À rendre pour le jeudi 27 novembre

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, de dimension finie ou infinie, muni de la norme $\|.\|_E$. On appelle opérateur sur E tout endomorphisme T de E dans E tel que

$$\exists M \geq 0/\ \forall f \in E,\ \|T(f)\|_E \leq M\|f\|_E \tag{1}$$

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs sur E.

L'objectif de ce problème est d'étudier différents exemples ou classes de tels opérateurs dans le cadre de la dimension infinie.
On appelle respectivement :

(i) spectre de $T \in \mathcal{L}(E)$ l'ensemble des réels λ tel que $T - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif. On note $\sigma(T)$ l'ensemble de ces réels.

(ii) spectre ponctuel de $T \in \mathcal{L}(E)$ l'ensemble des réels λ tel que $T - \lambda Id_E$ n'est pas injectif. On note $\sigma_p(T)$ l'ensemble de ces réels.

Les quatre parties sont indépendantes.

Partie 1. Un premier exemple d'opérateur.

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$:

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

On note T l'application définie sur E telle que :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0, 1],\ T(f)(x) = xf\left(\frac{x}{2}\right)$$

a) i. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.
   ii. Écrire en PYTHON une fonction qui prend en argument une fonction f et renvoie la fonction $T(f)$.

b) Calculer la valeur minimale possible pour la constante M de la relation (1).

c) Déterminer $\mathrm{Ker}\,(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.

On se place à présent dans E muni de la norme $\|.\|_2$:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\, dx}$$

d) Reprendre la question $a)$ i. avec cette nouvelle norme pour E.

e) Reprendre la question $b)$ avec cette nouvelle norme pour E. Pour cela, on pourra considérer la famille $(f_n)_{n\geq 2}$ d'éléments de E telle que :
(i) f_n est affine par morceaux,
(ii) $f_n(0) = f_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = f_n(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}) = f_n(1) = 0$ et $f_n(\frac{1}{2}) = 1$.

Partie 2. Un premier exemple de calcul de spectres.

Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$, l'espace vectoriel des suites réelles de carré sommable :

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$$

On note S, respectivement V, l'application de décalage à gauche : $(Su)_n = u_{n-1}$ si $n \geq 1$ et $(Su)_0 = 0$, respectivement à droite : $(Vu)_n = u_{n+1}$ si $n \geq 0$ dans $H = \ell^2(\mathbb{N})$.

a) Montrer que S et V appartiennent à $\mathcal{L}(H)$.

b) Calculer le spectre ponctuel de S et V.

On se place à présent dans l'espace des suites réelles bornées $F = \ell^\infty(\mathbb{N})$ muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

c) Reprendre la question *a)* pour les applications S et V dans ce nouvel espace F.

d) Reprendre la question *b)* pour les applications S et V dans F.

e) Calculer le spectre de S et V dans F.

Partie 3. Un second exemple de calcul de spectre ponctuel.

On note K la fonction définie de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$$K(s,t) = (1-s)t \ \text{ si } \ 0 \leq t \leq s \leq 1 \ \text{ et } \ K(s,t) = (1-t)s \ \text{ sinon}$$

On note T l'application définie sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_2$ définie en partie 1, par la relation

$$\forall f \in E, \ \forall s \in [0,1], \ T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)\, dt$$

a) Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.

b) Soit $f \in E$. En décomposant $T(f)$ en deux intégrales, montrer que $T(f)$ est une fonction C^2 et exprimer $(T(f))'$ puis montrer que $(T(f))'' = -f$.

c) Montrer que T est injectif.

d) Montrer que si $\lambda \in \sigma_p(T)$ et $f \in \mathrm{Ker}\,(T - \lambda Id)$ alors $f \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ et vérifie l'équation

$$\lambda f'' + f = 0$$

avec les conditions $f(0) = f(1) = 0$.

e) En déduire $\sigma_p(T)$. Calculer les sous-espaces propres associés $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(T - \lambda Id)$ à chaque élément $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Partie 4. Une classe particulière d'opérateurs.

On rappelle qu'un espace préhilbertien H est un espace vectoriel normé dont la norme dérive d'un produit scalaire noté $< .,. >$. On appelle base hilbertienne de H toute famille $B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :
(i) la famille est orthonormale : pour tous $i, j \in \ \mathbb{N}$, $< b_i, b_j >= 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

(ii) tout élement x de H peut s'écrire $x = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} < x, b_i > b_i$ c'est à dire que

$$\lim_{N\to+\infty} \|x - \sum_{i=0}^{N} < x, b_i > b_i\| = 0$$

a) Montrer que si $B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H, alors

$$\forall x \in H,\ \|x\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} | < x, b_i > |^2$$

b) Montrer que $H = \ell^2(\mathbb{N})$ muni de la norme $\|.\|_2$ définie dans la partie 2 est un espace préhilbertien pour le produit scalaire

$$< u, v >= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

(on justifiera qu'il s'agit bien d'un produit scalaire) puis déterminer une base hilbertienne de H.

Dans toute la suite, H désigne l'espace préhilbertien $\ell^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire précédent.

c) Soit T un opérateur de H. On admettra l'existence et l'unicité d'un opérateur $\tilde{T} \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$\forall (x, y) \in H^2,\ < T(x), y >=< x, \tilde{T}(y) >$$

Soient $B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $C = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux bases hilbertiennes de H telles que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2 < +\infty$$

Montrer que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \|\tilde{T}(c_i)\|^2$$

d) Soit $B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H et $T \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que la quantité (éventuellement infinie)

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2$$

ne dépend pas de la base B. On note

$$\|T\|_2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2$$

et on pose

$$\mathcal{L}^2(H) = \{T \in \mathcal{L}(H),\ \|T\|_2 < +\infty\}$$

e) Montrer que les opérateurs S et V définis dans la partie 2 ne sont pas dans $\mathcal{L}^2(H)$. Donner un exemple d'opérateur non nul dans $\mathcal{L}^2(H)$.

f) Montrer que $\mathcal{L}^2(H)$ possède une structure d'espace vectoriel.

g) Soient L et U dans $\mathcal{L}^2(H)$ et $B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Montrer que la quantité

$$\sum_{i=0}^{+\infty} < L(b_i), U(b_i) >$$

est finie, indépendante de la base B choisie et définit un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(H)$.

h) On considère L et U deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$. Montrer que si $L \in \mathcal{L}^2(H)$, alors il en est de même pour UL.

i) Que se passe-t-il pour UL en supposant cette fois $U \in \mathcal{L}^2(H)$?