

À rendre pour le mardi 10 mars

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés de certaines équations différentielles sur $\mathbb{R}$ du type suivant : $(E) \quad y''(t) + \varphi(t)y(t) = 0$.

Première partie

L'objet de cette première partie est l'étude sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad y''(t) + e^{it}y(t) = 0.$$

1. Caractérisation d'une solution périodique

Démontrer qu'une fonction f , définie sur toute la droite réelle, solution de l'équation différentielle (E_1) , est 2π -périodique si et seulement si elle prend, ainsi que sa dérivée f' , les mêmes valeurs en 0 et en 2π : $f(0) = f(2\pi)$, $f'(0) = f'(2\pi)$.

2. Construction d'une solution périodique

On cherche une solution de (E_1) sous la forme $f : t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$, avec $(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

- a. Donner une condition suffisante sur les (c_n) pour que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- b. Déterminer une solution non nulle et 2π -périodique de (E_1) .

3. Inégalité vérifiée par la fonction f et sa dérivée

Soit f une solution 2π -périodique de (E_1) .

- a. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$. Établir une majoration du module des deux nombres complexes C et D , définis ci-dessous par les relations :

$$C = f(t+h) - f(t) - hf'(t), \quad D = f(t-h) - f(t) + hf'(t)$$

en fonction de la norme de la convergence uniforme de la fonction $f : \|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$.

- b. En déduire que : $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2}\|f\|_\infty$.

Deuxième partie

Soit q une fonction réelle de la variable réelle t , continue et périodique de période $T > 0$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, q(t+T) = q(t).$$

Soit λ un nombre complexe. On considère l'équation différentielle du second ordre

$$x'' + (\lambda - q(t))x = 0 \tag{1}$$

où x est une fonction complexe, de classe $\mathcal{C}^2$, de la variable t .

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de l'équation (1). Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel complexe.
2. Soient x_1 et x_2 deux solutions de (1). On pose $W(x_1, x_2) = x_1 x_2' - x_1' x_2$. Montrer que $W(x_1, x_2)$ est indépendant de t .
3. Soit $\mathcal{T}$ l'opérateur de translation par T qui, à une fonction complexe f , associe la fonction $\mathcal{T}(f)$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{T}(f)(t) = f(t+T).$$

- a.** Montrer que, si $f \in \mathcal{E}$, alors $\mathcal{T}(f) \in \mathcal{E}$.
- b.** On désigne par τ la restriction de $\mathcal{T}$ à $\mathcal{E}$. Est-ce un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$?
- 4.** **a.** Montrer qu'il existe une unique solution x_1 de (1) telle que : $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, et une unique solution x_2 de (1) telle que : $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = 1$.
- b.** Montrer que x_1 et x_2 forment une base de $\mathcal{E}$.
- 5.** On désigne par M la matrice de l'endomorphisme τ de $\mathcal{E}$ dans la base (x_1, x_2) .
- a.** Montrer que $M = \begin{pmatrix} x_1(T) & x_2(T) \\ x_1'(T) & x_2'(T) \end{pmatrix}$.
- b.** Évaluer $\det M$.
On pose $\Delta = \frac{1}{2} \text{Tr } M$ où Tr désigne la trace.
- c.** Évaluer Δ en fonction de $x_i(T)$, $x_i'(T)$ ($i = 1, 2$).
- 6.** Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme τ de $\mathcal{E}$ sont racines du trinôme $P(\rho) = \rho^2 - 2\Delta\rho + 1$.
- Soit $x \in \mathcal{E}$. On dit que x est *stable* si $|x|$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. On dit que x est *fortement stable* si $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.
- 7.** On suppose Δ réel et $|\Delta| \neq 1$.
- a.** Montrer que $\mathcal{E}$ est somme directe des sous-espaces propres de τ .
- b.** Montrer que, si $|\Delta| < 1$, toutes les solutions de (1) sont stables. Les fonctions propres de τ sont-elles fortement stables dans ce cas ?
- c.** Montrer que, si $|\Delta| > 1$, il existe une solution de (1) fortement stable. Est-elle unique ? Existe-t-il dans ce cas des solutions stables mais non fortement stables ?
- 8.** On suppose que $\Delta = \varepsilon$, où $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$.
- a.** Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{E}$ dans laquelle la matrice de τ est $\begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ où a est un nombre complexe.
- b.** On suppose $a \neq 0$. Montrer que, dans ce cas, il existe une solution de (1) stable mais non fortement stable. Existe-t-il des solutions fortement stables ?

Troisième partie

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2}$.

Soit g la fonction somme de la série entière de terme général $u_n(x)$, définie dans l'intervalle de convergence de cette série par la relation suivante : $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2}$.

Le but de cette partie est l'étude de la fonction g .

1. Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence R de la série de terme général $u_n(x)$.

2. Signe de la fonction g

Quelle est le signe de la fonction dérivée g' , sur le segment $[0, 2]$? En déduire qu'il existe un réel x_0 tel que la fonction g est positive sur l'intervalle semi-ouvert $[0, x_0[$ et négative sur l'intervalle semi-ouvert $]x_0, 2]$. Démontrer l'inégalité $x_0 > \sqrt{2}$ (prendre $\sqrt{2} = 1,41$).

Quatrième partie

Le but de cette partie est d'étudier les zéros des solutions de l'équation différentielle suivante

$$(E_2) \quad y''(t) + e^t y(t) = 0.$$

Dans toute cette partie y désigne une solution réelle de l'équation différentielle (E_2) .

1. Zéros de la fonction y

- a.** Préciser la fonction y lorsqu'il existe un réel α tel que la fonction y et sa dérivée sont nulles en ce point α : $y(\alpha) = 0, y'(\alpha) = 0$.
- b.** Soient a et b deux réels ($a < b$) et z une solution réelle de l'équation différentielle suivante :

$$(F) \quad z''(t) + e^a z(t) = 0.$$

La fonction z est supposée s'annuler en deux points α et β de l'intervalle $[a, b]$ ($a \leq \alpha < \beta \leq b$) et être strictement positive sur l'intervalle ouvert $] \alpha, \beta [$. Soit y une solution de l'équation différentielle (E_2) .

Soit **H** l'hypothèse : « la fonction y est strictement positive sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ ».

Soit W la fonction définie sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ par la relation suivante :

$$W(t) = y(t)z'(t) - y'(t)z(t)$$

Étudier les variations de la fonction W sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$; en déduire que l'hypothèse **H** formulée ci-dessus est fausse.

En conclure que, pour toute solution réelle z de l'équation différentielle (F) , entre deux zéros consécutifs de la fonction z dans $[a, b]$, se trouve au moins un zéro de la fonction y .

- c.** Déduire des résultats précédents que, pour tout réel τ , toute solution y réelle de l'équation différentielle (E_2) a au moins un zéro dans l'intervalle $\left[\tau, \tau + \pi \exp \left(-\frac{\tau}{2} \right) \right]$.

2. Espacement des zéros de la fonction y

Soit y une solution réelle de l'équation différentielle (E_2) , différente de la solution nulle.

- a.** Soit τ un zéro de la fonction y ; démontrer qu'il existe un intervalle ouvert $] \tau, \tau + c [$ (où c est un réel strictement positif) sur lequel la fonction y ne s'annule pas.
- b.** Soient deux zéros consécutifs α et β de la fonction y . Démontrer, en considérant une solution réelle z de l'équation différentielle suivante : $(G) \quad z''(t) + e^\beta z(t) = 0$, que les réels α et β vérifient l'inégalité suivante : $\beta - \alpha \geq \pi \exp \left(-\frac{\beta}{2} \right)$.

Cinquième partie

L'objet de cette partie est de construire une fonction Ψ solution de l'équation différentielle (E_2) .

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur la droite réelle par la relation : $v_n(t) = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{nt}$.

Lorsque la série de fonctions de terme général v_n est convergente, soit Ψ la fonction somme de cette

série : $\Psi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{nt}$.

1. La fonction Ψ est solution de l'équation différentielle (E_2)

- a.** Établir que, pour tout réel a , la série de terme général $v_n(t)$ est uniformément convergente sur la demi-droite $] -\infty, a [$.
- b.** Démontrer que la fonction Ψ est une solution de l'équation différentielle (E_2) définie sur toute la droite réelle.

2. Zéros de la fonction Ψ

Démontrer, en utilisant des résultats des deuxième et troisième parties, que les zéros de la fonction Ψ constituent une suite strictement croissante $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels :

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$$

telle que :

$$\frac{\ln(2)}{2} < t_0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (t_{n+1} - t_n) = 0.$$

Sixième partie

Le but de cette partie est d'établir des majorations des fonctions solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y''(t) + \varphi(t)y(t) = 0$$

1. Une inégalité

Soient M un réel strictement positif ($M > 0$) et a un réel. Soient f et g deux fonctions positives, définies et continues sur la demi-droite $[a, +\infty[$, telles que, pour tout réel t de la demi-droite $[a, +\infty[$, l'inégalité ci-dessous ait lieu : $f(t) \leq M + \int_a^t f(x)g(x)dx$.

Établir, en considérant par exemple la fonction F , définie sur la demi-droite $[a, +\infty[$ par la relation : $F(t) = \int_a^t f(x)g(x)dx$ la propriété :

$$f(t) \leq M \exp \left(\int_a^t g(x)dx \right).$$

Dans la suite le réel a est strictement positif ($a > 0$) ; soit y une fonction réelle, définie et continue sur la demi-droite $[a, +\infty[$, vérifiant l'équation différentielle (E) :

$$y''(t) + \varphi(t)y(t) = 0$$

où φ est une fonction réelle, définie et continue sur la demi-droite $[a, +\infty[$, telle que la fonction $t \mapsto t\varphi(t)$ est intégrable sur la demi-droite $[a, +\infty[$.

2. Majoration de la fonction $|y(t)|/t$

- a.** Déterminer une fonction affine $A : t \mapsto A(t)$, définie sur la demi-droite $[a, +\infty[$, telle que, pour tout réel t de cette demi-droite, la relation ci-dessous ait lieu :

$$y(t) = A(t) - \int_a^t (t-x)y(x)\varphi(x)dx$$

- b.** Démontrer que la fonction j définie par la relation

$$j(t) = \frac{y(t)}{t}$$

est bornée lorsque le réel t croît vers l'infini. C'est-à-dire : il existe deux réels strictement positifs C et D tels que, pour tout t supérieur ou égal à C ($t \geq C$), il vienne : $|y(t)| \leq Dt$.

3. Limites de $y'(t)$ et de $y(t)/t$

- a.** Démontrer, en utilisant les résultats précédents que la fonction dérivée $y' : t \mapsto y'(t)$ a une limite lorsque le réel t croît vers l'infini ; soit ℓ cette limite :

$$\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t).$$

- b.** En déduire que l'expression $j(t) = \frac{y(t)}{t}$ a pour limite ℓ lorsque le réel t croît vers l'infini.