1 Intégration des fonctions vectorielles

1.1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Dans ce paragraphe $[a,b]$ désignera un segment de $\mathbb{R}$, le corps $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. On se fixe $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ une base de E.

Définition 1.1.1 (Fonctions continues par morceaux sur un segment) *Soit $f:[a,b]\to E$ une fonction. On dit qu'elle est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma=(a_0,...,a_p)$ de $[a,b]$ ($a=a_0<a_1<...<a_{p-1}<a_p=b$) telle que :*
- *pour tout $j\in[\![0,p-1]\!]$, la restriction $f_j=f|_{]a_j,a_{j+1}[}$ soit continue ;*
- *pour tout $j\in[\![0,p-1]\!]$, on puisse prolonger prolonger f_j en une fonction $\tilde{f}_j$ continue sur $[a_j,a_{j+1}]$.*

Une telle subdivision est dite adaptée à f.

Lemme 1.1.1 (Fonctions continues par morceaux et fonctions coordonnées) *Soit $f:[a,b]\to E$ une fonction continue par morceaux que l'on décompose suivant ses fonctions coordonnées : $f=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f_ie_i$, où pour tout i de $[\![1,n]\!]$, les fonctions f_i vont de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.*
f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si pour tout i de $[\![1,n]\!]$, les fonctions f_i le sont aussi.

Démonstration : • On suppose f continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\sigma=(a_0,..,a_p)$ une subdivision adaptée à f. Soit $j\in[\![0,p-1]\!]$. La fonction f est continue sur $]a_j,a_{j+1}[$, donc toutes ses fonctions coordonnées f_i le sont aussi. Par ailleurs $\displaystyle\lim_{a_j^+}f$ et $\displaystyle\lim_{a_{j+1}^-}f$ existent, alors chaque fonction coordonnée admet une limite à droite en a_j et à gauche en a_{j+1}. Donc pour tout i de $[\![1,n]\!]$, les fonctions $f_i|_{]a_j,a_{j+1}[}$ se prolongent par continuité sur $[a_j,a_{j+1}]$.
• On suppose que pour tout i de $[\![1,n]\!]$, les fonctions f_i sont continues par morceaux sur $[a,b]$. On note σ_i une subdivision adaptée à f_i, pour tout i de $[\![1,n]\!]$. Soit σ la réunion de toutes ces subdivisions. Cette subdivision étant plus fine que toutes les subdivisions σ_i, alors σ est une subdivision adaptée à toutes les fonctions f_i. On pose $\sigma=(a_0,...,a_p)$. Soit $j\in[\![0,p-1]\!]$. Toutes ses fonctions coordonnées f_i sont continues sur $]a_j,a_{j+1}[$, donc f l'est aussi. De plus $\displaystyle\lim_{a_j^+}f_i$ et $\displaystyle\lim_{a_{j+1}^-}f_i$ existent, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, donc f admet une limite à droite en a_j et à gauche en a_{j+1}. Ainsi $f|_{]a_j,a_{j+1}[}$ se prolonge par continuité sur $[a_j,a_{j+1}]$.

Lemme 1.1.2 (Intégration d'une fonction vectorielle sur une base) *Soit $f:[a,b]\to E$ continue par morceaux que l'on décompose suivant ses fonctions coordonnées : $f=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f_ie_i$, où pour tout i de $[\![1,n]\!]$, les fonctions f_i vont de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.*
Le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b f_i(t)dt\right)e_i$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Démonstration : Soit $\mathcal{U}=(u_1,...,u_n)$ une autre base de E et on décompose f dans cette base : $f=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}g_iu_i$. On note $I=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b f_i(t)dt\right)e_i$ et $J=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b g_i(t)dt\right)u_i$. On note $P=P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}=[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{U}$.

Définition 1.1.2 (Intégrale d'une fonction continue sur un segment) *Soit $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux que l'on décompose suivant ses fonctions coordonnées :* $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$. *On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le vecteur de E égal à* $\sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)dt \right) e_i$.

Ce vecteur est noté $\int_{[a,b]} f$ *ou* $\int_a^b f$ *ou* $\int_a^b f(t)dt$.

Remarque 1.1.1

1. *Cette définition a un sens car l'intégrale de f sur $[a,b]$ ne dépend pas de la base choisie sur E grâce au lemme précédent.*
2. *Si $a > b$, on pose* $\int_a^b f(t)dt = -\int_{[b,a]} f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.

Exemple 1.1.1 *Soit F un sous-espace vectoriel de E et $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux telle que :* $\forall t \in [a,b],\ f(t) \in F$. *Montrer que* $\int_a^b f$ *est dans F.*

Proposition 1.1.1 (Linéarité) *Soient f, g définies sur $[a,b]$ à valeurs dans E, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :* $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.

Démonstration : C'est une conséquence de la linéarité de l'intégrale pour les fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$, appliquée aux applications coordonnées.

Proposition 1.1.2 (Relation de Chasles) *Soient $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux et $c \in]a,b[$. Alors :*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Démonstration : C'est une conséquence de la relation de Chasles pour les fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$, appliquée aux applications coordonnées.

Proposition 1.1.3 (Inégalité triangulaire) *Soit $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux. Alors :*

$$\left\| \int_{[a,b]} f(t)dt \right\| \le \int_{[a,b]} \|f(t)\| dt \le (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\| = (b-a)\|f\|_\infty.$$

Démonstration : Une fonction $\varphi : [a,b] \to E$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, ..., a_p)$ de $[a,b]$ telle que pour tout k de $[\![0, p-1]\!]$ la fonction φ soit constante sur $]a_k, a_{k+1}[$. On note $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i e_i$. Si φ est en escalier, alors toutes les fonctions φ_i le sont sur $[a,b]$. En effet soit $k \in [\![0, p-1]\!]$. Alors la fonction φ est constante sur $]a_k, a_{k+1}[$ et elle est égale à un vecteur v_k de E. On décompose $v_k = \sum_{i=1}^{n} v_{k,i} e_i$, alors : $\forall x \in]a_k, a_{k+1}[, v_k = \varphi(x)$, , puis : $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall x \in]a_k, a_{k+1}[\ v_{k,i} = \varphi_i(x)$ car $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E. Ainsi les fonctions φ_i sont aussi en escalier.
Par conséquent σ est une subdivision adaptée à toutes les fonctions φ_i et donc en utilisant l'expression d'une intégrale pour une fonction en escalier à valeurs dans $\mathbb{K}$, on a : $\int_a^b \varphi = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b \varphi_i \right) e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) v_{k,i} \right) e_i = \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) \left(\sum_{i=1}^{n} v_{k,i} e_i \right) = \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) v_k$.
Par ailleurs, la fonction $\|\varphi\|$ est en escalier : pour tout k de $[\![0, p-1]\!]$, sur $]a_k, a_{k+1}[$, elle est constante égale à $\|v_k\|$. Dans ce cas, on a :
$\| \int_a^b \varphi \| = \| \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) v_k \| \leq \sum_{k=0}^{p-1} |a_{k+1} - a_k| \times \|v_k\| = \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) \times \|v_k\| = \int_a^b \|\varphi\|$, en utilisant la valeur de l'intégrale de la fonction en escalier $\|\varphi\|$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le résultat est donc vrai pour une fonction en escalier.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$, avec $f_i : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Il existe une fonction en escalier $\psi_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que : $\|f_i - \psi_i\|_\infty \leq \varepsilon$.
Soit $\psi : [a,b] \to E$ définie par $\psi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i e_i$.

Sur E, on pose la norme N_1 définie par : $N_1(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Comme en est en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc il existe α, β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que : $\forall x \in E,\ \alpha \|x\| \leq N_1(x) \leq \beta \|x\|$.
Ainsi : $\forall x \in E, \|f(x) - \psi(x)\| \leq \frac{1}{\alpha} N_1(f(x) - \psi(x)) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - \psi_i(x)| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \|f_i - \psi_i\|_\infty \leq \frac{n\varepsilon}{\alpha}$.
On a donc : $\forall x \in E,\ \|\psi(x)\| = \|\psi(x) - f(x) + f(x)\| \leq \|\psi(x) - f(x)\| + \|f(x)\| \leq \frac{n\varepsilon}{\alpha} + \|f(x)\|$.
De plus, grâce à l'inégalité triangulaire pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, on a pour tout i de $[\![1, n]\!]$: $\left| \int_a^b (f_i - \psi_i) \right| \leq \int_a^b |f_i - \psi_i| \leq \varepsilon(b-a)$. Comme $\int_a^b (f - \psi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i - \psi_i) \right) e_i$, alors : $N_1 \left(\int_a^b (f - \psi) \right) = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_a^b (f_i - \psi_i) \right| \leq n\varepsilon(b-a)$, puis : $\left\| \int_a^b (f - \psi) \right\| \leq \frac{n\varepsilon(b-a)}{\alpha}$.
On a donc : $\left\| \int_a^b f \right\| = \left\| \int_a^b (f - \psi) + \int_a^b \psi \right\| \leq \left\| \int_a^b (f - \psi) \right\| + \left\| \int_a^b \psi \right\| \leq \frac{n\varepsilon(b-a)}{\alpha} + \int_a^b \|\psi\| \leq \frac{n\varepsilon(b-a)}{\alpha} + \int_a^b (\frac{n\varepsilon}{\alpha} + \|f\|) = \frac{2n\varepsilon(b-a)}{\alpha} + \int_a^b \|f\|$. Ceci étant vrai pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$, alors quand ε tend vers 0, on obtient : $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$.

Exemple 1.1.2 *Soient E un espace euclidien et $f : [a,b] \to E$ une fonction continue. On suppose que $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| = \int_a^b \|f(t)\| dt$.*
Montrer qu'il existe $e \in E$ unitaire tel que : $\forall t \in [a,b],\ f(t) = \|f(t)\|.e$.
Si $\int_a^b f = 0$, alors $\int_a^b \|f\| = 0$, et comme $\|f\|$ est une fonction positive et continue, alors $\forall t \in [a,b],\ \|f(t)\| = 0$ puis : $f = 0$.
Maintenant, on suppose $\int_a^b f \neq 0$. On pose $e_1 = \frac{\int_a^b f}{\left\| \int_a^b f \right\|}$, et donc : $\int_a^b f(t)dt = \left\| \int_a^b f(t)dt \right\| e_1 = \left(\int_a^b \|f(t)\| dt \right) e_1$.
Comme e_1 est de norme un, on peut compléter la famille orthonormée (e_1) en une base orthonormée $(e_1, ...e_n)$ de E.

On peut écrire $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$, *avec :* $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f_i \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

On a donc : $\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i\right) e_i = \left(\int_a^b \|f(t)\|dt\right) e_1$.

En extrayant la composant sur e_1*, on trouve :* $\int_a^b f_1 = \int_a^b \|f\|$*, puis* $\int_a^b (\|f\| - f_1) = 0$.

Mais : $\forall t \in [a, b],\ \|f(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(t) \geq f_1^2(t)$ $(*)$*, car* $(e_1, ...e_n)$ *est une base orthonormée de* E.

On a donc $\|f\| \geq |f_1| \geq f_1$*. Ainsi* $\|f\| - f_1$ *est continue et positive, donc :* $\|f\| - f_1 = 0$*, puis* $f_1 = \|f\|$.
Ainsi l'inégalité $(*)$ *est une égalité, donc :* $\forall t \in [a, b], \forall i \in [\![2, n]\!],\ f_i(t) = 0$.
On a donc : $\forall t \in [a, b],\ f(t) == f_1(t)e_1 = \|f(t)\|e_1$.

Proposition 1.1.4 (Intégrale et application linéaire) *Soient* $f : [a, b] \to E$ *continue par morceaux,* F *un espace vectoriel normé de dimension finie et* $L \in \mathcal{L}(E, F)$*. Alors :*

$$L\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b L(f).$$

Démonstration : Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (u_1, ...u_n)$ une base de F. On pose $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(L)$. On a $f = \sum_{j=1}^{p} f_j e_j$. On a donc :
$L(f) = \sum_{j=1}^{p} f_j L(e_j) = \sum_{j=1}^{p} f_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_i = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{i,j} \sum_{j=1}^{p} f_j\right) u_i$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, l'application $a_{i,j} \sum_{j=1}^{p} f_j$ est continue par morceaux, par combinaison linéaire et par définition de l'intégrale (qui ne dépend pas de la base choisie), on a : $\int_a^b L(f) = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \left(a_{i,j} \sum_{j=1}^{p} f_j\right) u_i = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{i,j} \sum_{j=1}^{p} \int_a^b f_j\right) u_i$, par linéarité de l'intégrale. D'autre part, on a :

$$L\left(\int_a^b f\right) = L\left(\sum_{j=1}^{p} \underbrace{(\int_a^b f_j)}_{\in \mathbb{K}} e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} (\int_a^b f_j) L(e_j) = \sum_{j=1}^{p} (\int_a^b f_j) \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_i = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{i,j} \sum_{j=1}^{p} \int_a^b f_j\right) u_i = \int_a^b L(f).$$

Théorème 1.1.1 (Convergence des sommes de Riemann) *Soit* $f : [a, b] \to E$ *une fonction continue par morceaux. Pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, soient* R_n *et* R'_n *les sommes de Riemann de* f *définies par :*

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad R'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Alors les suites $(R_n)_{n\geq 1}$ *et* $(R'_n)_{n\geq 1}$ *des sommes de Riemann convergent vers* $\int_a^b f(t)dt$ *:*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Démonstration : Appliquer le résultat vu en sup à chacune des fonctions coordonnées qui sont bien continues par morceaux.

Remarque 1.1.2

1. *Pour conserver l'idée de limite de moyennes sur* $[a, b]$*, on peut écrire :*
$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$
2. *Pour faire apparaître une somme de Riemann, factorisez d'abord votre expression par* $1/n$*, puis essayer de trouver dans le* $\sum$ *une formule en* k/n*, ce qui vous permettra d'identifier votre fonction* f *et enfin, vous trouvez l'intervalle* $[a, b]$.

Exemple 1.1.3

1. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+$*. Trouver un équivalent de* $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} + \dfrac{1}{(n+2)^\alpha} + ... + \dfrac{1}{(2n)^\alpha}$.

2. ***(Théorème de Fubini)*** *Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{K}$ continue.*
   Alors on a : $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)dt \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)dx \right) dt.$
   On appliquera les sommes de Riemann à $F : x \mapsto \displaystyle\int_c^d f(x,t)dt.$

Montrons que F est continue sur $[a,b]$.

- *Soit $t \in [c,d]$, alors $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[a,b]$.*
- *Soit $x \in [a,b]$, alors $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux que $[c,d]$.*
- *La fonction f est continue sur le compact $[a,b] \times [c,d]$, donc elle y est bornée et donc : $\forall (x,t) \in [a,b] \times [c,d],\ |f(x,t)| \leq \|f\|_\infty$ et $t \mapsto \|f\|_\infty$ est continue sur $[c,d]$.*

Ainsi f est continue sur $[a,b]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\displaystyle\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} F\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_c^d \underbrace{\frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}, t\right)}_{g_n(t)} dt$. *Nous allons utiliser le théorème de convergence dominé.*

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est continue par morceaux sur $[c,d]$.*
- *Grâce aux somme de Riemann, comme à t fixé, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue, alors (g_n) converge simplement vers $t \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt$ et on montre comme avant que cette fonction est continue sur $[c,d]$.*
- *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [c,d]$. On a : $|g_n(t)| \leq \displaystyle\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \|f\|_\infty = (b-a)\|f\|_\infty$ et $t \mapsto (b-a)\|f\|_\infty$ est continue par morceaux et intégrable sur $[c,d]$.*

Grâce au théorème de convergence dominé : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_c^d g_n(t)dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)dx \right) dt.$

Par ailleurs en appliquant les sommes de Riemann à la fonction continue F, on a : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} F\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)dt \right) dx$

et par unicité de la limite, on a : $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)dt \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)dx \right) dt.$

1.2 Primitives et intégrales

Dans ce paragraphe, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, le corps $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. On se fixe $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

1.2.1 Théorème fondamental de l'analyse

Définition 1.2.1 (Primitive) *Soit $f : I \to E$ une fonction continue. Une application $g : I \to E$ est une primitive de f si g est dérivable sur I et : $g' = f$.*

Théorème 1.2.1 (Théorème fondamental de l'analyse) *Soient $f \in \mathcal{C}(I,E)$ et $a \in I$. Alors l'application F de I dans E définie par : $\forall x \in I,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est f. L'application F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

Démonstration : Si on écrit $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i e_i$, avec $f_i : I \to \mathbb{K}$ les fonctions coordonnées, alors :

$\forall x \in I,\ \displaystyle\int_a^x f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^x f_i(t)dt \right) e_i$. Comme f est continue sur I, alors toutes les fonctions coordonnées le sont, puis en appliquant le théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, on obtient : $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall x \in I,\ \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^x f_i(t)dt\right) = f_i(x)$. Grâce aux résultats sur les dérivées des fonctions vectorielles, on a donc $\forall x \in I,\ \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^n f_i(x)e_i = f(x)$.

Ainsi F est une primitive de F.

Soit G une primitive de f s'annulant en a. On a sur I : $(G-F)' = f - f = 0$. Donc $G-F$ est constante, mais comme $(G-F)(a) = 0$, alors $G-F=0$, puis $F=G$.

Remarque 1.2.1 1. *(IMPORTANTE) Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$.*

2. *(IMPORTANTE) Si 0 est dans I, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = f(0)$, avec $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$ qui est une primitive de f.*

Exemple 1.2.1 *Soit $\varphi : (\mathbb{R},+) \to (GL_n(\mathbb{C}),\times)$ un morphisme de groupes continu. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = e^{tA}$.*

On montrera d'abord qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\displaystyle\int_0^\eta \varphi(t)dt \in GL_n(\mathbb{R})$.

Comme $t \mapsto \varphi(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composition, alors $\psi : \alpha \mapsto \displaystyle\int_0^\alpha \varphi(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (l'espace d'arrivé est $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie) et : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \psi'(\alpha) = \varphi(\alpha)$. En particulier :

$\varphi(0) = \psi'(0) = \displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\alpha}(\psi(\alpha)-\psi(0))$. Comme $\psi(0) = 0$ et $\varphi(0) = I_n$, car φ est un morphisme de groupe, alors : $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \varphi(t)dt = I_n$.

On rappelle que $GL_n(\mathbb{C}) = (\det)^{-1}(\mathbb{C}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (image réciproque d'un ouvert par une application continue). Comme I_n est dans $GL_n(\mathbb{C})$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$B(I_n, r) \subset GL_n(\mathbb{C})$. Ainsi grâce à la question précédente, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$\forall \alpha \in]0,\eta],\ \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^\alpha \varphi(t)dt \in B(I_n,r)$. Ainsi : $\dfrac{1}{\eta}\psi(\eta)$ est dans $GL_n(\mathbb{C})$, puis $\psi(\eta)$ aussi.

$\displaystyle\int_0^\eta \varphi(u+t)du = \int_0^\eta \varphi(u)\varphi(t)du = \left(\int_0^\eta \varphi(u)du\right)\varphi(t) = \psi(\eta)\varphi(t)$, car l'application $f : M \mapsto M\varphi(t)$ est linéaire, donc $\displaystyle\int_0^\eta f(\varphi(u))du = f\left(\int_0^\eta \varphi(u)du\right)$.

Par ailleurs, en effectuant le changement de variable $v = t+u$, on a :

On a : $\displaystyle\int_0^\eta \varphi(t+u)du = \int_t^{\eta+t}\varphi(v)dv = \psi(\eta+t)-\psi(t)$.

On a donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \psi(\eta)^{-1}(\psi(\eta+t)-\psi(t))$.

Comme l'application $t \mapsto \psi(\eta+t)-\psi(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $M \mapsto \psi(\eta)^{-1}M$ est linéaire, alors φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Lorsque l'on dérive la relation précédente, on a :

$\varphi'(t) = \psi(\eta)^{-1}\left(\psi'(\eta+t)-\psi'(t)\right) = \psi(\eta)^{-1}(\varphi(t+\eta)-\varphi(t)) = \psi(\eta)^{-1}(\varphi(\eta)\varphi(t)-\varphi(t)) = \psi(\eta)^{-1}(\varphi(\eta)-I_n)\varphi(t) = A\varphi(t)$, avec $A = \psi(\eta)^{-1}(\varphi(\eta)-I_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère L l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ L(M) = AM$. On a donc $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = L(\varphi(t))$.

On a donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = e^{tL}(\varphi(0)) = e^{tL}(I_n)$.

On a : $e^{tL}(I_n) = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^nL^k}{k!}\right)(I_n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^kL^k(I_n)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^kA^kI_n}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^kA^k}{k!} = e^{tA}$ (on montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ L^k(U) = A^kU$).

On a pu écrire $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^kL^k}{k!}\right)(I_n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^kL^k(I_n)}{k!}$, car l'application $g : u \mapsto u(I)$ est linéaire sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ et donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} g\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^kL^k}{k!}\right) = g\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^kL^k}{k!}\right)$, soit :

$\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^kL^k(I_n)}{k!}\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^kL^k}{k!}\right)(I_n)$.

Il existe donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = e^{tA}$.

1.2.2 Applications

a) Inégalité des accroissements finies

Théorème 1.2.2 (Inégalité des accroissements finis) *Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$.*
On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in \mathring{I},\ \|f'(x)\| \leq M$.
Alors : $\forall a,b \in I,\ \|f(b)-f(a)\| \leq M|b-a|$.

Démonstration : Soient $a,b \in \mathring{I}$. Grâce à la remarque 1.2.1, on a :
$\|f(b)-f(a)\| = \|\displaystyle\int_a^b f'(t)dt\| \leq \int_{I(a,b)}\|f'\| \leq \int_{I(a,b)} M = M|b-a|$, avec $I(a,b) = [a,b]$ si $a \leq b$ et $I(a,b) = [b,a]$ sinon.

Exemple 1.2.2 1. *Montrer que :* $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|$.

2. *Soit* U *un ouvert convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $g : U \to E$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1$, *telle qu'il existe* $K \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $\forall x \in U,\ |||dg(x)||| \leq K$ *(on rappelle que :* $dg(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$*). Montrer que* g *est* K*-lipschitzienne.*

b) Intégration d'une limite uniforme

Proposition 1.2.1 (Intégration d'une limite uniforme sur un segment) 1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_n : [a, b] \to E$ *une fonction continue. On suppose que la suite de fonctions* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonction* u*. Alors la fonction* u *est continue sur* $[a, b]$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b u_n = \int_a^b u.$

2. *Soit* $a \in I$*. Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_n : I \to E$ *continue. On suppose que la suite de fonctions* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout segment de* I *vers une fonction* u*. Alors la fonction* u *est continue sur* I *et si on pose* $U_n : x \mapsto \int_a^x u_n$ *et* $U : x \mapsto \int_a^x u$*, alors* (U_n) *converge uniformément vers* U *sur tout segment de* I*.*

Démonstration : La démonstration est identique à celle sur les suites de fonctions (chapitre 8) à valeurs dans $\mathbb{K}$, sauf que l'on remplace les valeurs absolues par des normes.

Corollaire 1.2.1 (Primitivation terme à terme sur un segment) 1. *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, soit* $f_n : [a, b] \to E$ *une fonction continue. Si* $\sum f_n$ *est une série de fonctions qui converge uniformément ou normalement sur* <u>*le segment* $[a, b]$</u>*, alors la série* $\sum \int_a^b f_n$ *converge et :* $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$

2. *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, soit* $f_n : I \to E$ *une fonction continue, avec* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Soit* $a \in I$*. On suppose que* $\sum f_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I*. Alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur* I *et :* $\forall x \in I,\ \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)dt.$

Démonstration : Calquer la preuve du chapitre 8.

Exemple 1.2.3 *Soient* $d \in \mathbb{N}^*$ *et* $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$*. On munit* $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *d'une norme* $\|.\|$ *matricielle vérifiant :* $\forall U, V \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ \|UV\| \leq \|U\|.\|V\|$ *(cela existe toujours en considérant une norme subordonnée).*

1. *Pour* R *assez grand, montrer que, pour tout*$\theta \in \mathbb{R}$*, la matrice* $(Re^{i\theta} I_d - A)$ *est inversible dans* $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *et que son inverse est la matrice* $(Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n$.

2. *Montrer que tout* R *assez grand, on a :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n (Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} d\theta = A^{n-1}.$

3. *On considère la polynôme caractéristique* $\chi_A(X) = \det(XI_d - A) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. *Montrer que pour* *R assez grand :* $\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})\chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta.$

4. *En déduire que* $\chi_A(A) = 0$.

1. *Le résultat est évident si* $A = 0$. *On suppose donc* $A \neq 0$. *Soit* $R > 1/\|A\|$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$. *On note* $z = Re^{i\theta} \neq 0$. *De plus,* $\|\frac{1}{z}A\| = \frac{1}{R}\|A\| < 1$.

   On a : $zI_d - A = z(I_d - \frac{1}{z}A)$. *On a vu dans le chapitre 7 que dans ce cas* $I_d - \frac{1}{z}A$ *est inversible et* $(I_d - \frac{1}{z}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}A\right)^n$.

   Ainsi $zI_d - A$ *est inversible d'inverse* $\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}A^n$. *On a bien pour* $R > \|A\|$ *:*

   $(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} = (Re^{i\theta})^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(Re^{i\theta})^{-n}A^n$.

2.

3.

4.

c) Problème de Cauchy pour les équations différentielles

Proposition 1.2.2 (Problème de Cauchy sous forme intégrale) *Soient $(t_0, x_0) \in I \times E$ et deux applications continues $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$. Une application φ est une solution du problème de Cauchy :*

$$(E) : x' = a(t).x + b(t) \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0$$

si et seulement si, elle satisfait l'équation intégrale :

Démonstration :

Exemple 1.2.4 1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les solutions de $X' = AX$ sont à valeurs dans un espace affine de direction $\mathrm{Im}\,(A)$.*

2. *Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, a et b deux fonctions continues et T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer les solutions T-périodiques de $x' = ax + b$.*

   L'ensemble des solutions est $\{e^F(\lambda + G),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, avec $F : t \mapsto \int_0^t a(u)du$ et $G : t \mapsto \int_0^t b(u)e^{-F(u)}du$.
   Dans le chapitre 14, on a vu que x est T périodique ssi $x(0) = x(T)$.
   Si on reprend la forme des solutions trouvée avant x est T périodique ssi
   $e^{F(0)}(\lambda + G(0)) = e^{F(T)}(\lambda + G(T))$ ce qui équivaut à $\lambda = e^{\int_0^T a}(\lambda + G(T))$, soit $(1 - e^{\int_0^T a})\lambda = e^{\int_0^T a}G(T)$.
   Ici commence une discussion.

   - *Si $\int_0^T a \neq 0$, alors $\lambda = \dfrac{e^{\int_0^T a}G(T)}{1 - e^{\int_0^T a}}$ et il n'y a qu'une seule solution T-périodique.*
   - *Si $\int_0^T a = 0$ et $G(T) = \int_0^T b(u)e^{-F(u)}du \neq 0$, il n'y a aucune solution T-périodique.*
   - *Si $\int_0^T a = 0$ et $G(T) = \int_0^T b(u)e^{-F(u)}du = 0$, toutes les solutions sont T-périodiques.*

Remarque 1.2.2 *Cette formulation a un intérêt plutôt théorique et sert par exemple à montrer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. Donnons la démonstration de ce théorème qui n'est pas exigible. Pour $(t, x) \in I \times E$, on pose : $f(t, x) = a(t).x + b(t)$. On définit par récurrence la suite de fonction $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $\varphi_0 : t \mapsto x_0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_{n+1} : t \mapsto x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s))ds$, définie sur I. Comme a est continue et la composition $(u, y) \mapsto u(y)$ de $\mathcal{L}(E) \times E$ dans E l'est aussi car on est en dimension finie, alors on montre par récurrence que toutes les fonctions φ_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*
Soit $K = [a, b]$ tel que : $t_0 \in K \subset I$. On pose $h = b - a > 0$. L'ensemble K est une partie compacte, donc les fonctions continues a et $t \mapsto f(t, x_0)$ y sont bornées. Soit $k = \sup\limits_{t\in K} |||a(t)|||$ et $M = \sup\limits_{t\in K} \|f(t, x_0)\|$. On

$a : \forall (t,x_1,x_2) \in K\times E\times E,\ \|f(t,x_2)-f(t,x_1)\| = \|a(t).(x_2-x_1)\| \leq \|\!|a(t)|\!\|.\|x_2-x_1\| \leq k\|x_2-x_1\|\ \ (*)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et on pose* $\mathcal{P}(n) : \forall t \in K,\ \|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq \dfrac{Mk^{n-1}}{n!}|t-t_0|^n$.
$\mathcal{P}(1)$ *est vérifée, car :* $\forall t \in K,\ \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| = \|\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s,x_0)ds\| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f(s,x_0)\|ds\right| \leq M|t-t_0|$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et on suppose* $\mathcal{P}(n)$. *Soit* $t \in K$. *On a :*

$$\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| = \|\int_{t_0}^{t}[f(s,\varphi_n(s)) - f(s,\varphi_{n-1}(t))]ds\| \leq \left|\int_{t_0}^{t}\|f(s,\varphi_n(s)) - f(s,\varphi_{n-1}(s))\|ds\right|.$$

Par $(*)$, *on a donc :*

$$\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leq \left|k\int_{t_0}^{t}\|\varphi(s) - \varphi_{n-1}(s)\|\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t}\frac{Mk^n}{n!}|s-t_0|^n ds\right|,$$

grâce à $\mathcal{P}(n)$.
Si on a $t \geq t_0$, *alors* $\|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)\| \leq \dfrac{Mk^n}{n!}\displaystyle\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^n ds = \dfrac{Mk^n}{n!}.\dfrac{(t-t_0)^{n+1}}{n+1} = \dfrac{Mk^n}{(n+1)!}|t-t_0|^{n+1}$.
Si on a $t \leq t_0$, *alors* $\|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)\| \leq \dfrac{Mk^n}{n!}\displaystyle\int_{t}^{t_0}(t_0-s)^n ds = \dfrac{Mk^n}{n!}.\dfrac{(t_0-t)^{n+1}}{n+1} = \dfrac{Mk^n}{(n+1)!}|t-t_0|^{n+1}$.
On a donc $\mathcal{P}(n+1)$, *ce qui achève la récurrence.*
Par conséquent, comme pour t *dans* K, *on a* $|t-t_0| \leq h$, *alors :*
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in K,\ \|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq Mh\dfrac{(kh)^{n-1}}{n!}$.
Montrons que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément. La suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si la série télescopique* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\varphi_n - \varphi_{n-1})$ *converge pour la norme* $\|.\|_{\infty,K}$. *Nous venons de voir que :*
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|\varphi_n-\varphi_{n-1}\|_{\infty,K} \leq Mh\dfrac{(kh)^{n-1}}{n!}$. *Cela prouve même la convergence normale de* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\varphi_n-\varphi_{n-1})$, *car la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} Mh\frac{(kh)^{n-1}}{n!}$ *converge vers* $\dfrac{M}{k}e^{kh}$ *si* $k \neq 0$ *et converge clairement si* $k = 0$.
Soit φ *la limite de la suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *qui est aussi continue par convergence uniforme et continuité de* φ_n.
Montrons maintenant que φ *est bien solution du problème de Cauchy initial.*
Tout d'abord, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n(t_0) = x_0$, *donc en passant à la limite :* $\varphi(t_0) = x_0$.
Soit $t \in I$. *On prend* $K = [t_0,t]$ *ou* $K = [t,t_0]$. *Par* $(*)$, *on a :*
$\forall s \in K,\ \|f(s,\varphi(s)) - f(s,\varphi_n(s))\| \leq k\|\varphi(s) - \varphi_n(s)\| \leq k\|\varphi - \varphi_n\|_{\infty,K}$. *Ainsi la suite de fonctions* $(s \mapsto f(s,\varphi_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $s \mapsto f(s,\varphi(s))$ *sur le segment* K *et donc comme toutes ces fonctions sont continues, alors* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_n(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds$.
Or on a : $\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_n(s))ds$, *donc en passant à la limite quand* n *tend vers* $+\infty$, *on a :* $\varphi(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds$. *Ceci prouve d'une part la dérivabilité de* φ *sur* I, *mais aussi que* φ *est solutions de* $x' = a(t).x + b(t)$, *grâce à la proposition précédente.*
Montrons maintenant l'unicité.
Supposons qu'il existe une fonction ψ *dérivable, telle que* $\psi(t_0) = x_0$ *et que :* $\forall t \in I,\ \psi'(t) = f(t,\psi(t))$.
Soit $t \in I$. *On pose* $K = [t_0,t]$ *ou* $K = [t,t_0]$. *Soit* $b = \displaystyle\sup_{s\in K}\|\psi(s) - x_0\|$ *(la continuité de* ψ *et le caractère compact de* K *justifiant l'existence de* b*). Grâce à la proposition précédente,* $\psi(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s,\psi(s))ds$. *En procédant comme précédemment, on montre par récurrence (ici on commence à* $n = 0$*) que :* $\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ \|\psi(t) - \varphi_n(t)\| \leq b\dfrac{(k|t-t_0|)^n}{n!}$. *Comme la série* $\displaystyle\sum \frac{(k|t-t_0|)^n}{n!}$ *converge (sa somme est* $\exp(k|t-t_0|)$*), alors :* $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{(k|t-t_0|)^n}{n!} = 0$, *puis :*

$\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(t) = \psi(t)$, *donc :* $\varphi(t) = \psi(t)$.

d) Intégration le long d'une courbe

Proposition 1.2.3 (Intégration le long d'une courbe) *On suppose* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Soient* U *un ouvert de* E, F *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé de dimension finie et* $f : U \to F$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$. *Pour toute application* $\gamma : [0,1] \to U$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $\gamma(0) = a$ *et* $\gamma(1) = b$, *on a :*

$$\int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t))dt =$$

Démonstration : Soit $\varphi : t \mapsto f(\gamma(t))$ définie sur $[0,1]$. Cette application est $\mathcal{C}^1$, par composition et la règle de la chaîne donne : $\forall t \in [0,1],\ \varphi'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t))$, puis $f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \displaystyle\int_0^1 \varphi'(t)dt$.

Remarque 1.2.3 *Si* γ *est de la forme* $t \mapsto a + tv$, *avec* $v = b - a$, *alors* $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 df(a+tv).vdt$.

1.3 Formules de Taylor

1.3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 1.3.1 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Soient* $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$ *et* $a \in I$.
Alors pour tout point $x \in I$, *on a :*

$$f(x) \ =$$

Démonstration : Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors ses fonctions coordonnées le sont aussi et donc la formule s'obtient en appliquant la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ aux fonctions coordonnées de f.

Remarque 1.3.1

1. *La quantité* $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ *est appelée reste intégrale et permet de mesurer exactement l'erreur commise lorsque l'on approche* $f(x)$ *par son polynôme de Taylor en* a.
2. *Cette formule est vraie sur* I *tout entier, c'est donc une propriété globale.*

Exemple 1.3.1 *Soit* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $f : [0; a[\to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$. *On suppose que toutes les dérivées de* f *sont positives.*

1. *Montrer que :* $\forall x \in [0; a[, \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux)du.$

   On pose $R_n(x) = x^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux)du.$
2. *Montrer que pour tout entier* n *et pour tout* x *de* $[0; a[$, *on a :* $0 \leq R_n(x) \leq f(x)$.
3. *Soient* x *et* y *tels que l'on ait* $0 \leq x < y < a$. *Montrer que l'on a :* $R_n(x) \leq \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$.
4. *En déduire que pour tout* $x \in [0; a[$, *on a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$.

Corollaire 1.3.1 (Formule de Taylor pour les polynômes) *Soit* $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}_n[X]$ *et* $a \in \mathbb{K}$. *On a :*

$$A = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X-a)^k}{k!} A^{(k)}(a) \qquad ou \qquad A(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} A^{(k)}(a).$$

Exemple 1.3.2 *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* H *un hyperplan de* $\mathbb{K}_n[X]$. *Montrer qu'il existe* $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ *non tous nuls, tels que :* $H = \{P \in \mathbb{K}_n[X],\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P^{(i)}(0) = 0\}$.

1.3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Proposition 1.3.1 (Inégalité de Taylor-Lagrange) *Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$ telle que $f^{(n+1)}$ soit bornée sur I. Alors :*

$$\forall a, b \in I, \ \left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq$$

Démonstration : • Si $a = b$, c'est clair.
• Si $a < b$, alors en reprenant la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral :

$$\left\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right\| \ \leq \ \int_a^b \left\| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right\| dt.$$

Par croissance de l'intégrale, cette dernière est majorée par $\displaystyle\int_a^b \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{(b-t)^n}{n!} dt \ = \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.
• Calcul analogue pour $a > b$ en intervertissant les bornes des intégrales majorantes.

Remarque 1.3.2 *L'inégalité de Taylor-Lagrange est une formule globale vraie sur tout l'ensemble de définition. Elle permet de majorer simplement l'erreur commise lorsque l'on approche $f(x)$ par son polynôme de Taylor en a.*

Exemple 1.3.3 *1. (a) Montrer que :* $\forall x \in [0, 1], \ \left| \operatorname{ch}(x) - 1 - \dfrac{x^2}{2} \right| \leq \dfrac{x^3 \operatorname{sh}(1)}{6}$.

(b) En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$*, avec* $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}} \right) \right) - n$*, pour* n *dans* $\mathbb{N}^*$.

2. *Soit* $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, E)$ *telle que* $\|f\|$ *et* $\|f''\|$ *soient majorées respectivement par* M_0 *et* M_2*.*

   (a) *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall h \in \mathbb{R}_+^*, \ \|f'(x)\| \leq \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$.

   (b) *En déduire que* f' *est bornée par* $\sqrt{2M_0M_2}$*.*

3. *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$*. Donner un développement asymptotique en* $1/n$ *de*

$$u_n = \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$*. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

On a : $u_n = F(1) - F(0) - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

Comme F *est de classe* $\mathcal{C}^3$*, alors grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a :*

$\forall k \in [\![1, n]\!],\ F\left(\dfrac{k-1}{n}\right) = F\left(\dfrac{k}{n}\right) - \dfrac{1}{n}F'\left(\dfrac{k}{n}\right) + \dfrac{1}{2n^2}F''\left(\dfrac{k}{n}\right) + \varepsilon_{n,k}$*, avec :*

$|\varepsilon_{n,k}| \leq \dfrac{1}{6n^3}\displaystyle\sup_{\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]} |F^{(3)}| \leq \frac{\sup_{[0,1]}|f''|}{6n^3} = \frac{M}{n^3}$.

On a donc $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right) + \varepsilon_{n,k}\right) = \frac{1}{2n} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{n,k}$.

Or $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{n,k}\right| \leq n \times \dfrac{M}{n^3} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

De plus comme f' *est continue, alors grâce aux sommes de Riemann, on a :*

$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f'(t)dt + o(1) = f(1) - f(0) + o(1)$.

Ainsi $u_n = \dfrac{f(1)-f(0)}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

1.3.3 Formule de Taylor-Young

Proposition 1.3.2 (Formule de Taylor-Young) *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I,E)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en $a \in I$, donné par :*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+o_{x\to a}((x-a)^n)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o_{x\to a}((x-a)^n).$$

Démonstration : Démontrons cela par récurrence sur n.

• Si $n=1$, alors f étant dérivable admet un développement limité à l'ordre un, ce qui donne : $f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+o(x-a)$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose le résultat au rang n.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,E)$. On pose $\psi : x \mapsto f(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (on a $n+1 \geq 1$).

On applique l'hypothèse de récurrence à f' qui est de classe $\mathcal{C}^n$, donc il existe $\beta : I \to E$ tel que $\lim\limits_{a} \beta = 0$ et :

$$\forall x \in I,\ f'(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k+1)}(a)+(x-a)^n\beta(x).$$

Autrement dit : $\forall x \in I,\ \psi'(x)=(x-a)^n\beta(x)$.

Soient $a, x \in I$ et on note $I(a,x)=[a,x]$, si $a \leq x$ et $I(a,x)=[x,a]$ sinon. Appliquons l'inégalité des accroissements finis à ψ sur le segment $[a,x]$ (sur ce compact, ψ' est continue donc bornée) :

$$\|\psi(x)-\psi(a)\| \leq |x-a|\sup_{t\in I(a,x)}\|\psi'(t)\| = |x-a|\sup_{t\in I(a,x)}\|(t-a)^n\beta(t)\| \leq |x-a|^{n+1}\sup_{t\in I(a,x)}\|\beta(t)\|.$$

Ceci donne : $\displaystyle\frac{1}{|x-a|^{n+1}}\left\|f(x)-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right\| \leq \sup_{t\in I(a,x)}\|\beta(t)\|$.

Montrons que $\displaystyle\lim_{x\to a}\sup_{t\in I(a,x)}\|\beta(t)\|=0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On a $\lim\limits_{a}\beta=0$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall t \in I,\ |t-a| \leq \alpha \Rightarrow \|\beta(t)\| \leq \varepsilon$.

Soit $x \in I$, tel que : $|x-a| \leq \alpha$. Ainsi pour t dans $I(a,x)$, on a : $|t-a| \leq \alpha$, donc $\|\beta(t)\| \leq \varepsilon$, ce qui donne $\displaystyle\sup_{t\in I(a,x)}\|\beta(t)\| \leq \varepsilon$.

On a donc montré que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow \displaystyle\sup_{t\in I(a,x)}\|\beta(t)\| \leq \varepsilon$.

Ainsi : $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{|x-a|^{n+1}}\left\|f(x)-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right\|=0$ et donc :

$\displaystyle f(x)-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)=o((x-a)^{n+1})$, d'où le résultat pour $n+1$, ce qui achève la récurrence.

Remarque 1.3.3

1. *La formule de Taylor-Young est une propriété locale, car elle donne un comportement quand x tend vers a.*
2. *Dans le cas réel, on a la formule de Taylor-Lagrange : soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que : $\displaystyle f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$.*

Soit $\displaystyle A=\frac{n!}{(b-a)^n}\left(f(b)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right)$. Nous allons montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $A=f^{(n)}(c)$.

Soit $\displaystyle \phi : x \mapsto f(b)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k-\frac{(b-x)^n}{n!}A$.

La fonction ϕ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et $\phi(a)=0$, par construction de A et $\phi(b)=0$. Grâce au théorème de Rolle il existe $c \in]a,b[$ tel que : $\phi'(c)=0$.

Or : $\forall x \in [a,b]$, $\displaystyle \phi'(x)=-f'(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x)+\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x)\right)-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}A =$
$\displaystyle -f'(x)+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x)+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}A=\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}(A-f^{(n)}(x))$, puis $A=f^{(n)}(c)$, car $\phi'(c)=0$.