = A(t)X + B(t)$. On injecte cela dans $X' = A(t)X + B(t)$. On a :
$Z' = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k X_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X'_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k X_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A X_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k X_k + AZ$. Ainsi Z est solution de $X' = A(t)X + B(t)$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} \lambda'_k X_k = B$.
Cela généralise la preuve faite dans 3.2.4.

Exemple 4.1.1 *On considère le système différentiel* $\left\{\begin{array}{lcl}(1+t^2)x' & = & tx + y + 2t^2 - 1\\ (1+t^2)y' & = & -x + ty + 3t\end{array}\right.$ $(\mathcal{E})$.

1. *Montrer que* $Y_1 : t \mapsto \begin{pmatrix}1\\-t\end{pmatrix}$ *et* $Y_2 : t \mapsto \begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$ *sont deux solutions du système homogène associé* $X' = AX$*. Pourquoi* $\mathrm{Vect}(Y_1, Y_2)$ *est-il l'ensemble des solutions sur* $\mathbb{R}$ *de ce système ?*
2. *Donner l'ensemble des solutions de* $(\mathcal{E})$ *en cherchant une solution particulière sous la forme* $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$*, avec* λ_1, λ_2 *dérivables sur* $\mathbb{R}$*.*

1. *Le système linéaire homogène associé s'écrit :* $X'(t) = A(t)X(t)$*, avec* $A : t \mapsto \begin{pmatrix}\frac{t}{1+t^2} & \frac{1}{1+t^2}\\ -\frac{1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2}\end{pmatrix}$.

   Soit $t \in \mathbb{R}$*. On a :* $A(t)Y_1(t) = \begin{pmatrix}0\\ \frac{-1-t^2}{1+t^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = Y_1'(t)$*. Idem pour* Y_2*. Grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz (*A *est continue), l'espace vectoriel des solutions de* $X' = AX$ *est de dimension deux (on a normalisé le système en divisant par* $1+t^2$ *pour se ramener à cette forme là). Or* (Y_1, Y_2) *est libre car si* $\lambda Y_1 + \mu Y_2 = 0$ *(avec* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*), alors* $0 = \lambda Y_1(0) + \mu Y_2(0) = \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$*, alors :* $\lambda = \mu = 0$*. Ainsi* (Y_1, Y_2) *est une base de ce système homogène.*

2. *Nous devons résoudre* $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$*, avec* $B : t \mapsto \begin{pmatrix}\frac{2t^2-1}{1+t^2}\\ \frac{3t}{1+t^2}\end{pmatrix}$ *(équation normalisée pour utiliser nos théorèmes).*

   Nous allons maintenant chercher une solution particulière de ce système sous la forme $t \mapsto \lambda(t)Y_1(t) + \mu(t)Y_2(t)$*. Grâce au calcul précédent, on doit avoir :*

   $\lambda'(t)Y_1(t) + \mu'(t)Y_2(t) = B(t)$ *soit :* $\begin{pmatrix}\lambda'(t) + t\mu'(t)\\ -t\lambda'(t) + \mu'(t)\end{pmatrix} = B(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & t\\ -t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda'(t)\\ \mu'(t)\end{pmatrix} = B(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\lambda'(t)\\ \mu'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & t\\ -t & 1\end{pmatrix}^{-1} B(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2t^2-1}{1+t^2}\\ \frac{3t}{1+t^2}\end{pmatrix} =$

   $\frac{1}{(1+t^2)^2}\begin{pmatrix}-(1+t^2)\\ 2t^3+2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{1+t^2}\\ \frac{2t}{1+t^2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\lambda'(t) & = & -\frac{1}{1+t^2}\\ \mu'(t) & = & \frac{2t}{1+t^2}\end{array}\right.$ *. Ainsi* $\lambda(t) = -\mathrm{Arctan}\,(t)$ *et* $\mu(t) = \ln|1+t^2| = \ln(1+t^2)$ *conviennent.*

   Une solution particulière est donc $t \mapsto -\mathrm{Arctan}\,(t)Y_1(t) + \ln(1+t^2)Y_2(t)$*.*
   On en conclut que : $\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \lambda Y_1(t) + \mu Y_2(t) - \mathrm{Arctan}\,(t)Y_1(t) + \ln(1+t^2)Y_2(t),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.

4.1.2 Par changement de base

Dans ce cas, il faut résoudre l'équation homogène $X' = AX$ et trouver une solution particulière de $X'(t) = AX(t) + B(t)$.

Remarque 4.1.1 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *diagonalisable, de valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*, et soient* $U_1, \ldots, U_n$ *des vecteurs propres associés. Si* P *est la matrice donc les colonnes sont* $U_1, \ldots, U_n$*, alors* $A = PDP^{-1}$*, avec* $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *L'équation* $X'(t) = AX(t) + B(t)$ *s'écrit quant à elle*
$Z'(t) = DZ(t) + P^{-1}B(t)$*, avec* $Z = P^{-1}X$*. On peut chercher une solution particulière* Z_p *de cette*

dernière équation puis calculer $X_p = PZ_p$.

Si la matrice A n'est que trigonalisable, alors l'équation $X'(t) = AX(t) + B(t)$ s'écrit $Z'(t) = TZ(t) + P^{-1}B(t)$ avec T triangulaire supérieure, que l'on résout en commençant par le bas...

On peut avoir la même chose si A dépend de t, mais le passage avec Z ne fonctionne que si P est constante.

Exemple 4.1.2 1. ***(Avec une matrice à coefficients constants)***

$$\text{Résoudre} \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 2x + 3y + 3z + te^t \\ y' & = & 3x + 2y + 3z + e^t \\ z' & = & 3x + 3y + 2z + t^2e^t \end{array} \right. .$$

Ce système s'écrit $X' = AX + B$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B : t \mapsto \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ t^2e^t \end{pmatrix}$.

Nous avons vu dans le chapitre 6 que $A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On a : $X' = AX + B \Leftrightarrow P^{-1}X' = TP^{-1}X + P^{-1}B \Leftrightarrow X_1' = TX_1 + B_1$, avec

$X_1 = P^{-1}X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ et $B_1 = P^{-1}B : t \mapsto \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (1+t+t^2)e^t \\ (-t+2-t^2)e^t \\ (-t-1+2t^2)e^t \end{pmatrix}$.

On doit résoudre le système matriciel $\left\{ \begin{array}{rcll} x_1'(t) & = & 8x_1(t) + \dfrac{(1+t+t^2)e^t}{3} & (1) \\ y_1'(t) & = & -y_1(t) + \dfrac{(-t+2-t^2)e^t}{3} & (2) \\ z_1'(t) & = & -z_1(t) + \dfrac{(-t-1+2t^2)e^t}{3} & (3) \end{array} \right. .$

Cherchons une solution particulière de (1) sous la forme $t \mapsto \dfrac{(at^2+bt+c)}{3}e^t$. On doit avoir : $2at + b + at^2 + bt + c = 8at^2 + 8bt + 8c + 1 + t + t^2$, soit $-7at^2 + (2a-7b)t + (b-7c) = 1 + t + t^2$, donc $a = -1/7$, $b = -9/49$ et $c = -58/343$, ainsi les solutions de (1) sont $t \mapsto -\dfrac{1}{21}\left(t^2 + \dfrac{9t}{7} + \dfrac{58}{49}\right)e^t + ae^{8t}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Pour (2), on procède de la même manière et on trouve $t \mapsto \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{t^2}{2} + 1\right)e^t + be^{-t}$, avec $b \in \mathbb{R}$ et pour (3), on trouve : $t \mapsto \left(\dfrac{t^2}{3} - \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{12}\right)e^t + ce^{-t}$, avec $c \in \mathbb{R}$.

On a donc $X = PX_1 = \begin{pmatrix} x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_1(t) + x_2(t) \\ x_1(t) + x_3(t) \end{pmatrix}$, donc

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} e^t\left(-\frac{3}{14}t^2 + \frac{43}{98}t - \frac{649}{1372}\right) + ae^{8t} - (b+c)e^{-t} \\ e^t\left(-\frac{3}{14}t^2 - \frac{3}{49}t + \frac{95}{343}\right) + ae^{8t} + be^{-t} \\ e^t\left(\frac{2}{7}t^2 - \frac{55}{98}t + \frac{37}{1372}\right) + ae^{8t} + ce^{-t} \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. ***(Avec une matrice à coefficients non constants)***

$$\text{Résoudre} \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & (t+3)x + 2y \\ y' & = & -4x + (t-3)y \end{array} \right. .$$

On doit résoudre $X' = A(t)X$, avec $A(t) = \begin{pmatrix} t+3 & 3 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix}$.

On a $\chi_{A(t)} = X^2 - 2tX + (t^2 - 1)$, donc $Sp(A(t)) = \{t+1, t-1\}$ (en faisant le lien entre coefficients et racines).

On a $E_{t+1}(A(t)) = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_{t-1}(A(t)) = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On a donc $A = PD(t)P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D(t) = \begin{pmatrix} t+1 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix}$.

On pose $X_1 = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et on a : $X' = A(t)X \Leftrightarrow P^{-1}X' = D(t)P^{-1}X \Leftrightarrow X_1' = D(t)X_1$, car P^{-1} ne dépend pas de t.

On résout $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & (t+1)x_1 \\ y_1' & = & (t-1)y_1 \end{array} \right.$. On trouve $X_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} ae^{t^2/2+t} \\ be^{t^2/2-1} \end{pmatrix}$, puis $X = PX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}$, donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} e^{t^2/2}(ae^t + be^{-t}) \\ e^{t^2/2}(-ae^t - 2be^{-t}) \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.2 Résolution pratique d'équations différentielles du second ordre

4.2.1 ...lorsque l'on dispose d'une solution homogène

Il s'agit ici de résoudre l'équation $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ ou $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$, lorsqu'on connaît une solution y_0 de l'équation homogène (trouvée soit par observation, soit en cherchant une solution développable en série entière ou une solution polynomiale, soit en étant guidé par l'énoncé,...).

On cherche une solution particulière sous la forme d'une série entière ou d'un polynôme si on peut se ramener à des coefficients polynomiaux.

On suppose que y_0 ne s'annule pas sur I.

On effectue le changement de fonction inconnue $y = y_0z$, qui donne $y' = y_0'z + y_0z'$ puis $y'' = y_0''z + 2y_0'z' + y_0z''$, ce qui conduit à l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y_0(t)z''(t) + (2y_0'(t) + a(t))z'(t) = 0 \quad (\text{resp. } = c(t))$$

soit une équation du premier ordre, d'inconnue z' (après avoir divisé par y_0).

Exemple 4.2.1 *Soit* $(\mathcal{E}) : \ (1+t^2)y''(t) - 2y(t) = 0.$

1. *Chercher une solution polynomiale non nulle de* $(\mathcal{E})$*. Soit* y_0 *cette solution.*
2. *Déterminer une solution particulière sous la forme* $y_0 z$ *non colinéaire à* y_0*.*

Remarque 4.2.1 $(\mathcal{E})$ *est équivalente sur* $\mathbb{R}$ *à :* $y''(t) - \frac{2}{1+t^2}y(t) = 0$*, qui est normalisée, homogène et à coefficients continus, donc son ensemble de solutions est un espace vectoriel de dimension* 2*. Comme* (y_0, y_1) *est une famille libre de cet ensemble (l'une des fonction est paire et l'autre impaire), alors l'ensemble des solutions de* $(\mathcal{E})$ *est* $\mathrm{Vect}(y_0, y_1)$*.*

4.2.2 Changement de variable

Exemple 4.2.2 *Soit* $(E) : xy'' - y' - x^3y = 0.$

1. *Résoudre cette équation différentielle sur* $\mathbb{R}_+^*$ *en posant le changement de variable* $t = x^2$*.*
2. *Déterminer les solutions sur* $\mathbb{R}$*.*

4.3 Équations différentielles non linéaires

Exemple 4.3.1 *1. Résoudre $y'' + |y| = 0$ et $y(0) = -1$.*

Montrons que, pour tout réel a, il existe une unique solution de l'équation différentielle telle que $y(0) = -1$ et $y'(0) = \alpha$.

Supposons qu'une telle fonction existe. Sur un intervalle où $y \leqslant 0$, on a $y'' - y = 0$ et il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = a\operatorname{ch}(t) + b\operatorname{sh}(t)$. Sur un intervalle où $y \geqslant 0$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = a\cos(t) + b\sin(t)$.

On a $y(0) = -1$, donc y est négative au voisinage de 0 . Soit I le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel $y < 0$. Comme $y(0) = -1$ et $y'(0) = \alpha$, on a : $\forall t \in I,\ y(t) = -\operatorname{ch}(t) + a\operatorname{sh}(t)$. Si $I \neq \mathbb{R}$, on doit avoir $y(t) = 0$ lorsque t est une borne de I, par continuité (si a est borne de I et $y(a) < 0$, alors au voisinage de a, y est négatif, ce qui contredit la maximalité de I). On distingue plusieurs cas :

- *Si $|a| \leqslant 1$, on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ -\operatorname{ch}(t) + a\operatorname{sh}(t) \leqslant -\operatorname{ch}(t) + |\operatorname{sh}(t)| < \dfrac{1}{2}(-e^t - e^{-t} + e^t + e^{-t}) < 0$.*

Ainsi $I = \mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = -\operatorname{ch}(t) + \alpha\operatorname{sh}(t)$. Il est clair, réciproquement, que cette fonction est négative et vérifie l'équation differentielle.

- *Si $|\alpha| > 1, -\operatorname{ch}(t) + \alpha\operatorname{sh}(t)$ s'annule en $t_\alpha = \operatorname{th}^{-1}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ (on rappelle que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$).*

-Si $\alpha > 1$, on a $t_\alpha > 0$ et $I =]-\infty, t_\alpha]$. À droite de t_α, y est positive et donc, sachant que $y(t_\alpha) = 0$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $y(t) = a\sin(t - t_\alpha)$, avec t dans un intervalle du type $[t_\alpha, t_\alpha + \varepsilon]$.

On a $a = y'(t_\alpha) = -\operatorname{sh}(t_\alpha) + \alpha\operatorname{ch}(t_\alpha) = -\operatorname{th}(t_\alpha)\operatorname{ch}(t_\alpha) + \alpha\operatorname{ch}(t_\alpha) = \operatorname{ch}(t_\alpha)\left(\alpha - \dfrac{1}{\alpha}\right)$. De

$$\operatorname{ch}(t_\alpha) = \frac{\operatorname{ch}(t_\alpha)}{1} = \frac{\operatorname{ch}(t_\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(t_\alpha) - \operatorname{sh}^2(t_\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2(t_\alpha)}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}},$$

on tire $a = \sqrt{\alpha^2 - 1}$. À droite de t_α on a $y(t) = \sqrt{\alpha^2 - 1}\sin(t - t_\alpha)$, cette expression reste valable tant que y est positive, donc sur $[t_\alpha, t_\alpha + \pi]$. En $t_\alpha + \pi$, cette expression s'annule et change de signe, donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que à droite de $t_\alpha + \pi$, on ait : $y(t) = b\operatorname{sh}(t - t_\alpha - \pi)$. De plus 0 a $b = y'(t_\alpha + \pi) = \sqrt{\alpha^2 - 1}\cos(\pi) = -\sqrt{\alpha^2 - 1}$. La fonction $t \mapsto b\operatorname{sh}(t - t_\alpha - \pi)$ ne s'anmule pas sur $[t_\alpha + \pi, +\infty[$, donc la formule est valable sur $[t_0 + \pi, +\infty[$. Finalement on obtient une unique fonction, définie par

$$y_\alpha(t) = \begin{cases} -\operatorname{ch}(t) + \alpha\operatorname{sh}(t) & si\ t \leqslant t_\alpha \\ \sqrt{\alpha^2 - 1}\sin(t - t_\alpha) & si\ t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\alpha + \pi \\ \sqrt{\alpha^2 - 1}\operatorname{sh}(t - t_\alpha - \pi) & si\ t \geqslant t_\alpha + \pi. \end{cases}$$

On vérifie, réciproquement, que cette fonction est bien de classe $\mathcal{C}^2$ (faut simplement étudier l'existence des dérivées en t_α et $t_\alpha + \pi$). Par construction, elle est solution de l'équation différentielle et vérifie les conditions initiales imposées. On obtient une solution unique.

- Pour traiter le cas $\alpha < -1$, on remarque que si y est solutio de l'équation différentielle, il en est de même de $z : t \longmapsto y(-t)$. De plus $z(0) = y(0)$ et $z'(0) = -y'(0)$. On en déduit qu'il existe encus une solution unique y_α définie par $y_\alpha(t) = y_{-\alpha}(-t)$ et donc, puisque $t_{-\alpha} = -t_\alpha$,

$$y_\alpha(t) = \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - 1}\operatorname{sh}(-t + t_\alpha - \pi) & si\ t \leqslant t_\alpha - \pi \\ \sqrt{\alpha^2 - 1}\sin(-t + t_\alpha) & si\ t_\alpha - \pi \leqslant t \leqslant t_\alpha \\ -\operatorname{ch}(t) + \alpha\operatorname{sh}(t) & si\ t \geqslant t_\alpha. \end{cases}$$

2. *On pose* $f = \tan|_{]-\pi/2,\pi/2[}$.

(a) *Montrer que* f *est l'unique solution de l'équation différentielle :* $y' = 1+y^2$ *vérifiant* $y(0) = 0$.

(b) *On pose* $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. *Pour* $n \geq 1$, *montrer que :* $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.

(c) *Montrer que :* $\forall x \in [0, \pi/2[, \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) \geq 0$. *En déduire que le rayon de convergence* R *de* $\sum a_n z^n$ *vaut au moins* $\pi/2$.

(d) *Montrer que :* $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[,\ \tan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

(a)

(b)

(c) *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et on pose* $\mathcal{P}(n) : \forall x \in [0, \pi/2[,\ f^{(n)}(x) \geq 0$.
Nous allons raisonner par récurrence forte.

- *On a* $f^{(0)} = \tan \geq 0$ *sur* $[0, \pi/2[$, *donc* $\mathcal{P}(0)$ *est vraie.*
- *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *on suppose* $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), ..., \mathcal{P}(n)$.

Comme $f' = 1 + f^2 \geq 0$, *alors* $\mathcal{P}(1)$ *est vraie.*
Si $n \geq 1$, *on peut utiliser la relation de la question précédente qui nous donne :*
$f^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$. *Grâce à* $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), ..., \mathcal{P}(n)$, *on a pour tout* k *de* $[\![0, n]\!]$, *on a :* $f^{(k)} f^{(n-k)} \geq 0$ *sur* $[0, \pi/2[$ *et donc :* $f^{(n+1)} \geq 0$ *sur* $[0, \pi/2[$. *D'où* $\mathcal{P}(n+1)$, *ce qui achève la récurrence.*
Soit $x \in [0, \pi/2[$. *Comme la fonction* $\tan$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $[0, x]$, *donc grâce à la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale, pour tout* n *de* $\mathbb{N}$, *on a :*

$$f(x) = \tan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Comme on a : $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \geq 0$, *grâce au point précédent, alors :*
$\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leq f(x)$.
Ainsi la série $\sum a_k x^k$ *qui est à termes positifs a ses sommes partielles majorées (par* $f(x)$*), donc la série* $\sum a_k x^k$ *converge pour tout* x *dans* $[0, \pi/2[$.
Le rayon de convergence R *de* $\sum a_n z^n$ *vaut au moins* $\pi/2$.

(d)