

À rendre pour le jeudi 12 février

Notations et définitions

Soit E un espace vectoriel euclidien (préhilbertien réel de dimension finie). On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de E et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Si H est une partie de E , on appelle enveloppe convexe de H , notée $\text{conv}(H)$, la plus petite partie convexe de E contenant H , c'est-à-dire l'intersection de tous les convexes de E contenant H .

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note A^T la matrice transposée de A et $\text{tr}(A)$ la trace de A . On rappelle que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $UU^T = I$. On rappelle également qu'une matrice symétrique réelle est dite *positive* si ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On pourra identifier \mathbb{R}^n et l'ensemble des matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on suppose muni du produit scalaire canonique, pour lequel la base canonique de \mathbb{R}^n est orthonormée. On note $\|\cdot\|_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de \mathbb{R}^n : pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\|_2 = \sup_{X \in \mathbb{R}^n, \|X\|=1} \|AX\|.$$

Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

A. Produit scalaire de matrices

On rappelle que $\text{tr}(A)$ désigne la trace de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour toute base orthonormée (e_1, e_2, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n , on a la formule :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i \rangle.$$

2. **a.** Montrer que l'application $(A, B) \rightarrow \text{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans cette partie.
b. Écrire en PYTHON une fonction qui à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ renvoie A^T (on n'utilisera pas de fonctions prédéfinies).
 Écrire en PYTHON une fonction qui à deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ renvoie $\text{tr}(A^T B)$.

On note $\|\cdot\|_1$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. *L'attention du candidat est attirée sur le fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est désormais muni de deux normes différentes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.*

3. Si A et B sont symétriques réelles positives, montrer que $\langle A, B \rangle \geq 0$. On pourra utiliser une base orthonormée de vecteurs propres de B .

B. Décomposition polaire

Soit f un endomorphisme de E . On note A la matrice de f dans une base orthonormée de E , et on note f^* l'adjoint de f .

4. Montrer que $A^T A$ est une matrice symétrique réelle positive. Exprimer $\|A\|_2$ en fonction des valeurs propres de $A^T A$.
 5. Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint positif h de E tel que $f^* \circ f = h^2$

6. Montrer que la restriction de h à $\text{Im}h$ induit un automorphisme de $\text{Im}h$.
On notera cet automorphisme \tilde{h} .
7. Montrer que $\|h(x)\| = \|f(x)\|$ pour tout $x \in E$. En déduire que $\text{Ker } h$ et $(\text{Im}f)^\perp$ ont même dimension et qu'il existe un isomorphisme v de $\text{Ker } h$ sur $(\text{Im}f)^\perp$ qui conserve la norme.
8. À l'aide de \tilde{h} et v , construire une isométrie vectorielle u de E telle que $f = u \circ h$.
9. En déduire que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = US$, où $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique positive.
On admet que si A est inversible, cette écriture est unique.

C. Projeté sur un convexe compact

Soit H une partie de E , convexe et compacte, et soit $x \in E$. On note

$$d(x, H) = \inf_{h \in H} \|x - h\|.$$

10. Montrer qu'il existe un unique $h_0 \in H$ tel que $d(x, H) = \|x - h_0\|$. On pourra utiliser pour h_0, h_1 dans H la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par la formule $q(t) = \|x - th_0 - (1-t)h_1\|^2$.
11. Montrer que h_0 est caractérisé par la condition $\langle x - h_0, h - h_0 \rangle \leq 0$ pour tout $h \in H$. On pourra utiliser la même fonction $q(t)$ qu'à la question précédente.

Le vecteur h_0 s'appelle *projeté* de x sur H .

D. Théorème de Carathéodory et compacité

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension n . On dit que $x \in E$ est une *combinaison convexe* des p éléments $x_1, x_2, \dots, x_p \in E$ s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ positifs ou nuls tels que

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1.$$

12. Montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(H)$ d'une partie H de E est constituée des combinaisons convexes d'éléments de H .

On souhaite montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n + 1$ éléments de H .

Soit $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ une combinaison convexe de $x_1, x_2, \dots, x_p \in H$ avec $p \geq n + 2$.

13. Montrer qu'il existe p réels non tous nuls $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^p \mu_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \mu_i = 0.$$

On pourra considérer la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_p - x_1)$.

14. En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p - 1$ éléments de H et conclure que $\text{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n + 1$ éléments de H .
On pourra considérer une suite de coefficients de la forme $\lambda_i - \theta \mu_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ pour un réel θ bien choisi.

15. Si H est une partie compacte de E , montrer que $\text{conv}(H)$ est compacte. On pourra introduire l'ensemble compact de \mathbb{R}^{n+1} défini par

$$\Lambda = \left\{ (t_1, \dots, t_{n+1}), \text{ avec } t_i \geq 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n+1\} \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \right\}.$$

E. Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

16. Montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est compacte.

On note \mathcal{B} la boule unité fermée de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.

17. Montrer que $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est contenue dans \mathcal{B} .

On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{B}$ telle que M n'appartient pas à $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$. On note N le projeté de M sur $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ défini à la partie C pour la norme $\|\cdot\|_1$, et on pose $A = (M - N)^T$. On écrit enfin $A = US$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S symétrique réelle positive (question 9).

18. Montrer que pour tout $V \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$, $\text{tr}(AV) \leq \text{tr}(AN) < \text{tr}(AM)$. En déduire que $\text{tr}(S) < \text{tr}(USM)$.

19. Montrer que $\text{tr}(MUS) \leq \text{tr}(S)$. On pourra appliquer le résultat de la question 1).

20. Conclure : déterminer $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$.

F. Points extrémaux

Un élément $A \in \mathcal{B}$ est dit extrémal dans \mathcal{B} si l'écriture $A = \frac{1}{2}(B + C)$, avec B, C appartenant à \mathcal{B} , entraîne $A = B = C$. Dans cette partie, on cherche à déterminer l'ensemble des points extrémaux de \mathcal{B} .

21. On suppose que $U \in O_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $U = \frac{1}{2}(V + W)$, avec V, W appartenant à \mathcal{B} . Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, les vecteurs VX et WX sont liés. En déduire que U est extrémal dans \mathcal{B} .

Soit A appartenant à \mathcal{B} mais n'appartenant pas à $O_n(\mathbb{R})$.

22. Montrer que l'on peut écrire A sous la forme $A = PDQ$, où P et Q sont deux matrices orthogonales et où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux d_1, d_2, \dots, d_n sont positifs ou nuls.

23. Montrer que $d_i \leq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, et qu'il existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $d_j < 1$

24. En déduire qu'il existe deux matrices A_α et $A_{-\alpha}$ appartenant à \mathcal{B} telles que $A = \frac{1}{2}(A_\alpha + A_{-\alpha})$. Conclure.