2025-2026

#### Semaine 12 : du 5 janvier au 9 janvier

Sauf mention contraire, tout est à savoir.

## Séries entières

### Rayon de convergence

- Lemme d'Abel.
- Le rayon de convergence est la borne supérieure dans  $\overline{\mathbb{R}}$  de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite  $(a_n r^n)$  est bornée; le rayon de convergence est la borne supérieure dans  $\overline{\mathbb{R}}$  de l'ensemble des réels positifs r tels que la série  $\sum a_n r^n$  converge (ou converge absolument);
- Disque ouvert et intervalle ouvert de convergence.
- Fonctions décomposables en série entière.
- Rayon de convergence et opérations sur les séries entières : somme, produit (produit de Cauchy),  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n a_n z^n$  ont le même rayon de convergence (tout comme  $\sum a_n z^n$  et  $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ ).
- Méthodes de détermination d'un rayon de convergence dans l'ordre :
  - Règle de D'Alembert;
  - Si  $a_n = O_{+\infty}(b_n)$ , alors  $R_a \ge R_b$  et si  $a_n \sim_{+\infty} b_n$  alors  $R_a = R_b$ ;
  - Utilisation d'inégalités à l'aide de la définition avec la borne supérieure.

## Régularité de la somme

- CVN d'une série entière ; continuité sur l'intervalle ouvert de convergence.
- Continuité sur le disque ouvert de convergence.
- Théorème d'Abel radial.
- Dérivations des séries entières (la primitivation des séries entières n'est plus au programme, donc il faut la justifier).
- Caractère  $\mathcal{C}^{\infty}$  des séries entières ; expression des coefficients à l'aide des dérivées successives de la somme, unicité du DSE.
- Série de Taylor d'une fonction  $\mathcal{C}^{\infty}$  et condition sur le reste intégrale pour qu'une fonction  $\mathcal{C}^{\infty}$  soit DSE.

#### DSE des fonctions usuelles

- Ils ont tous été prouvés :  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\cot$ ,  $\sinh$ ,  $\arctan$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$ ,  $x \mapsto -\ln(1-x)$ ,  $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$ .
- Sur  $\mathbb{C}$ , DSE de exp et  $z \mapsto \frac{1}{1-z}$  sur le disque unité ouvert.
- Méthode pour décomposer une fonction en série entière (dans l'ordre) : opérations (somme et produit), changement de variable, dérivation, intégration, équation différentielle et formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale.
- Méthodes pour reconnaître un DSE : opérations (somme et produit), changement de variable, dérivation, intégration.

# BANQUE CCP

19,20,21, 22, 24, 51