

À rendre pour le mardi 3 février

On note :

$C(\mathbb{R})$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

$C_b(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions bornées appartenant à $C(\mathbb{R})$.

$L^1(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions intégrables sur \mathbb{R} et appartenant à $C(\mathbb{R})$.

$L^2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions de carré intégrable sur \mathbb{R} et appartenant à $C(\mathbb{R})$.

Pour toute fonction f de $C_b(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$.

Pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$.

Pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}$.

On admet que ces expressions définissent des normes sur les espaces en question.

Soit f une fonction complexe d'une variable réelle. Par définition, le support de f est l'adhérence de l'ensemble $A_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$. On dit que f est à support compact si son support est un compact de \mathbb{R} ; en d'autres termes, f est à support compact si et seulement s'il existe un réel $A \geq 0$ tel que f soit nulle en dehors de $[-A, A]$.

Par définition, une approximation de l'unité est une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, continues par morceaux et intégrables sur \mathbb{R} , vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & f_n \text{ est positive sur } \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \\ \forall \varepsilon > 0, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f_n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} f_n = 0 \end{cases}$$

I Produit de convolution

Soit $f, g \in C(\mathbb{R})$. Lorsque la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur \mathbb{R} , on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt$$

La fonction $f * g$ est appelée produit de convolution de f par g .

I.A - Généralités

1. Dans chacun des deux cas suivants, montrer que $f * g$ est définie et bornée sur \mathbb{R} et donner une majoration de $\|f * g\|_\infty$ pouvant faire intervenir $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

a. $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in C_b(\mathbb{R})$;

b. $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

2. Soient $f, g \in C(\mathbb{R})$ telles que $f * g(x)$ soit défini pour tout réel x . Montrer que $f * g = g * f$.
3. Montrer que si f et g sont à support compact, alors $f * g$ est à support compact.

I.B - Produit de convolution de deux éléments de $L^2(\mathbb{R})$

Pour toute fonction h de $C(\mathbb{R})$ et tout réel α , on définit la fonction $T_\alpha(h)$ en posant $T_\alpha(h)(x) = h(x - \alpha)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans cette sous-partie I.B, on suppose que f et g appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'une fonction h est uniformément continue sur \mathbb{R} si et seulement si $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0$.
2. Pour tout réel α , montrer que $T_\alpha(f * g) = (T_\alpha(f)) * g$.
3. Pour tout réel α , montrer que $\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty \leq \|T_\alpha(f) - f\|_2 \times \|g\|_2$.
4. En déduire que $f * g$ est uniformément continue sur \mathbb{R} dans le cas où f est à support compact.
5. Montrer que $f * g$ est uniformément continue sur \mathbb{R} dans le cas général.

I. C - Continuité, dérivabilité

1. On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C_b(\mathbb{R})$.
 - a. Montrer que $f * g$ est continue.
 - b. Montrer que si g est uniformément continue sur \mathbb{R} , alors $f * g$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .
2. Soit k un entier naturel non nul. On suppose que g est de classe C^k sur \mathbb{R} et que toutes ses fonctions dérivées, jusqu'à l'ordre k , sont bornées sur \mathbb{R} .
Montrer que $f * g$ est de classe C^k sur \mathbb{R} et préciser sa fonction dérivée d'ordre k .

I.D - Approximation de l'unité

Soit $f \in C_b(\mathbb{R})$ et soit (δ_n) une suite de fonctions approximation de l'unité.

1. Montrer que la suite $(f * \delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur \mathbb{R} .
2. Montrer que si f est à support compact, alors la suite $(f * \delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .
3. Pour tout entier naturel n , on note h_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$h_n(t) = \frac{(1 - t^2)^n}{\lambda_n}$$

et nulle en dehors de $[-1, 1]$, le réel λ_n étant donné par la formule

$$\lambda_n = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n \, dt$$

- a. Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.
- b. Montrer que si f est une fonction continue à support inclus dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors $f * h_n$ est une fonction polynomiale sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et nulle en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
- c. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass : toute fonction complexe continue sur un segment de \mathbb{R} est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n$.
5. Existe-t-il une fonction $g \in C_b(\mathbb{R})$ telle que pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on ait $f * g = f$?

II Transformée de Fourier

Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction, notée \hat{f} , définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt.$$

Dans cette partie, on pourra utiliser sans démonstration l'un des théorèmes de Fubini

- sur un rectangle :

Soient $[a, b], [c, d]$ deux segments de \mathbb{R} et $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Les intégrales ci-dessous ont un sens et :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

- sur \mathbb{R}^2 :

soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle qu'il existe deux fonctions u, v continues et intégrables sur \mathbb{R} telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x, y)| \leq u(x)v(y)$. Les intégrales ci-dessous ont un sens et :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy.$$

II.A

Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que \hat{f} appartient à $C_b(\mathbb{R})$.

II.B - Transformée de Fourier d'un produit de convolution

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

1. On suppose que g est bornée.

a. On pose $\varphi : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)| dt$ et $\varphi_n : x \mapsto \int_{-n}^n |f(t)g(x-t)| dt$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (φ_n) converge uniformément vers φ .

b. En utilisant un théorème de Fubini, en déduire que :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \int_{-A}^A \varphi \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

c. Montrer que $f * g$ est intégrable sur \mathbb{R} .

$$\text{On admet que } \int_{\mathbb{R}} f * g = \int_{\mathbb{R}} f \times \int_{\mathbb{R}} g.$$

d. Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}$.

2. Un contre-exemple

Montrer qu'il existe deux fonctions f et g dans $L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * g(0)$ ne soit pas défini.

II.C - Sinus cardinal

On définit, pour tout entier naturel non nul n , la fonction k_n par

$$\begin{cases} k_n(x) &= 1 - \frac{|x|}{n} & \text{si } |x| \leq n \\ k_n(x) &= 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Exprimer la transformée de Fourier $\hat{k}_n(x)$ à l'aide de la fonction définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Justifier que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

On admet que $\int_{\mathbb{R}} \varphi = \pi$. On pose $K_n = \frac{1}{2\pi} \hat{k}_n$.

3. Montrer que la suite de fonctions $(K_n)_{n \geq 1}$ est une approximation de l'unité.

II. D - Inversion de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout réel t et tout entier naturel non nul n , on pose

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} k_n(x) \hat{f}(-x) e^{-itx} dx$$

1. Montrer que I_n et $f * K_n$ sont bien définies sur \mathbb{R} .

2. Pour tout réel t et tout entier naturel non nul n , montrer que $I_n(t) = (f * K_n)(t)$.

3. En déduire, pour tout réel t :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{itx} dx$$

III Convolution et codimension finie

Voici quelques définitions.

- Soit E un espace vectoriel. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires de E .
- Soit F un sous-espace vectoriel de E . On dit que F est de codimension finie s'il existe un sous-espace vectoriel G de E qui est de dimension finie avec $F \oplus G = E$. La codimension de F est $\dim(G)$ et on notera celle-ci $\text{codim}(F) = \dim(G)$.

Sinon, on dit que F est de codimension infinie.

On admettra l'unicité de la dimension d'un supplémentaire de F lorsqu'elle existe.

Dans cette partie, on suppose que $g \in C_b(\mathbb{R})$. On s'intéresse à la codimension dans $L^1(\mathbb{R})$ du sous-espace vectoriel

$$N_g = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid f * g = 0\}$$

On note V_g l'espace vectoriel engendré par les fonctions $T_\alpha(g)$:

$$V_g = \text{Vect}(T_\alpha(g))_{\alpha \in \mathbb{R}}$$

où, comme au I.B, on note $T_\alpha(g)$ la fonction $x \mapsto g(x - \alpha)$.

III.A

À toute fonction g de $C_b(\mathbb{R})$, on associe la forme linéaire φ_g sur $L^1(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi_g(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(-t) dt$$

Soit (g_1, \dots, g_p) une famille d'éléments de $C_b(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille (g_1, \dots, g_p) est libre si et seulement si la famille $(\varphi_{g_1}, \dots, \varphi_{g_p})$ est libre.

2. Soit (f_1, \dots, f_p) une famille libre de E^* . Montrer que l'application $\psi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{C}^p \\ x & \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{cases}$ est surjective.
3. Soit E un espace vectoriel de dimension infinie et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de formes linéaires sur E . On note

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker}(f_n)$$

Montrer que la codimension de K dans E est égale au rang de la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'espace dual E^* (on commencera par le cas où ce rang est fini).

On admet que ce résultat reste valable pour une famille non dénombrable

4. Montrer que la codimension de N_g dans $L^1(\mathbb{R})$ est égale à la dimension de V_g .
5. **a.** Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et soit g la fonction définie par $g(t) = e^{i\beta t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la codimension de N_g dans $L^1(\mathbb{R})$.
- b.** Soit n un entier naturel. Montrer qu'il existe une fonction g de $C_b(\mathbb{R})$ telle que N_g soit de codimension n dans $L^1(\mathbb{R})$.

III. B - Hypothèse A

Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$. On dit que g vérifie l'hypothèse A si g est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} , bornée et dont les fonctions dérivées à tout ordre sont bornées sur \mathbb{R} .

Montrer que, si N_g est de codimension finie dans $L^1(\mathbb{R})$ et si g vérifie l'hypothèse A, alors g est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

III. C - Cas général

Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$. On suppose que N_g est de codimension finie n dans $L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et des fonctions m_1, \dots, m_n d'une variable réelle telles que, pour tout réel α ,

$$T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g)$$

2. Soit F un sous-espace de dimension finie, notée p , de $C(\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in C(\mathbb{R})$ et pour tout réel x , on note $e_x(f) = f(x)$.
- a.** Montrer qu'il existe des réels a_1, \dots, a_p tels que $(e_{a_1}, \dots, e_{a_p})$ soit une base de l'espace F^*
- b.** Si (f_1, \dots, f_p) est une famille d'éléments de F , montrer que $\text{Det}(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq p}$ est non nul si et seulement si (f_1, \dots, f_p) est une base de F .
3. En appliquant la question III.C.2) à V_g , montrer que si g est de classe C^k alors les fonctions m_1, \dots, m_n sont de classe C^k .
4. Montrer que, pour tout entier naturel r non nul, $V_{h_r * g}$ est de dimension finie (les fonctions h_r sont celles de la question I.D.3).
5. Montrer que pour r assez grand la dimension de $V_{h_r * g}$ est égale à celle de V_g .
6. En déduire que les fonctions m_1, \dots, m_n sont de classe C^∞ .
7. Montrer que pour $g \in C_b(\mathbb{R})$, si N_g est de codimension finie dans $L^1(\mathbb{R})$, alors g vérifie l'hypothèse A de la question **III-B**.