À rendre pour le mardi 9 décembre

Attribution d'une valeur à des séries divergentes

Le 23 février 1913 Srinivasa Ramanujan écrivit une lettre au mathématicien Godfrey Hardy dans laquelle il présenta une théorie selon laquelle la somme infinie $1+2+\cdots+n+\cdots$ vaut $-\dfrac{1}{12}$. S'en est suivi tout un ensemble de recherches sur ce sujet...
L'objectif de ce problème est de présenter quelques situations où l'on attribue une valeur finie à "une somme infinie". On s'interesse en particulier au cas de la série de terme général n. Dans la première partie sont présentées deux situations qui dans les deux cas font apparaître la valeur $-\dfrac{1}{12}$, ce qui montre que cette valeur ne semble pas être fortuite. La deuxième partie traite plus particulièrement de la façon dont Ramunajan a étudié les sommes infinies en s'appuyant sur la formule de Euler-Maclaurin. La valeur qu'il octroie à ces sommes étant en quelque sorte un terme de compensation entre une somme et une intégrale. Enfin la troisième partie consiste à établir des développements dits tayloriens généralisés.

Notations et définition

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. On rappelle qu'il s'agit de l'unique entier qui satisfait $x-1<\lfloor x \rfloor \leqslant x$.
On dira qu'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$est à support compact dans $\mathbb{R}^+$lorsqu'il existe un réel $K \geqslant 0$ tel que pour tout $t \geqslant K, \varphi(t)=0$.

Partie A - Deux approches pour une valeur à $1+2+\cdots+\mathrm{n}+\cdots$

I - Une première approche

Soit f la fonction définie par $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$, où $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis calculer $f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

3. À l'aide de développements limités en 0 , déterminer trois constantes réelles a, b et c telles qu'au voisinage de 0, on ait : $\dfrac{e^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)^2}=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x}+c+o(1)$.

4. En déduire $\displaystyle\lim_{x \rightarrow 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx}-\frac{1}{x^2}\right)$.

II - Une deuxième approche

On considère dans cette partie une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^+$et telle que $\varphi(0) = 1$. Soit $K > 0$ telle que φ soit nulle sur $[K, +\infty[$. On pose ψ la fonction telle que pour tout $t \geqslant 0, \psi(t) = t\varphi(t)$. On peut alors observer que ψ ainsi que toutes ses dérivées sont nulles sur $[K, +\infty[$.

II. 1 - Une généralisation du théorème des sommes de Riemann pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Dans cette sous-partie f désigne une fonction définie de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$ et x est un réel strictement positif.

5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $a + nx \in]a, b]$.

6. Montrer que pour tout $L \geqslant 0, \left|L - \left\lfloor \frac{L}{x} \right\rfloor x\right| \leqslant x$.

7. Montrer que : $x \displaystyle\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} f(a+nx) - \int_a^b f(t)dt = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \left(\int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(a+nx) - f(t)dt \right) - \int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^{b} f(t)dt.$

8. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} f(a+nx) = \int_a^b f(t)dt.$

II. 2 - Un développement asymptotique lorsque x tend vers 0 de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx)$

Soit x un réel strictement positif.

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $R_{k,l}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \left(\int_{nx}^{t} \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(k+l)}(s) ds \right) dt.$

On admet la formule de Taylor avec reste intégral : pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, pour tout $a \in I$, pour tout $b \in I$, $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$

9. Déterminer $\displaystyle\int_0^K \psi'(t)dt$ ainsi que $\displaystyle\int_0^K \psi''(t)dt$.

10. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} nx\varphi(nx)$ ainsi que les valeurs de $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx)$ et de $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx)$.

11. . Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, pour tout $t \geqslant 0, \psi^{(l)}(t) = \displaystyle\int_K^t \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(l+k+1)}(s) ds.$

12. . Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^k} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^{K} \psi^{(l)}(t)dt = 0.$

13. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{R_{k,l}(x)}{x^k} = 0.$

14. Montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi^{(l)}(t) - \psi^{(l)}(nx))dt = \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(k+l)}(nx)dt \right) + R_{p,l+1}(x)$$

15. En déduire que

$$\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi(t) - \psi(nx))dt = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx) + \frac{x}{6} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx) + \frac{R_{2,1}(x)}{x^2}$$

16. Montrer que $x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi'(nx) - \psi'(t))dt - \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^{K} \psi'(t)dt.$

17. En déduire que $\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx) = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx) - \frac{R_{1,2}(x)}{x} - \frac{1}{x} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^{K} \psi'(t)dt.$

18. Déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi(t) - \psi(nx))dt.$

19. Montrer que $\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} n\varphi(nx) = \frac{1}{x^2} \int_0^K \psi(t)dt - \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} (\psi(t) - \psi(nx))dt \right) - \frac{1}{x^2} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^{K} \psi(t)dt.$

20. En déduire que qu'il existe un réel $A \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx) = \frac{A}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1).$

Partie B - Les sommes infinies au sens de Ramanujan

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

I - La formule d'Euler-Maclaurin

On considère la famille de polynômes $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de sorte que $B_0 = 1$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $B_p' = pB_{p-1}$ et $\int_0^1 B_p(x)dx = 0$.
On admet dans cette partie l'existence et l'unicité des polynômes B_p.
On pose pour tout $p \in \mathbb{N}, b_p = B_p(0)$ et $\widetilde{B}_p$ la fonction 1 -périodique de sorte que $\widetilde{B}_p$ soit égale à B_p sur $[0, 1[$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}, \widetilde{B}_p(x) = B_p(x - \lfloor x \rfloor)$.
On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $a \in \mathbb{R}, r_{p,a} = \int_1^a \frac{\widetilde{B}_p(t)}{p!} f^{(p)}(t)dt.$

21. Déterminer B_1 et B_2.

22. Montrer que pour tout entier naturel $p, B_p(1-X) = (-1)^p B_p(X)$.

23. Montrer que pour tout entier naturel p supérieur ou égal à $2, b_p = B_p(1)$ et pour tout $p \geqslant 3$ impair $b_p = 0$.

24. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!} \tilde{B}_p(t)dt = \frac{B_{p+1}(1)f^{(p)}(k+1) - B_{p+1}(0)f^{(p)}(k)}{(p+1)!} - \int_k^{k+1} \frac{\widetilde{B}_{p+1}(t)}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t)dt.$$

25. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
$$f(1) + \cdots + f(n) = \int_1^n f(t)dt + \frac{f(1)+f(n)}{2} + r_{1,n}.$$

26. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f(1) + \cdots + f(n) = \int_1^n f(t)dt + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \sum_{l=1}^{p} \frac{b_{2l}}{(2l)!} \left(f^{(2l-1)}(n) - f^{(2l-1)}(1)\right) + r_{2p+1,n}.$$

II - La constante de Ramanujan

On suppose dans cette partie qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant q$, $f^{(2p+1)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$et que $f^{(2p+1)}(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On pose, sous réserve d'existence,
$$C_0 = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} \widetilde{B}_1(t) f'(t)dt \text{ et pour tout } p \in \mathbb{N}^*,$$
$$C_p = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)dt - \sum_{l=1}^{p} \frac{b_{2l}}{(2l)!} f^{(2l-1)}(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\widetilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(t)dt.$$

27. Montrer pour tout $p \geqslant q$ que C_p est bien définie et ne dépend pas de l'entier p. On note à présent $\sum_{k \geqslant 1}^{\mathcal{R}} f(k)$ la valeur de C_p, où $p \geqslant q$.

28. Déterminer $\sum_{k \geqslant 1}^{\mathcal{R}} 1$ ainsi que $\sum_{k \geqslant 1}^{\mathcal{R}} k$ et $\sum_{k \geqslant 1}^{\mathcal{R}} k^2$.

29. On suppose dans cette question que $q = 0$ et que la suite $(f(n))$ converge vers 0 . Montrer que
$$\sum_{k \geqslant 1}^{\mathcal{R}} f(k) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k \geqslant 1}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)dt \right). \text{ Qu'obtient-on si } \int_0^{+\infty} f(t)dt \text{ converge ?}$$

Partie C - Développements tayloriens généralisés

On note E l'espace vectoriel normé $\mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme uniforme. Si $g \in E$, on note $\|g\|_\infty$ la norme uniforme de g sur E. On admettra qu'une forme linéaire φ est continue sur E si et seulement si il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que, pour tout $g \in E$, $|\varphi(g)| \leqslant C\|g\|_\infty$.
On considère φ une forme linéaire continue sur E vérifiant $\varphi(t \mapsto 1) = 1$. Soit (P_n) la suite de polynômes définie par $P_0 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n' = nP_{n-1}$ et $\varphi(P_n) = 0$. On pose de plus, sous réserve d'existence, pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P_k(x)}{k!} t^k$.
f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

I - Les formules de Taylor généralisés

30. Montrer que la suite (P_n) existe bien et est unique.

31. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|P_{n+1}\|_\infty \leqslant (n+1)(1+C)\|P_n\|_\infty$.

32. Montrer qu'il existe $R > 0$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \in]-R, R[$, $S(x,t)$ existe.

33. Montrer que pour tout $t \in]-R, R[, x \longmapsto S(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

34. Montrer que pour tout $t \in]-R, R[$ il existe un réel $\alpha(t)$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, $S(x,t) = \alpha(t) e^{tx}$.

35. Montrer que pour tout $t \in]-R, R[, \varphi(x \mapsto S(x,t)) = 1$. En déduire la valeur de $\alpha(t)$.

36. Justifier que la famille de polynômes (B_n) définie en B-I existe et est unique et montrer que pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $g : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{te^{tx}}{e^t - 1} \text{ si } t \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et que ce développement est $g(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k(x)}{k!} t^k$.

37. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{P_k(x)}{k!} f^{(k)}(y) - \frac{P_k(y)}{k!} f^{(k)}(x) \right) + \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

38. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{P_k(x)}{k!} \varphi\left(y \mapsto f^{(k)}(y)\right) + \varphi\left(y \mapsto \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt\right).$$

39. Justifier que l'application linéaire $\varphi : g \mapsto g(0)$ est continue sur E. Qu'obtient-on pour cette application ?

40. Soit $j \in \mathbb{N}$. À l'aide de la fonction $x \mapsto f(x+j)$ montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f(j) = \sum_{k=0}^{p} \frac{P_k(0)}{k!} \varphi\left(y \mapsto f^{(k)}(y+j)\right) - \varphi\left(y \mapsto \int_j^{y+j} \frac{P_p(y-t+j)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt\right)$$

II - Formule d'Euler-Boole

Dans la suite φ est définie par, pour tout $g \in E, \varphi(g) = \dfrac{1}{2}(g(0) + g(1))$. Les polynômes P_n sont alors notés E_n et sont appelés polynômes d'Euler. On note pour tout $n \in \mathbb{N}, e_n = E_n(0)$.

41. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $t \in]-R, R[$, pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{E_k(x)}{k!} t^k$.

42. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, E_n(1-X) = (-1)^n E_n(X)$.

43. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f(j) = \sum_{k=0}^{p} \left(\frac{1}{2} \left(f^{(k)}(j) + f^{(k)}(j+1) \right) \frac{e_k}{k!} \right) - \frac{1}{2} \int_j^{j+1} \frac{(-1)^p E_p(t-j)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

44. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}, \widetilde{E_n}(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor + n} E_n(x - \lfloor x \rfloor)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f(1) - f(2) + \cdots (-1)^{n-1} f(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p} f^{(k)}(1) \frac{e_k}{k!} + \frac{(-1)^{n-1}}{2} \sum_{k=0}^{p} f^{(k)}(n+1) \frac{e_k}{k!} + \frac{1}{2} \int_1^{n+1} \frac{\widetilde{E}_p(t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$