

À rendre pour le mardi 3 février

On note :

$C(\mathbb{R})$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .

$C_b(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel de  $C(\mathbb{R})$  constitué des fonctions bornées appartenant à  $C(\mathbb{R})$ .

$L^1(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel de  $C(\mathbb{R})$  constitué des fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}$  et appartenant à  $C(\mathbb{R})$ .

$L^2(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel de  $C(\mathbb{R})$  constitué des fonctions de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$  et appartenant à  $C(\mathbb{R})$ .

Pour toute fonction  $f$  de  $C_b(\mathbb{R})$ , on pose  $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ .

Pour toute fonction  $f$  de  $L^1(\mathbb{R})$ , on pose  $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$ .

Pour toute fonction  $f$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , on pose  $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}$ .

On admet que ces expressions définissent des normes sur les espaces en question.

Soit  $f$  une fonction complexe d'une variable réelle. Par définition, le support de  $f$  est l'adhérence de l'ensemble  $A_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ . On dit que  $f$  est à support compact si son support est un compact de  $\mathbb{R}$ ; en d'autres termes,  $f$  est à support compact si et seulement s'il existe un réel  $A \geq 0$  tel que  $f$  soit nulle en dehors de  $[-A, A]$ .

Par définition, une approximation de l'unité est une suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , continues par morceaux et intégrables sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & f_n \text{ est positive sur } \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \\ \forall \varepsilon > 0, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f_n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} f_n = 0 \end{cases}$$

## I Produit de convolution

Soit  $f, g \in C(\mathbb{R})$ . Lorsque la fonction  $t \mapsto f(t)g(x-t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt$$

La fonction  $f * g$  est appelée produit de convolution de  $f$  par  $g$ .

### I.A - Généralités

1. Dans chacun des deux cas suivants, montrer que  $f * g$  est définie et bornée sur  $\mathbb{R}$  et donner une majoration de  $\|f * g\|_\infty$  pouvant faire intervenir  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  ou  $\|\cdot\|_\infty$ .

- a.  $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in C_b(\mathbb{R})$  ;
- b.  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ .

2. Soient  $f, g \in C(\mathbb{R})$  telles que  $f * g(x)$  soit défini pour tout réel  $x$ . Montrer que  $f * g = g * f$ .

3. Montrer que si  $f$  et  $g$  sont à support compact, alors  $f * g$  est à support compact.

## I.B - Produit de convolution de deux éléments de $L^2(\mathbb{R})$

Pour toute fonction  $h$  de  $C(\mathbb{R})$  et tout réel  $\alpha$ , on définit la fonction  $T_\alpha(h)$  en posant  $T_\alpha(h)(x) = h(x-\alpha)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Dans cette sous-partie I.B, on suppose que  $f$  et  $g$  appartiennent à  $L^2(\mathbb{R})$ .

1. Montrer qu'une fonction  $h$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0.$$
2. Pour tout réel  $\alpha$ , montrer que  $T_\alpha(f * g) = (T_\alpha(f)) * g$ .
3. Pour tout réel  $\alpha$ , montrer que  $\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty \leq \|T_\alpha(f) - f\|_2 \times \|g\|_2$ .
4. En déduire que  $f * g$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  dans le cas où  $f$  est à support compact.
5. Montrer que  $f * g$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  dans le cas général.

## I. C - Continuité, dérivabilité

1. On suppose que  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $g \in C_b(\mathbb{R})$ .
  - a. Montrer que  $f * g$  est continue.
  - b. Montrer que si  $g$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f * g$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Soit  $k$  un entier naturel non nul. On suppose que  $g$  est de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R}$  et que toutes ses fonctions dérivées, jusqu'à l'ordre  $k$ , sont bornées sur  $\mathbb{R}$ .Montrer que  $f * g$  est de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R}$  et préciser sa fonction dérivée d'ordre  $k$ .

## I.D - Approximation de l'unité

Soit  $f \in C_b(\mathbb{R})$  et soit  $(\delta_n)$  une suite de fonctions approximation de l'unité.

1. Montrer que la suite  $(f * \delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que si  $f$  est à support compact, alors la suite  $(f * \delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $h_n$  la fonction définie sur  $[-1, 1]$  par

$$h_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{\lambda_n}$$

et nulle en dehors de  $[-1, 1]$ , le réel  $\lambda_n$  étant donné par la formule

$$\lambda_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$$

- a. Montrer que la suite de fonctions  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une approximation de l'unité.
- b. Montrer que si  $f$  est une fonction continue à support inclus dans  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , alors  $f * h_n$  est une fonction polynomiale sur  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  et nulle en dehors de l'intervalle  $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ .
- c. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment de  $\mathbb{R}$  est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.
4. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n$ .
5. Existe-t-il une fonction  $g \in C_b(\mathbb{R})$  telle que pour toute fonction  $f$  de  $L^1(\mathbb{R})$ , on ait  $f * g = f$  ?

## II Transformée de Fourier

Pour toute fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , on appelle transformée de Fourier de  $f$  la fonction, notée  $\hat{f}$ , définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt.$$

Dans cette partie, on pourra utiliser sans démonstration l'un des théorèmes de Fubini

- sur un rectangle :

Soient  $[a, b], [c, d]$  deux segments de  $\mathbb{R}$  et  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  continue. Les intégrales ci-dessous ont un sens et :

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

- sur  $\mathbb{R}^2$  :

soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  continue telle qu'il existe deux fonctions  $u, v$  continues et intégrables sur  $\mathbb{R}$  telles que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x, y)| \leq u(x)v(y)$ . Les intégrales ci-dessous ont un sens et :

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy.$$

### II.A

Pour toute fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , montrer que  $\hat{f}$  appartient à  $C_b(\mathbb{R})$ .

### II.B - Transformée de Fourier d'un produit de convolution

Soit  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ .

1. On suppose que  $g$  est bornée.

a. On pose  $\varphi : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)| dt$  et  $\varphi_n : x \mapsto \int_{-n}^n |f(t)g(x-t)| dt$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $(\varphi_n)$  converge uniformément vers  $\varphi$ .

b. En utilisant un théorème de Fubini, en déduire que :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \int_{-A}^A \varphi \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

c. Montrer que  $f * g$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

$$\text{On admet que } \int_{\mathbb{R}} f * g = \int_{\mathbb{R}} f \times \int_{\mathbb{R}} g.$$

d. Montrer que  $\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}$ .

2. *Un contre-exemple*

Montrer qu'il existe deux fonctions  $f$  et  $g$  dans  $L^1(\mathbb{R})$  telle que  $f * g(0)$  ne soit pas défini.

### II.C - Sinus cardinal

On définit, pour tout entier naturel non nul  $n$ , la fonction  $k_n$  par

$$\begin{cases} k_n(x) &= 1 - \frac{|x|}{n} & \text{si } |x| \leq n \\ k_n(x) &= 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**1.** Exprimer la transformée de Fourier  $\hat{k}_n(x)$  à l'aide de la fonction définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**2.** Justifier que  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ .

On admet que  $\int_{\mathbb{R}} \varphi = \pi$ . On pose  $K_n = \frac{1}{2\pi} \hat{k}_n$ .

**3.** Montrer que la suite de fonctions  $(K_n)_{n \geq 1}$  est une approximation de l'unité.

## II. D - Inversion de Fourier

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  telle que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ . Pour tout réel  $t$  et tout entier naturel non nul  $n$ , on pose

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} k_n(x) \hat{f}(-x) e^{-itx} dx$$

**1.** Montrer que  $I_n$  et  $f * K_n$  sont bien définies sur  $\mathbb{R}$ .

**2.** Pour tout réel  $t$  et tout entier naturel non nul  $n$ , montrer que  $I_n(t) = (f * K_n)(t)$ .

**3.** En déduire, pour tout réel  $t$  :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{itx} dx$$

## III Convolution et codimension finie

Voici quelques définitions.

- Soit  $E$  un espace vectoriel. On note  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  l'ensemble des formes linéaires de  $E$ .
- Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On dit que  $F$  est de codimension finie s'il existe un sous-espace vectoriel  $G$  de  $E$  qui est de dimension finie avec  $F \oplus G = E$ . La codimension de  $F$  est  $\dim(G)$  et on notera celle-ci  $\text{codim}(F) = \dim(G)$ .  
Sinon, on dit que  $F$  est de codimension infinie.  
On admettra l'unicité de la dimension d'un supplémentaire de  $F$  lorsqu'elle existe.

Dans cette partie, on suppose que  $g \in C_b(\mathbb{R})$ . On s'intéresse à la codimension dans  $L^1(\mathbb{R})$  du sous-espace vectoriel

$$N_g = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid f * g = 0\}$$

On note  $V_g$  l'espace vectoriel engendré par les fonctions  $T_\alpha(g)$  :

$$V_g = \text{Vect}(T_\alpha(g))_{\alpha \in \mathbb{R}}$$

où, comme au I.B, on note  $T_\alpha(g)$  la fonction  $x \mapsto g(x - \alpha)$ .

### III.A

À toute fonction  $g$  de  $C_b(\mathbb{R})$ , on associe la forme linéaire  $\varphi_g$  sur  $L^1(\mathbb{R})$  définie par

$$\varphi_g(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(-t) dt$$

Soit  $(g_1, \dots, g_p)$  une famille d'éléments de  $C_b(\mathbb{R})$ .

- 1.** Montrer que la famille  $(g_1, \dots, g_p)$  est libre si et seulement si la famille  $(\varphi_{g_1}, \dots, \varphi_{g_p})$  est libre.

2. Soit  $(f_1, \dots, f_p)$  une famille libre de  $E^*$ . Montrer que l'application  $\psi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{C}^p \\ x & \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{cases}$  est surjective.
3. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension infinie et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de formes linéaires sur  $E$ . On note

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker}(f_n)$$

Montrer que la codimension de  $K$  dans  $E$  est égale au rang de la famille  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans l'espace dual  $E^*$  (on commencera par le cas où ce rang est fini).

On admet que ce résultat reste valable pour une famille non dénombrable

4. Montrer que la codimension de  $N_g$  dans  $L^1(\mathbb{R})$  est égale à la dimension de  $V_g$ .
5. a. Soit  $\beta \in \mathbb{R}$  et soit  $g$  la fonction définie par  $g(t) = e^{i\beta t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Déterminer la codimension de  $N_g$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ .
- b. Soit  $n$  un entier naturel. Montrer qu'il existe une fonction  $g$  de  $C_b(\mathbb{R})$  telle que  $N_g$  soit de codimension  $n$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ .

### III. B - Hypothèse A

Soit  $g \in C_b(\mathbb{R})$ . On dit que  $g$  vérifie l'hypothèse A si  $g$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , bornée et dont les fonctions dérivées à tout ordre sont bornées sur  $\mathbb{R}$ .

Montrer que, si  $N_g$  est de codimension finie dans  $L^1(\mathbb{R})$  et si  $g$  vérifie l'hypothèse A , alors  $g$  est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

### III. C - Cas général

Soit  $g \in C_b(\mathbb{R})$ . On suppose que  $N_g$  est de codimension finie  $n$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ .

1. Montrer qu'il existe des réels  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  et des fonctions  $m_1, \dots, m_n$  d'une variable réelle telles que, pour tout réel  $\alpha$ ,

$$T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g)$$

2. Soit  $F$  un sous-espace de dimension finie, notée  $p$ , de  $C(\mathbb{R})$ . Pour toute fonction  $f \in C(\mathbb{R})$  et pour tout réel  $x$ , on note  $e_x(f) = f(x)$ .

- a. Montrer qu'il existe des réels  $a_1, \dots, a_p$  tels que  $(e_{a_1}, \dots, e_{a_p})$  soit une base de l'espace  $F^*$
- b. Si  $(f_1, \dots, f_p)$  est une famille d'éléments de  $F$ , montrer que  $\text{Det}(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq p}$  est non nul si et seulement si  $(f_1, \dots, f_p)$  est une base de  $F$ .

3. En appliquant la question III.C.2) à  $V_g$ , montrer que si  $g$  est de classe  $C^k$  alors les fonctions  $m_1, \dots, m_n$  sont de classe  $C^k$ .

4. Montrer que, pour tout entier naturel  $r$  non nul,  $V_{h_r * g}$  est de dimension finie (les fonctions  $h_r$  sont celles de la question I.D.3).

5. Montrer que pour  $r$  assez grand la dimension de  $V_{h_r * g}$  est égale à celle de  $V_g$ .

6. En déduire que les fonctions  $m_1, \dots, m_n$  sont de classe  $C^\infty$ .

7. Montrer que pour  $g \in C_b(\mathbb{R})$ , si  $N_g$  est de codimension finie dans  $L^1(\mathbb{R})$ , alors  $g$  vérifie l'hypothèse A de la question III-B.