

À rendre pour le jeudi 19 mars

EXERCICE

Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On munit $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ d'une norme $\|\cdot\|$ matricielle vérifiant :
 $\forall U, V \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \|UV\| \leq \|U\| \cdot \|V\|$ (cela existe toujours en considérant une norme subordonnée).

1. Pour R assez grand, montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $(Re^{i\theta}I_d - A)$ est inversible dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et que son inverse est la matrice

$$(Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout R assez grand, on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n (Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} d\theta = A^{n-1}.$$

3. On considère la polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(XI_d - A) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. Montrer que pour R assez grand :

$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta}) \chi_A(Re^{i\theta}) (Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} d\theta.$$

4. En déduire que $\chi_A(A) = 0$ (on pourra faire intervenir des comatrices).

PROBLÈME 1

Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit l'application linéaire $D : \begin{cases} \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \end{cases}$.

On note $\mathcal{N} = \text{Ker}(D)$.

- Si u est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, on notera $u = (u_1, \dots, u_n)$, avec $u_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ représentant les applications coordonnées.
- Si de plus u est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on note sa matrice jacobienne $J_x(u) = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right]_{1 \leq i,j \leq n}$, pour $x \in \mathbb{R}^n$.
- Enfin si f est dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on note sa matrice hessienne $H_x(f) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]_{1 \leq i,j \leq n}$, pour $x \in \mathbb{R}^n$.

u désignera une fonction de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ qui laisse $\mathcal{N}$ stable :

$\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), D(f) = 0 \Rightarrow D(f \circ u) = 0$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{N} \Rightarrow f \circ u \in \mathcal{N}$.

1. Montrer que les applications composantes de u appartiennent à $\mathcal{N}$. Pour montrer que $D(u_k) = 0$, on pourra considérer $f_k : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

a. Exprimer $\frac{\partial(f \circ u)}{\partial x_i}$ en fonction des $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_k}$ et de u .

b. En appliquant deux fois cette relation, montrer que :

$$\frac{\partial^2(f \circ u)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \right) \circ u + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \circ u.$$

c. Interpréter l'ensemble de ces égalités pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ comme une identité matricielle qui exprimer $H_x(f \circ u)$ en fonction de $J_x(u)^T, H_{u(x)}(f), J_x(u)$ et des $\frac{\partial f}{\partial x_k}[u(x)]$ et $H_x(u_k)$ (on pourra calculer $J_x(u)^T H_{u(x)}(f) J_x(u)$).

3. a. Montrer que $(U, V) \mapsto \text{tr}(UV)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b. Soient $V_1, V_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que :

$$\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(V_1 S) = 0 \Rightarrow \text{tr}(V_2 S) = 0.$$

Déduire de la question précédente qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $V_2 = \lambda V_1$.

4. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

a. Montrer que $Df(x) = \text{tr}(AH_x(f))$.

b. Montrer que $D(f \circ u)(x) = \text{tr}(AJ_x(u)^T H_{u(x)}(f) J_x(u))$.

5. a. Soit $S = [S_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Soit } q(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n S_{i,j} x_i x_j.$$

Montrer que $H_x(q) = S$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. En considérant dans la question **3.b.** $V_1 = A, V_2 = J_x(u)^T A(f) J_x(u)$ et $f = q$, montrer qu'il existe $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ tel que : $J_x(u) A J_x(u)^T = \lambda(x) A$.

c. En déduire que : $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n, D(f \circ u)(x) = \lambda(x) Df[u(x)]$.

On suppose jusqu'à la fin du problème que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice $J_x(u)$ est inversible et

que A est aussi inversible. On note $B = A^{-1} = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$.

6. a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda(x) \neq 0$.

b. Montrer que λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

c. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, J_x(u)^T B J_x(u) = \lambda(x) B$.

7. Montrer que pour tout $i, j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n b_{p,q} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} b_{k,i} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} b_{k,j} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} b_{i,j} \right),$$

on pourra dériver par rapport à x_k la quantité $\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n b_{p,q} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial u_q}{\partial x_j}$ et écrire

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_k \partial x_i} \cdot \frac{\partial u_q}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_p}{\partial x_k} \frac{\partial u_q}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}.$$

8. Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a_{i,j} b_{p,q} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}$, puis montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (n-2) \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = 0.$$

9. On suppose $n \neq 2$.

- a.** Montrer que λ est constante et en déduire que : $\forall i, j, q \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} = 0$.
- b.** En déduire qu'il existe $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, u(x) = a(x) + b$.
- c.** Montrer que a est dans $GL(\mathbb{R}^n)$.

PROBLÈME 2

- 1.** Dans toute cette partie, on considère un intervalle fermé I et une fonction f définie sur I à valeurs dans I et qui vérifie, pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

où k est une constante positive strictement inférieure à 1.

On dit dans ce cas que la fonction f est contractante sur I .

- a.** Montrer que si $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$, alors $x_1 = x_2$.
- b.** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite appartient à I .

- c.** Montrer qu'il existe un unique réel $x \in I$ tel que $f(x) = x$.

- 2.** Dans toute cette partie, on considère un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , à valeurs réelles.

On suppose qu'il existe un point (a, b) de U tel que $f(a, b) = 0$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

On définit enfin une fonction g sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$g(x, y) = y - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)} f(x, y).$$

- a.** Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que la boule B fermée de centre (a, b) et de rayon $2r$ soit incluse dans U et tel que

$$\forall (x, y) \in B, \quad \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{1}{2}.$$

- b.** En déduire que, pour tout $(x, y) \in B$ et tout $(x, y') \in B$,

$$|g(x, y') - g(x, y)| \leq \frac{1}{2} |y - y'|.$$

- c.** Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $I =]a - \alpha, a + \alpha[$, avec $\alpha > 0$ tel que $[a - \alpha, a + \alpha] \times [b - r, b + r] \subset B$ et tel que

$$\forall x \in I, \quad |g(x, b) - g(a, b)| \leq \frac{r}{2}$$

- d.** Déduire des deux dernières inégalités que

$$\forall (x, y) \in I \times [b - r, b + r], \quad g(x, y) \in [b - r, b + r].$$

- e.** Montrer que pour tout $x \in I$ fixé, l'application $y \mapsto g(x, y)$ est une application contractante sur $[b - r, b + r]$.
- f.** Montrer que pour tout $x \in I$, il existe un unique $y \in [b - r, b + r]$ tel que $f(x, y) = 0$. Ce y sera noté $\varphi(x)$.

- g.** Montrer que φ est lipschitzienne sur I (on pourra partir de $g(x, y) - g(x_0, y_0)$, avec $y = \varphi(x)$ et $y_0 = \varphi(x_0)$).
- h.** Montrer que φ est $\mathcal{C}^1$ sur I et donner l'expression de la dérivée de φ en fonction des dérivées partielles de f (on pourra partir de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$, avec $y = \varphi(x)$ et $y_0 = \varphi(x_0)$ et utiliser un développement limité à l'ordre un de f).
- 3.** Soit f et F deux fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert. On cherche les extrema de la fonction F restreinte à l'ensemble $\{(x, y) \in U, f(x, y) = 0\}$. Une solution de ce problème sera appelé extremum de F lié par la relation $f(x, y) = 0$.
- Soit (a, b) un point de U tel que $f(a, b) = 0$ et tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

- a.** Montrer qu'il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ contenant (a, b) et contenu dans U , un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant a et une application φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I tels que

$$((x, y) \in V, f(x, y) = 0) \iff (x \in I, y = \varphi(x)).$$

- b.** Montrer que si (a, b) est un extremum de F lié par la relation $f(x, y) = 0$, alors

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0.$$

- c.** La réciproque est-elle vraie ?