À rendre pour le mardi 14 octobre

$\mathbb{R}$ est le corps des réels, n un entier naturel donné, $n \geq 2$. On note $\mathcal{M}_n$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et $\mathcal{GL}_n$ le groupe des matrices carrées d'ordre n inversibles. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n$.
Pour $i, j \in \{1, ..., n\}$, on définit l'élément $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n$ comme étant la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la i-ième ligne et j-ième colonne valant 1.
Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on pose $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$.
On appelle matrice de transvection toute matrice de type $I_n + \lambda E_{ij}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i \neq j$.

Partie I

1. ***a.*** Calculer les produits $E_{i,j}E_{h,k}$ pour $i, j, h, k \in \{1, ..., n\}$, le résultat devra être prouvé.
b. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, i, j \in \{1, ..., n\}$, avec $i \neq j$. Calculer $\det(I_n + \lambda E_{i,j})$.
c. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, i, j \in \{1, ..., n\}$, avec $i \neq j$. Montrer que $I_n + \lambda E_{i,j}$ est inversible et déterminer son inverse.
d. Écrire en PYTHON une fonction qui à `(a,i,j,n)` renvoie la matrice de transvection $I_n + aE_{i,j}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n$.
a. Montrer que l'addition à une ligne de A d'un vecteur proportionnel à une autre ligne peut se faire en multipliant A à gauche par une matrice de transvection.
b. Établir un résultat analogue sur les colonnes.
c. Écrire une fonction PYTHON `L(A,i,j,a)` qui à une matrice A renvoie cette matrice après l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + aL_j$.
De même écrire une fonction PYTHON `C(A,i,j,a)` qui à une matrice A renvoie cette matrice après l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + aC_j$.

3. ***a.*** Soit $A \in \mathcal{M}_n$ de coefficients $a_{i,j}$. On suppose que la première ligne de A ou sa première colonne possède un élément non nul.
Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice de coefficients $b_{i,j}$ telle que $b_{1,1} = 1$ et $b_{i,1} = b_{1,i} = 0$ pour $2 \leq i \leq n$.
On pourra envisager les cas suivants (on précisera les opérations élémentaires effectuées sur la matrice) :
i. $a_{1,1} = 1$;
ii. $\exists i > 1, a_{i,1} \neq 0$ ou $a_{1,i} \neq 0$;
iii. $a_{1,1} \neq 1$ et $\forall i > 1, a_{1,i} = a_{i,1} = 0$.
b. Écrire une fonction PYTHON qui à une matrice A renvoie cette matrice à laquelle on a appliqué des opérations élémentaires pour obtenir la matrice B de la question précédente. On pourra utiliser `L(A,i,j,a)` et `C(A,i,j,a)` programmées précédemment.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ et r son rang, supposé strictement positif.
Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice diagonale de coefficients $b_{i,j}$ telle que :
i. $b_{i,i} = 1$ si $1 \leq i < r$;
ii. $b_{i,i} = 0$ si $r < i \leq n$;
iii. $b_{r,r} = d$ avec $d = 1$ si $r < n$ et $d = \det A$ si $r = n$.
Faire une démonstration par récurrence.

5. Montrer que le groupe des matrices carrées d'ordre n de déterminant égal à 1 est engendré par les matrices de transvection.

6. On suppose dans cette question seulement que $n \geq 3$. Soit $f : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$, telle que :

i. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n,\ f(AB) = f(A)f(B)$;

ii. Pour toute matrice diagonale A, $f(A)$ est égal au produit des coefficients de la diagonale.

a. Montrer que tout matrice $I_n + aE_{\alpha,\beta}, \alpha \neq \beta$, peut s'écrire sous la forme : $I_n + aE_{\alpha,\beta} = (I_n + \lambda E_{i,j})(I_n + \mu E_{h,k})(I_n + \lambda E_{i,j})^{-1}(I_n + \mu E_{h,k})^{-1}$, expression dans laquelle on précisera les valeurs de λ, μ, i, j, h, k, avec $i \neq j, h \neq k$.

b. Calculer $f(A)$ si A est une matrice de transvection.

c. Calculer $f(A)$ si A est un élément quelconque de $\mathcal{M}_n$.

Partie II

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. On note $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note e_i^* la forme linéaire définie par : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$. Ainsi la famille $(e_1^*, ..., e_n^*)$ est appelée base duale de $(e_1, ..., e_n)$.
On note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E, $\mathcal{GL}(E)$ le groupe de ses automorphismes, Id l'endomorphisme identité.
On appelle automorphisme d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$ toute application A, linéaire et bijective de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$, qui de plus vérifie : $\forall u, v \in \mathcal{L}(E), A(u \circ v) = A(u) \circ A(v)$ et $A(Id) = Id$.
On note $\mathcal{A}ut(E)$ le groupe (pour la composition des applications) des automorphismes de $\mathcal{L}(E)$.
Soit $g \in \mathcal{GL}(E)$, on définit $A_g : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E), u \mapsto A_g(u) = g \circ u \circ g^{-1}$. On dit que A_g est l'automorphisme intérieur défini par g.

1. Montrer que l'application $\chi : g \mapsto A_g$ est un morphisme de groupe de $\mathcal{GL}(E)$ vers $\mathcal{A}ut(E)$. Cette application χ est-elle injective ?

2. **a.** Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout x de E, la famille $(x, g(x))$ est liée. Montrer que g est une homothétie.

b. En déduire le noyau de χ.

3. Pour $(\varphi, x) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \times E$, on définit une application $u_{\varphi,x} : E \to E, y \mapsto \varphi(y)x$.

a. Montrer que $u_{\varphi,x}$ est un endomorphisme de E, préciser son image et son noyau.

b. À quelle condition nécessaire et suffisante sur (φ, x) $u_{\varphi,x}$ est-il un projecteur non nul ?

4. Dans la suite, pour $i, j \in \{1, ..., n\}$, on notera $u_{i,j}$ l'application $u_{e_j^*, e_i}$.

a. Pour $i, j, h, k \in \{1, ..., n\}$, calculer $u_{i,j} \circ u_{h,k}$.

b. Que peut-on dire de la famille $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$?

c. Montrer que $(e_1^*, ..., e_n^*)$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et que : $\forall y \in E,\ y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k^*(y) e_k$.

5. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs non nuls de E.

a. Démontrer que la relation $\leq$ définie sur $\mathcal{P}$ par :
$\forall p, q \in \mathcal{P}, (p \leq q) \iff (p = p \circ q = q \circ p)$
est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$. Est-ce une relation d'ordre totale ?

b. On appelle élément minimal de $\mathcal{P}$ pour $\leq$ tout élément $p \in \mathcal{P}$ tel que :
$\forall q \in \mathcal{P}, q \leq p \Rightarrow q = p$.
Etablir l'équivalence des énoncés suivants :

i. p est un projecteur de rang 1.

ii. p est un projecteur minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\leq$.

iii. $\exists (\varphi, x) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \times E$ tel que $p = u_{\varphi,x}$ et $\varphi(x) = 1$.

6. Soit A un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

a. Que peut-on dire de $A(p)$ si $p \in \mathcal{P}$?

b. Que peut-on dire de $A(p)$ si $p \in \mathcal{P}$ est un élément minimal pour $\leq$?

c. En déduire l'existence d'une famille $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ de vecteurs de E, et une famille $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de formes linéaires sur E, telles que :
i) $\forall i \in \{1, ..., n\}, \varphi_i(\varepsilon_i) = 1$; ii) $\forall i \in \{1, ..., n\}, A(u_{i,i}) = u_{\varphi_i, \varepsilon_i}$.

d. Calculer $\varphi_i(\varepsilon_j)$ pour $i, j \in \{1, ..., n\}$.
Que peut-on en déduire pour les familles $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ et $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$?

7. Soient $i, j \in \{1, ..., n\}$.

a. Pour $k \in \{1, ..., n\}, k \neq j$, calculer $A(u_{i,j}) \circ u_{\varphi_k, \varepsilon_k}$.
En déduire le rang et le noyau de $A(u_{i,j})$.

b. Calculer $A(u_{i,j}) \circ A(u_{j,i})$. En déduire l'image de $A(u_{i,j})$.

c. Montrer qu'il existe un réel non nul $\lambda_{i,j}$ tel que $A(u_{i,j}) = \lambda_{i,j} u_{\varphi_j, \varepsilon_i}$.

8. ***a.*** Montrer que pour $i, j, k \in \{1, ..., n\}$, $\lambda_{i,j}\lambda_{j,k} = \lambda_{i,k}$.

b. En déduire : $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, $\lambda_{i,j} = \dfrac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}}$.

9. ***a.*** Montrer qu'il existe une base $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de E, dont la base duale est notée $(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*)$, telle que $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, $A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*, \alpha_i}$.

b. Montrer qu'il existe un élément $g \in \mathcal{GL}(E)$ tel que : $\forall i, j \in \{1, ..., n\}, A(u_{i,j}) = g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}$.

c. Conclure.