À rendre pour le jeudi 18 décembre

On note **C** l'ensemble des nombres complexes, **N** l'ensemble des entiers naturels, **R** l'ensemble des nombres réels, et $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs. On note $\mathfrak{Re}(z)$ la partie réelle du nombre complexe z.
(**H1**) On dit que la fonction $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ vérifie l'hypothèse (**H1**) si elle possède un développement en série entière au voisinage de l'origine, de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

1 Séries entières

Soit $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n z^n$ une série entière, où z ainsi que les coefficients a_n sont complexes. On pose

$$h(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n z^n \text{ et } H_r(\theta) = h\left(re^{i\theta}\right), \text{ où } r = |z| \text{ et } \theta = \operatorname{Arg} z$$

On suppose désormais que la fonction h vérifie l'hypothèse (**H1**).
Soit $r \in]0,1[$

1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note t_n le nombre de 0 à la fin de l'écriture décimale de n et s_n la somme de ses chiffres. Par exemple $t_{1004270} = 1$ et $s_{1004270} = 14$. On note $T(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n z^n, S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n z^n$.
Écrire des fonctions Python renvoyant t_n et s_n.

2. Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_r(\theta)e^{-in\theta}d\theta = \begin{cases} a_n r^n & \text{si} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$ et donner un résultat du même type pour $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{H_r(\theta)}e^{-in\theta}d\theta$.

3. En fonction du signe de n, en déduire les différentes expressions de

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)e^{-in\theta}d\theta$$

On suppose que, outre (**H1**), la fonction h vérifie l'hypothèse suivante :
(**H2**) le coefficient a_0 du développement en série entière de h est réel, positif ou nul.

4. Montrer que

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)d\theta$$

On pose $a_n = |a_n| e^{i\varphi_n}$, et on choisit $\tau \in]0,1[$.

5. Montrer que

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n| \tau^n r^n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \tau^n \left(\cos\left(n\theta + \varphi_n\right)\right)\right)d\theta$$

On choisit maintenant $\tau \in]0, 1/3]$

6. Déterminer le signe de $1/2 + \sum_{n>1} \tau^n \left(\cos\left(n\theta + \varphi_n\right)\right)$. Montrer que

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n|\, \tau^n r^n \leq \max_{-\pi\leq\theta\leq\pi} \left|\mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|$$

(**H3**) On dit que la fonction $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ vérifie l'hypothèse (**H3**) si,
$\forall r \in [0,1[,\ \max_{-\pi\leq\theta\leq\pi} \left|\mathfrak{Re}\left(g\left(re^{i\theta}\right)\right)\right| \leq 1.$

7. En admettant que h vérifie les hypothèses (**H1**), (**H2**) et (**H3**), montrer que $\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n|\,|z|^n \leq 1$, dès que $|z| \leq 1/3$.

2 Le rayon de Bohr

On considère maintenant la fonction $f(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n z^n$, vérifiant l'hypothèse (**H1**) ainsi que
(**H4**) $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \Rightarrow |f(z)| \leq 1.$

8. À l'aide du résultat de la question 7 montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1/3 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n|\,|z|^n \leq 1.$$

La valeur $|z| = 1/3$ constitue le rayon de Bohr de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} b_n z^n$.
On considère maintenant le cas particulier de la fonction f_λ donnée par

$$f_\lambda(z) = (z-\lambda)/(1-\lambda z)$$

où $\lambda \in \mathbf{R}^+$

9. Sous quelles conditions relatives à λ, la fonction f_λ vérifie-t-elle les hypothèses (**H1**) et (**H4**) ?

En admettant que λ vérifie ces conditions, on note $b_n(\lambda)$ les coefficients du développement en série entière de f_λ : $f_\lambda(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n(\lambda) z^n$.

10. Montrer que $\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n(\lambda)|\,|z|^n \leq 1$ si et seulement si $|z| \leq \dfrac{1}{1+2\lambda}$.

11. Démontrer que si $|z| \in]1/3, 1[$, alors il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n(\lambda)|\,|z|^n > 1$.

12. En déduire que la constante $1/3$ obtenue à la question 8 ne peut être améliorée sans hypothèse supplémentaire sur f.

3 Au-delà de $|z| = 1/3\ldots$

Nous venons de démontrer que, sous les hypothèses (**H1**) et (**H4**) l'estimation de la question 8 est optimale. Dans ce paragraphe on établit une estimation plus générale, valable au-delà du rayon de Bohr $r = 1/3$.

13. Montrer que si f et g vérifient (**H1**), où

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n z^n \text{ et } g(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} c_n z^n$$

alors

$$\forall r \in]0,1[, \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n \overline{c_n} r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(re^{i\theta}\right)\overline{g\left(re^{i\theta}\right)}d\theta$$

On pose

$$|||f||| = \left(\sup_{0\leq r<1}\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n|^2 r^{2n}\right)^{1/2}$$

sous réserve que cette dernière quantité soit finie.
L'ensemble des fonctions de $z \in \mathbf{C}$ qui vérifient $(\mathbf{H}1)$ et $(\mathbf{H}4)$ et, par souci de simplification, dont les coefficients du développement en série entière sont réels est noté $\mathcal{E}$.

On suppose désormais que $f \in \mathcal{E}$.

14. En s'aidant de la question 13, montrer que $|||f||| \leq 1$.

On note $\mathcal{V}_n$ l'espace vectoriel des fonctions de la variable complexe z de la forme $\psi(z) = \alpha + \beta z^n$ où α et β appartiennent à $\mathbf{R}$.

On note $P_n, n \geq 1$, l'application qui à $g = \sum_{n\in\mathbf{N}} c_n z^n$ vérifiant $(\mathbf{H}1)$ et dont les coefficients c_n sont réels, fait correspondre la fonction $g_n \in \mathcal{V}_n$ définie par $g_n(z) = c_0 + c_n z^n$.

On note A_f l'application qui à $\psi \in \mathcal{V}_n$ fait correspondre la fonction $f\psi$.

15. Démontrer que pour tout $\psi \in \mathcal{V}_n$, $|||A_f(\psi)||| \leq |||\psi|||$ et en déduire que $|||P_n \circ A_f(\psi)||| \leq |||\psi|||$.

On note S la bijection de $\mathcal{V}_n$ dans $\mathbf{R}^2$, qui à ψ définie par $\psi(z) = \alpha + \beta z^n$ fait correspondre le vecteur $\Psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

16. Déterminer la matrice $\mathbb{D}$ de l'application linéaire qui à $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ fait correspondre $S \circ P_n \circ A_f(\psi)$ où $\psi = S^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha + \beta z^n$

On munit $\mathbf{R}^2$ de la norme euclidienne : $\|\Psi\| = \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$, dérivant du produit scalaire $(\Psi \mid \Theta) = \alpha\gamma + \beta\delta$, où $\Psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\Theta = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$.

17. Montrer que pour tout Ψ, et pour tout $\Theta \in \mathbf{R}^2, (\Psi \mid \mathbb{D}\Theta) = \left(\mathbb{D}^T\Psi \mid \Theta\right)$

On dit que la matrice $\mathbb{A}$ est positive si et seulement si $(\mathbb{A}\Psi \mid \Psi) \geq 0$ pour tout $\Psi \in \mathbf{R}^2$.

On note $\mathbb{I}$ la matrice identité.

18. Déduire de la question 15 que $\mathbb{A} = \mathbb{I} - \mathbb{D}^T\mathbb{D}$ est positive (on donne $A = \begin{pmatrix} 1 - b_0^2 - b_n^2 & -b_0 b_n \\ -b_0 b_n & 1 - b_0^2 \end{pmatrix}$).
En déduire que $b_0^2 \leq 1$ et que les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont positives ou nulles.

19. En déduire que $|b_n| \leq 1 - b_0^2$.

Pour $0 \leq r < 1$, on pose

$$M(r) = \sup_{0\leq t\leq 1}\left(t + \left(1 - t^2\right)\frac{r}{1-r}\right)$$

20. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbf{N}} |b_n z^n| \leq M(|z|)$$

21. Déterminer $M(r)$ pour $r \in [0, 1[$.

On pose

$$m(r) = \min\left(M(r), \left(1 - r^2\right)^{-1/2}\right)$$

22. Montrer que

$$\forall \varepsilon \in]0, 1[, \forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 - \varepsilon \Rightarrow \sum_{n \in \mathbf{N}} |b_n z^n| \leq \left(\sum_{n \in \mathbf{N}} b_n^2 |1 - \varepsilon|^{2n}\right)^{1/2} \left(1 - |z|^2 / |1 - \varepsilon|^2\right)^{-1/2}.$$

En déduire à l'aide de la question 14 que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbf{N}} |b_n|\, |z|^n \leq m(|z|)$$