À rendre pour le jeudi 2 octobre

EXERCICE

Partie I

Soient $A \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in]1, +\infty[$. On suppose que la suite (u_n) de réels strictement positifs converge vers 0 et vérifie : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_n^{1-\alpha} - u_{n+1}u_n^{-\alpha}\right) = A$.

1. Montrer que $A > 0$.

2. Étudier la limite de la suite (x_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}$.

3. En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $u_n \sim_{n\to+\infty} Kn^{1/(1-\alpha)}$.
En déduire la nature de la série de terme u_n suivant les valeurs de α.

4. Soit $v_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1 + argch(1 + v_n)}$, avec :
$\forall x \in [1, +\infty[,\ argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Étudier la nature de la série de terme v_n.

5. Définir en PYTHON `v(n,a)` qui à $(n, a) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}_+^*$ renvoie v_n de l'exemple précédent avec $v_0 = a$. En étudiant les 500 premiers termes de la suite $(v_{n+1}^{1-\alpha} - v_n^{1-\alpha})$, pour certaines valeurs de α et $v_0 = 1$, trouver pour quelles valeurs la α cette suite semble converger vers une limite non nulle.

Partie II

f désigne dans cette partie une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et (u_n) la suite réelle définie par $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que si la série de terme u_n converge alors $f(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Dans toute cette partie on supposera désormais que } f(0) = 0}$$

2. Si $|f'(0)| < 1$ démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u_0 \in]0, \alpha[$, la série de terme u_n converge.

3. Si $|f'(0)| > 1$, démontrer que la série converge si et seulement si, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p = 0$.

4. On suppose dans cette question que $f'(0) = -1$.
Etudier la convergence de la série de terme u_n lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :
(1)$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_{n+1}| \leq |u_n|$.
(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
En déduire la convergence de la série de terme x_n définie par $x_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = -\sin(x_n)$.

5. On suppose dans cette question que $f'(0) = 1$, que la suite (u_n) est à termes strictement positifs et converge vers 0.

- ***a.*** On considère deux réels p et q tels que $p > q > 0$. Démontrer que si la série de terme u_n^q converge, il en est de même de la série de terme u_n^p.
- ***b.*** Soit (x_n) une suite décroissante de réels strictement positifs qui converge vers 0. Etudier la nature de la série de terme $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} - 1$.

  En déduire la nature de la série de terme v_n où $v_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\operatorname{ch} v_n}$

c. Soient un réel $\alpha > 1$ et $a \in]0, +\infty[$. On suppose que $\lim\limits_{x \to 0^+} (x - f(x))x^{-\alpha} = a$.

Etudier suivant les valeurs de α et de p la convergence de la série de terme u_n^p.

Si f est la fonction Arctan, étudier la nature de la série de terme u_n^2.

d. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que f est k fois dérivable en 0 et que : $\forall p \in \{2, \ldots, k-1\},\ f^{(p)}(0) = 0$ et $f^{(k)}(0) < 0$.

Quelle est la nature de la série de terme u_n ?

PROBLÈME

Si z est un nombre complexe, on note $\mathrm{Re}(z)$ sa partie réelle.
On considère une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, une suite strictement croissante de réels positifs telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Pour tout entier naturel non nul, on définit sur $\mathbb{C}$ la fonction u_n par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ u_n(z) = a_n e^{-\lambda_n z}.$$

On note

$$I_C = \left\{ x \in \mathbb{R},\ \sum_{n\geq 1} u_n(x) \text{ converge} \right\} \quad \text{et} \quad I_A = \left\{ x \in \mathbb{R},\ \sum_{n\geq 1} |u_n(x)| \text{ converge} \right\}.$$

Si ces deux ensembles sont non vides et minorés, on pose dans tout le problème :

$$\gamma = \inf(I_C) \quad \text{et} \quad \delta = \inf(I_A).$$

Soit φ la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi : t \mapsto \sup\{1 - |t-1|, 0\}$.

On suppose que $(r_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels telle que :

$$\forall n \geq 1,\ 0 < r_n < \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{2}.$$

Pour tout t de $\mathbb{R}$, on pose : $g(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n} \varphi\left(\frac{t - \lambda_n}{r_n}\right)$.

Partie I : Préliminaires

1. Représenter graphiquement la fonction φ et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt$. Définit la fonction φ à l'aide de PYTHON (on définira φ sans utiliser les fonctions sup et valeur absolue).
2. **a.** Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que sur $[0, A]$, la fonction g est en fait une somme finie.
   b. En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   c. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_{\lambda_p}^{\lambda_{p+1}} g(t)dt = a_p$.
3. Soit $x \in]-2, +\infty[$. Soit $\psi : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^{x+1}(t+1)}$.
   a. Montrer que ψ est décroissante à partir d'un certain rang.
   b. Pour $x \geq 0$, montrer que ψ est toujours décroissante sur $[e, +\infty[$.
4. On pose $v_n = \dfrac{\ln(n)}{n^\mu}$.
   a. Montrer que $\displaystyle\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.
   b. En déduire que $\sum v_n$ converge si et seulement si $\mu > 1$.
5. Montrer que I_A est un intervalle.

Partie II : Exemples

Dans cette partie on choisit $\lambda_n = \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$.

1. Déterminer γ, δ, I_A et I_C dans les cas suivants :

- ***a.*** $a_n = 1$ pour tout $n \geq 1$.
- ***b.*** $a_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$.

2. Dans le cas où $a_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$, on pose $U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} U(x) = 0$.

3. On suppose dans cette question que I_A et I_C sont non vides et minorés.

- ***a.*** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \delta$. Montrer que $\sum\limits_{n \geq 1} u_n(z)$ est absolument convergente.
- ***b.*** Montrer que : $\gamma \leq \delta \leq \gamma + 1$.
- ***c.*** Donner un exemple pour lequel $\gamma = \delta$.
- ***d.*** Donner un exemple pour lequel $\gamma + 1 = \delta$.

4. En choisissant pour $n \geq 2$,

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right),$$

déterminer γ et δ.

Partie III : cas général

Dans cette partie, on suppose que I_C est non vide et minoré.

1. Si $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels positifs, montrer que, pour tout z de C tel que $\mathrm{Re}(z) > \gamma$, la série $\sum\limits_{n \geq 1} u_n(z)$ converge.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue. On suppose qu'il existe un réel α tel que la fonction F définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F(t) = \int_0^t f(x) e^{-\alpha x} dx$$

admette une limite finie en $+\infty$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \alpha$.

- ***a.*** Montrer que $t \mapsto F(t) e^{(\alpha - z)t}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- ***b.*** En déduire que la suite $\left(\displaystyle\int_0^{\lambda_n} f(x) e^{-zx} dx\right)_{n \geq 1}$ est convergente.
- ***c.*** On pose : $v_n(z) = \displaystyle\int_{\lambda_n}^{\lambda_n + 1} g(x) e^{-zx} dx$ et on suppose que la suite $(r_n)_{n \geq 1}$ est choisie de telle sorte que la série $\sum\limits_{n \geq 1} (v_n(z) - u_n(z))$ soit convergente (on admet qu'un tel choix est possible).

  Déduire des questions précédentes et du préliminaire que la série $\sum\limits_{n \geq 1} u_n(z)$ converge pour tout z de $\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \gamma$.