À rendre pour le jeudi 6 novembre

On rappelle qu'une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bornée par un réel $K>0$ si la fonction $|\varphi|$ est majorée par K :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq K.$$

Préliminaire

1. Soit m un entier supérieur ou égal à 1. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre m à l'origine de la fonction $(e^x-1)^m$, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}k^j = \begin{cases} 0 \text{ si } j \text{ est un entier entre } 1 \text{ et } m-1 \\ m! \text{ si } j=m \end{cases}$$

2. Prouver que si (u_k) est une suite croissante de réels strictement positifs et k, n des entiers tels que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$(u_1u_2\ldots u_k)^n \leq (u_1u_2\ldots u_n)^k.$$

Partie I -

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_2.

- ***a.*** En écrivant, pour $h>0$, l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$

- ***b.*** En déduire que f' est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$.

2.

- ***a.*** Montrer de même que, si f est de classe $\mathcal{C}^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que f et $f^{(3)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_3, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}\left(9M_0^2M_3\right)^{1/3}.$$

- ***b.*** f'' est-elle également bornée sur $\mathbb{R}$?

Dans toute la suite du problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie II -

Soit f une fonction, non constante, de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_n.

1. En utilisant la question 1) du préliminaire ainsi que l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à la fonction f entre les valeurs x et $x+h$ pour $h=1,2,\ldots,n-1$, montrer que la fonction $f^{(n-1)}$ est, elle aussi, bornée sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que toutes les dérivées $f^{(k)}$ sont bornées pour $0 \leq k \leq n$. On note alors $M_k = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|f^{(k)}(x)\right|$.

3.

- ***a.*** Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a $M_k>0$.
- ***b.*** En utilisant la suite finie $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ avec $u_k = 2^{k-1}\dfrac{M_k}{M_{k-1}}$, en déduire que pour tout entier k entre 0 et n, on a :

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}.$$

Est-ce la meilleure majoration possible ?

Partie III -

E désigne l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x+1)+f(x)=0$ pour tout réel x. On admettra -c'est évident- que ce sont des sous-espaces vectoriels réels de l'espace de toutes les fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour une fonction f bornée sur $\mathbb{R}$, on note : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

1. Démontrer que pour toute fonction f dans E, il existe g unique dans E telle que, en tout point x de $\mathbb{R}$, on a $g'(x)=f(x)$. On note alors $g=T(f)$ ou $g=Tf$ et l'on définit ainsi une application T de E dans E.

2. On considère la fonction φ_1 de E telle que :

$$\varphi_1(x) = x - 1/2 \text{ si } x \in [0,1].$$

On pose $T^0 = Id_E$, $T^1 = T$ et si $k \geq 2$, $T^k = T\circ T^{k-1}$, puis pour $k\geq 1$, $\varphi_k = T^{k-1}(\varphi_1)$.

a. Déterminer et représenter graphiquement sur le segment $[0,2]$ les fonctions φ_k pour $k=1,2,3,4$. Dans toute la suite, on notera $\lambda_k = \|\varphi_k\|_\infty$.

b. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\varphi_k(-x) = (-1)^{k+1}\varphi_k(x) \text{ et } \varphi_k(1-x) = (-1)^k\varphi_k(x).$$

c. Montrer que, pour $k\geq 1$

$$\lambda_{2k} = (-1)^k\varphi_{2k}(1/2) \text{ et } \lambda_{2k-1} = (-1)^k\varphi_{2k-1}(0).$$

3.

a. Soit $f\in E$. Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, 2Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt.$$

b. En déduire que, pour tout $f\in E$, on a $2\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

4. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f de E vérifiant $\|f\|_\infty = 1$ et telle que :

$$\|Tf\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

5. Soit maintenant p un entier naturel non nul et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x+2p)=f(x)$ pour tout réel x, avec $n\geq 1$.

a. i) Montrer que si f a q zéros distincts sur $[0,2p[$, alors f' a au moins q zéros distincts sur $[0,2p[$.

ii) Montrer que si f et f' ont exactement q zéros distincts sur $[0,2p[$, alors elles n'ont aucun zéro commun.

b. Pour tout réel ν tel que $0<\nu<1$ et tout réel ρ, on définit la fonction $\ell : x\mapsto \varphi_n(x) - \nu f(x+\rho)$.

i) On suppose que $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leq 1$. Montrer que $\ell^{(n-1)}$ s'annule au plus $2p$ fois sur $[0,2p[$.

ii) On suppose que $\|f\|_\infty \leq \lambda_n$. Montrer que ℓ s'annule au moins $2p$ fois sur $[0,2p[$.

iii) En déduire que, si $\|f\|_\infty \leq \lambda_n$ et $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leq 1$, les $\ell^{(k)}$ pour $k=1,2,\ldots,n-1$ ont exactement $2p$ zéros sur l'intervalle $[0,2p[$.

c. On suppose f non constante.

i) Montrer que l'on peut trouver α et β dans $[0,2p[$ tels que :

$$|f'(\alpha)| = \|f'\|_\infty,\ \varphi_n'(\beta) = \frac{\lambda_{n-1}}{\|f'\|_\infty} f'(\alpha).$$

On pose alors $h(x) = \varphi_n(x) - \dfrac{\lambda_{n-1} f(x+\alpha-\beta)}{\|f'\|_\infty}$.

ii) Ici on suppose $n\geq 3$. Vérifier que $h'(\beta) = h''(\beta) = 0$.

iii) En déduire que :

$$\left(\|f\|_\infty \leq \lambda_n \text{ et } \left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leq 1\right) \Rightarrow \left(\|f'\|_\infty \leq \lambda_{n-1}\right).$$

iv) Montrer que cette dernière implication est encore vraie pour $n=2$.

6. Montrer qu'il existe une fonction ω de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ valant 1 sur le segment $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ et 0 en dehors du segment $[-1,1]$ (on pourra utiliser la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin^n(t)\,dt$ sur le segment $[0,\pi]$).

7. Soit maintenant f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ et pour laquelle :

$$\|f\|_\infty \leq \lambda_n \text{ et } \left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leq 1.$$

Soit α un réel de l'intervalle $[0,1[$. Pour tout entier naturel p non nul, on note f_p la fonction de période $2p$ telle que :

$$f_p(x) = \alpha f(x)\omega(x/p) \text{ pour } |x| \leq p.$$

a. Montrer que $f_p^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que l'on a, pour p assez grand,

$$\|f_p\|_\infty \leq \lambda_n \text{ et } \left\|f_p^{(n)}\right\|_\infty \leq 1.$$

b. En déduire que l'on a encore $\|f'\|_\infty \leq \lambda_{n-1}$.

8. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout entier k compris entre 0 et n, $f^{(k)}$ est bornée et que l'on a :

$$\left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leq \|f\|_\infty^{1-k/n} \left\|f^{(n)}\right\|_\infty^{k/n} \frac{\lambda_{n-k}}{\lambda_n^{1-k/n}}.$$

(On pourra utiliser une fonction du type $x \mapsto af(bx)$.)

Partie IV -

1. On définit, pour p entier supérieur ou égal à 2, la fonction ψ_p de E, affine sur $\left[0,\frac{1}{p}\right]$, $\left[\frac{1}{p},1-\frac{1}{p}\right]$ et $\left[1-\frac{1}{p},1\right]$ et vérifiant :

$$\psi_p(0) = \psi_p(1) = 0,\ \psi_p\left(\frac{1}{p}\right) = \psi_p\left(1-\frac{1}{p}\right) = 1.$$

En utilisant le **III.3.**, montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\lim_{p\to+\infty} \|T^n(\psi_p)\|_\infty = \lambda_n.$$

2. En déduire que l'inégalité du **III.8.** ne peut être améliorée.