À rendre pour le jeudi 11 septembre

PROBLÈME 1

Soit I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si g est une fonction bornée sur I , on note $\|g\|_{\infty, I}$ (ou simplement $\|g\|_{\infty}$) la valeur

$$\|g\|_{\infty, I} = \sup_{x \in I} |g(x)|.$$

Si I est un intervalle ouvert, on dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est à support compact dans I s'il existe $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$, tels que pour tout $x \in I \setminus [\alpha, \beta]$, $f(x) = 0$.

Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe C^∞ . On s'intéresse à des intégrales de la forme

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} f(x) dx.$$

où λ est un paramètre réel strictement positif.

Dans toute la suite on fixe $\lambda > 0$.

1. Cas d'une phase non stationnaire. On suppose dans cette question que $\varphi'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

a. On définit $L : \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$ et $M : \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$ par : pour tout $g \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$, tout $x \in [a, b]$,

$$Lg(x) = \frac{1}{i\lambda\varphi'(x)} g'(x), \quad Mg(x) = - \left(\frac{g}{i\varphi'} \right)'(x).$$

- i. Déterminer les fonctions $g \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$ telles que $Lg = g$.
- ii. Soit $g, h \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$. On suppose que h est à support compact dans $]a, b[$. Montrer que :

$$\int_a^b h(x) Lg(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_a^b g(x) Mh(x) dx.$$

b. Montrer que si f est à support compact dans $]a, b[$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante γ_N indépendante de λ telle que

$$|I(\lambda)| \leq \gamma_N \lambda^{-N}.$$

2. a. On suppose que $|\varphi'(x)| \geq 1$ pour tout $x \in [a, b]$ et que φ' est monotone sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe une constante $c_1 > 0$, indépendante de λ , φ et de a, b telle que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq c_1 \lambda^{-1}$$

Indication. On pourra écrire transformer un peu l'expression pour intégrer par parties.

b. Soit $\delta > 0$. On suppose que $|\varphi'(x)| \geq \delta$ pour tout $x \in [a, b]$ et que φ' est monotone sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq c_1 (\lambda\delta)^{-1}.$$

3. Cas où la phase peut être stationnaire. Dans toute cette question on suppose que $|\varphi''(x)| \geq 1$ pour tout $x \in [a, b]$.

a. Montrer que φ' est strictement monotone sur $[a, b]$ et qu'il existe un unique point $c \in [a, b]$ tel que $|\varphi'(c)| = \inf_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)|$.

b. Si $x \in [a, b]$, montrer que $|\varphi'(x)| \geq |x - c|$.

c. Montrer que pour tout $\delta > 0$,

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq 2c_1(\lambda\delta)^{-1} + 2\delta.$$

d. En déduire qu'il existe une constante c_2 , indépendante de λ, φ, a et b telle que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq c_2\lambda^{-1/2}.$$

e. Montrer que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} f(x) dx \right| \leq c_2\lambda^{-1/2} \left(|f(b)| + \int_a^b |f'(x)| dx \right).$$

PROBLÈME 2

1. Montrer :

$$\forall t \in]0, +\infty[, t \ln(t) \geq -\frac{1}{e} \quad (1)$$

2. Soit ψ une bijection de l'intervalle ouvert I sur l'intervalle ouvert J . Si ψ est de classe C^1 sur I , donner une condition nécessaire et suffisante pour que ψ^{-1} soit C^1 de J sur I . Dans ce cas, rappeler l'expression de la dérivée de ψ^{-1} .

On note H l'ensemble des fonctions f strictement positives, continues sur $\mathbb{R}$, pour lesquelles il existe $\rho > 0$ (dépendant de f) tel que, pour tout réel x :

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{\rho} \exp\left(\left(\frac{1}{2} - \rho\right)x^2\right) \quad (A)$$

On note H_0 , le sous-ensemble de H des fonctions f telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$$

Dans tout le reste de l'énoncé, f est un élément de H_0

3. Écrire une fonction `rectangle(u, a, b, n)` qui détermine une valeur approchée de $\int_a^b u(t)dt$ par application de la méthode des rectangles sur l'intervalle $[a, b]$, avec une subdivision en n intervalles. On supposera que u représente une fonction définie et continue sur $[a, b]$.

Écrire une fonction `I(A, n)` qui renvoie à l'aide de la fonction `rectangle(u, a, b, n)` une valeur approchée de $\int_{-A}^A e^{-u^2/2} du$.

Évaluer à l'aide de PYTHON l'erreur que l'on commet en approchant $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du$, par la valeur approchée de $\int_{-5}^5 e^{-u^2/2} du$ pour $n = 1000$.

4. Soit F_f définie par

$$F_f(x) = \int_{-\infty}^x f(u)e^{-u^2/2} du$$

En particulier,

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

Montrer que F_f est convergente qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$ et que F_f^{-1} est C^1 sur $]0, \sqrt{2\pi}[$.

5. Montrer qu'il existe une unique fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x , on ait

$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

6. Montrer que φ est monotone et que φ est une bijection C^1 de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et φ^{-1} est C^1 sur $\mathbb{R}$.

7. Pour tout réel x , calculer

$$\ln(\varphi'(x)) + \ln(f(\varphi(x))) - \frac{1}{2}\varphi(x)^2$$

et

$$\ln((\varphi^{-1})'(x)) + \ln(f(x)) - \frac{1}{2}\varphi^{-1}(x)^2$$

8. Soit h une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2} du$ converge.

Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2} du$ converge puis prouver l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2} du$$

9. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $x \geq A$, on ait :

$$\int_x^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du \geq \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2}$$

10. Montrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout réel $|u| \geq B$, on ait :

$$|\varphi(u)| \leq e^{(|u|+1)^2/4}$$

11. Déterminer une primitive de la fonction

$$u \mapsto (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}$$

12. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2} du$$

On introduit les notations suivantes :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \ln(f(u))e^{-u^2/2} du$$

$$\Phi(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2} du$$

13. Justifier la convergence de ces deux intégrales.

14. Montrer l'identité :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2} du.$$

15. Montrer l'égalité suivante :

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u)))e^{-u^2/2} du. \quad (1)$$

16. Quelle est la relation d'ordre entre $\Phi(f)$ et $E(f)$?

17. Déterminer les fonctions telles que $E(f) = \Phi(f)$.