

**Notations :**

Dans tout le problème, le corps des scalaires est  $\mathbb{R}$  et les espaces vectoriels sont de dimension finie. Si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces vectoriels normés, on note  $\mathcal{L}(X, Y)$  l'espace des applications linéaires de  $X$  dans  $Y$  et on note  $\|f\|$  la norme subordonnée (ou norme opérateur ou norme triple) usuelle de toute application continue  $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ . On note  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  muni de la norme duale, c'est-à-dire de la norme subordonnée comme précédemment, où  $\mathbb{R}$  est muni de la valeur absolue.

Si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces vectoriels,  $GL(X, Y)$  désigne comme d'habitude l'ensemble des isomorphismes de  $X$  sur  $Y$ .

On rappelle qu'une isométrie entre deux espaces vectoriels normés  $(X, \|\cdot\|_X)$  et  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  est une application linéaire  $f$  de  $X$  dans  $Y$  qui conserve la norme : pour tout  $x \in X$ ,  $\|f(x)\|_Y = \|x\|_X$ . On dit que deux espaces vectoriels normés de dimension finie sont isométriques s'il existe une isométrie de l'un sur l'autre.

Soit  $\beta$  une base d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \geq 1$  ; on notera  $\det_\beta(x_1, \dots, x_n)$  le déterminant dans la base  $\beta$  de  $x_1, \dots, x_n \in E$ .

**Préliminaire. Théorème d'Ascoli.**

Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ .

On dit qu'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé est relativement compacte si elle est incluse dans un compact.

On se place avec  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ .

Dans cette section, on considère  $K$  un compact de  $\mathbb{R}$ . L'espace vectoriel  $C(K, \mathbb{R}^d)$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty : \forall f \in C(K, \mathbb{R}^d), \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f(x)\|$ .

On dit d'une partie  $A$  de  $C(K, \mathbb{R}^d)$  est équicontinue en  $x \in K$  si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, \forall f \in A, \forall y \in B(x, r), \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

On dit que  $A$  est équicontinue si elle est équicontinue en tout point  $x \in K$ .

1. Soit  $k > 0$  et  $B$  l'ensemble des fonctions de  $K$  dans  $\mathbb{R}^d$  qui sont  $k$ -lipschitziennes. Montrer que  $B$  est équicontinue.

Soit  $A$  une partie de  $C(K, \mathbb{R}^d)$ . On cherche à montrer dans la suite de cette partie le théorème suivant :

**Théorème 1 :** Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (P1)  $A$  est relativement compacte.
- (P2)  $A$  est équicontinue et pour tout  $x \in K$ , l'ensemble  $A(x) = \{f(x) \mid f \in A\}$  est borné.

2. Montrer qu'une partie  $A \subset C(K, \mathbb{R}^d)$  est relativement compacte si et seulement si toute suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  admet une sous-suite qui converge uniformément vers une limite  $f \in C(K, \mathbb{R}^d)$ .
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que si  $A$  est relativement compacte alors  $A$  est équicontinue.
4. Montrer que  $(P1) \Rightarrow (P2)$ .

On suppose maintenant que  $A$  vérifie (P2). On considère  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $A$ .

5. Soit  $(x_p)_{p \geq 0}$  une suite d'éléments de  $K$ .

- a.** Montrer qu'il existe une suite  $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de fonctions strictement croissantes de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que pour tout  $p \geq 0$ ,  $f_{\psi_p(n)}(x_p)$  converge lorsque  $n$  tend vers l'infini avec  $\psi_0 = \varphi_0$  et  $\psi_p = \psi_{p-1} \circ \varphi_p$  pour  $p \geq 1$ .
- b.** Montrer que pour tout  $p \geq 0$ ,  $f_{\psi_p(n)}(x_p)$  converge lorsque  $n$  tend vers l'infini.
- 6. a.** Montrer que l'on peut extraire de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite qui converge simplement sur  $\mathbb{Q} \cap K$ .  
On admettra que l'on peut écrire  $\mathbb{Q} \cap K = \{x_p, p \in \mathbb{N}\}$ .  
On notera  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  cette extraction.
- b.** On suppose que

$$\overline{\mathbb{Q} \cap K} = K.$$

Pour  $x \in K$ , montrer que  $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  admet une unique valeur d'adhérence notée  $g(x)$  et conclure sur la convergence simple de la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $K$  vers  $g$ .

- 7. a.** Montrer que  $g$  est continue sur  $K$ .
- b.** Montrer que la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $g$  sur  $K$ . (Indication : on pourra raisonner par l'absurde.)
- c.** En déduire que  $(P2) \Rightarrow (P1)$ .

## Partie I. Espaces $l_N^p$ et leur dual.

Dans cette partie,  $p$  et  $q$  sont deux réels strictement supérieurs à 1 vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Soit  $N$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.

- 1.** Soient  $x$  et  $y$  deux réels positifs. Montrer que  $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$ .
- 2.** Soient  $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$  des réels. Montrer que :

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n b_n \right| \leq \left( \sum_{n=1}^N |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{n=1}^N |b_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

On pourra d'abord envisager le cas où  $\sum_{n=1}^N |a_n|^p = \sum_{n=1}^N |b_n|^q = 1$ .

- 3.** En déduire que pour tous réels  $a_1, \dots, a_N$ , on a

$$\left( \sum_{n=1}^N |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^N a_n b_n \right| ; \sum_{n=1}^N |b_n|^q = 1 \right\}.$$

- 4.** Soient  $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$  des réels. Montrer que pour tout  $p \geq 1$ , on a :

$$\left( \sum_{n=1}^N |a_n + b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{n=1}^N |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{n=1}^N |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Indication :  $|a_n + b_n|^p \leq |a_n| \cdot |a_n + b_n|^{p-1} + |b_n| \cdot |a_n + b_n|^{p-1}$  et appliquer 2).

On pose  $\|(a_1, \dots, a_N)\|_\infty = \max_{1 \leq n \leq N} |a_n|$  et on désigne par  $l_N^\infty$  l'espace  $\mathbb{R}^N$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Pour  $p \geq 1$ , on définit  $l_N^p$  comme l'espace  $\mathbb{R}^N$  muni de la norme  $\|(a_1, \dots, a_N)\|_p = \left( \sum_{n=1}^N |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ .

- 5. a.** Soit  $p > 1$ , justifier que  $l_N^p$  est bien un espace vectoriel normé dont le dual  $(l_N^p)^*$  est isométrique à  $l_N^q$ .

Indication : on pourra considérer l'application  $\theta$  de  $l_N^q$  dans  $(l_N^p)^*$  définie par

$$\theta(b)(a) = \sum_{n=1}^N a_n b_n.$$

- b.** Déterminer le dual de  $l_N^1$  et celui de  $l_N^\infty$ .

## Partie II. Hahn-Banach fini-dimensionnel.

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , distinct de  $E$ , et  $f$  une forme linéaire sur  $F$ .

- 1.** Soit  $x_0$  un vecteur de  $E$  n'appartenant pas à  $F$ . On note  $\tilde{F} = F \oplus \mathbb{R}x_0$ .

- a.** Montrer que :  $\forall u, v \in F, f(u) - \|f\| \cdot \|u - x_0\| \leq \|f\| \cdot \|v + x_0\| - f(v)$ , puis :

$$\sup_{v \in F} (f(v) - \|f\| \cdot \|v - x_0\|) \leq \inf_{v \in F} (\|f\| \cdot \|v + x_0\| - f(v)).$$

- b.** En déduire qu'il existe un réel  $\alpha$  tel que pour tout  $v \in F$ , on ait :

$$f(v) + \alpha \leq \|f\| \cdot \|v + x_0\| \quad \text{et} \quad f(v) - \alpha \leq \|f\| \cdot \|v - x_0\|.$$

On pose pour  $x = v + tx_0 \in \tilde{F}$ , où  $v \in F$  et  $t \in \mathbb{R}$  :  $\tilde{f}(x) = f(v) + \alpha t$ .

- c.** Montrer que  $\tilde{f}$  est une forme linéaire continue sur  $\tilde{F}$  dont la restriction à  $F$  est  $f$  et que  $\|f\| = \|\tilde{f}\|$ .

- 2.** Montrer qu'il existe une forme linéaire continue  $g$  sur  $E$ , dont la restriction à  $F$  est  $f$ , telle que  $\|f\| = \|g\|$ .

- 3.** Soit  $x \in E$ . Montrer que  $\|x\| = \sup \{|f(x)|; f \in E^* \text{ avec } \|f\| = 1\}$ .

## Partie III. Distance de Banach-Mazur. Généralités.

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés de même dimension finie. ON définit

$$d(E, F) = \inf \{ \ln (\|u\| \cdot \|u^{-1}\|); u \in GL(E, F) \}.$$

- 1. a.** Montrer que  $0 \leq d(E, F)$ .  
**b.** Montrer que  $d(E, F) = d(F, E)$ .  
**2. a.** Montrer que la borne inférieure est atteinte.  
**b.** En déduire que  $E$  et  $F$  sont isométriques si et seulement si  $d(E, F) = 0$ .  
**3.** Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels normés de même dimension finie. Montrer que

$$d(E, G) \leq d(E, F) + d(F, G).$$

- 4. a.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On définit  $u^*(\zeta) = \zeta \circ u$ , pour  $\zeta \in F^*$ . Montrer que  $u^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$  et que  $\|u\| = \|u^*\|$ .  
**b.** En déduire que  $d(E, F) = d(E^*, F^*)$ .

## Partie IV. Distance de Banach-Mazur entre espaces $l_n^p$ .

On note  $E = l_n^p$  (qui est  $\mathbb{R}^n$  muni de la norme  $\|\cdot\|_p$ ), où  $p \geq 1$  et  $F = l_n^2$ . On note  $\omega_n$  l'ensemble des applications de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\{-1, 1\}$ .

- 1.** Soit  $m$  un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que pour tous  $x_1, \dots, x_m \in F$ , on a :

$$2^{-m} \sum_{\varphi \in \omega_n} \left\| \sum_{i=1}^m \varphi(i) x_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \|x_i\|_2^2.$$

Soit  $u : l_n^p \rightarrow l_n^2$  un isomorphisme. On note  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et

$$A(u) = \sum_{\varphi \in \omega_n} \left\| \sum_{i=1}^n \varphi(i) u(e_i) \right\|_2^2$$

2.
  - a. Montrer que  $A(u) \leq n2^n \|u\|^2$ .
  - b. Montrer que  $A(u) \geq 2^n n^{2/p} \|u^{-1}\|^{-2}$ .
3. Montrer que  $d(l_n^p, l_n^2) \geq \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right| \ln(n)$ .
4.
  - a. Montrer que pour tout  $p' \geq p \geq 1$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a :  $\|x\|_{p'} \leq \|x\|_p$ .
  - b. Montrer que  $d(l_n^p, l_n^2) = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right| \ln(n)$ .  
Indication : on pourra considérer l'identité sur  $\mathbb{R}^n$ .
  - c. Que se passe-t-il pour  $p = \infty$ ?

## Partie V. Distance de Banach-Mazur à $l_N^1$ .

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1 et  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé de dimension  $n$ . On note  $S_E$  la sphère unité de  $E$ .

1. Montrer qu'il existe  $n$  vecteurs  $b_1, \dots, b_n$  de  $E$  de norme 1 et  $n$  formes linéaires  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  de norme (opérateur) égale à 1 telles que pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ , on ait  $\varphi_i(b_j) = 1$  si  $i = j$  et 0 sinon.  
Indication : on pourra considérer l'application :  $\Lambda : S_E \times \dots \times S_E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui à un  $n$ -uplet de vecteurs  $(x_1, \dots, x_n)$  associe leur déterminant dans une base  $\beta$  ; ainsi que l'application, à  $i$  fixé et quand  $\Lambda(x_1, \dots, x_n)$  est non nul, qui à  $x \in E$  associe

$$\frac{\det_{\beta}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\det_{\beta}(x_1, \dots, x_n)}.$$

2. On pose pour tout  $x \in E : \nu(x) = \sum_{i=1}^n |\varphi_i(x)|$ . Montrer que  $\nu$  est une norme sur  $E$  et qu'en notant  $E_1$  l'espace  $E$  muni de cette norme,  $E_1$  et  $l_n^1$  sont isométriques.
3. Montrer que  $d(E, l_n^1) \leq \ln(n)$ .

## Partie VI. Compact de Minkowski

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1, on note  $M_n$  l'ensemble des normes sur  $\mathbb{R}^n$ . On considère l'ensemble  $\mathcal{E}_n$  des espaces vectoriels normés  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ , où  $\|\cdot\| \in M_n$ .

Pour  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{E}_n$ , on définit la relation  $X \mathcal{R} Y$  si  $X$  et  $Y$  sont isométriques.

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{E}_n$ . Justifier la notation  $\hat{d}(\hat{X}, \hat{Y}) = d(X, Y)$  (où  $\hat{X}$ , resp.  $\hat{Y}$ , est la classe de  $X$ , resp. de  $Y$ ) est cohérente.

On note  $\hat{\mathcal{E}}_n$  l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation d'équivalence.

On note  $B_1$  la boule unité (fermée) de l'espace  $l_n^1$  et  $C(B_1)$  est l'espace des fonctions continues sur  $B_1$ , à valeurs réelles, muni de la norme  $N_{\infty}(f) = \sup \{|f(x)| ; x \in B_1\}$ . On note  $\Phi_n$  l'ensemble des fonctions continues sur  $B_1$  qui sont la restriction à  $B_1$  d'une norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$  vérifiant pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\| \leq \|x\|_1$  et  $\|x\|_1 \leq n \|x\|$ .

2.
  - a. Montrer que  $\Phi_n$  est une partie fermée bornée de  $C(B_1)$ .
  - b. Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x, y \in B_1$  :

$$\|x - y\|_1 \leq \delta \Rightarrow \sup \{|f(x) - f(y)| ; f \in \Phi_n\} \leq \varepsilon.$$

**On admet dans la suite que ces deux résultats impliquent que  $\Phi_n$  est une partie compacte de  $C(B_1)$  (Théorème d'Ascoli que l'on adapte du préliminaire).**

3. On considère l'application  $\tau$  de  $\Phi_n$  dans  $\hat{\mathcal{E}}_n$  qui à  $f$  associe la classe de  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme associée à  $f$  par définition de  $\Phi_n$ .  
  - a. Montrer que  $\tau$  est bien définie et surjective.
  - b. Montrer que si  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f$  dans  $\Phi_n$  alors  $\lim_{j \rightarrow \infty} \hat{d}(\tau(f_j), \tau(f)) = 0$ .