60.22M

SESSION 2006

Filière MP (groupes MP/MPI et groupe I)

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Filières MP PC (groupe I)

Épreuve optionnelle commune aux ENS de Paris et Lyon

MATHÉMATIQUES MPI 2

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Tournez la page S.V.P.

Sujet

Notations

Toutes les fonctions considérées dans ce sujet vont de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$.

Une fonction continue u de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ est dite "à support compact" si u est nulle en dehors d'un intervalle borné. En particulier si u est une fonction continue à support compact, $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|\,dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2\,dx$ convergent.

Si u est une fonction continue telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|\,dx$ converge, on définit sa transformée de Fourier $\mathcal{F}u$ par

$$\mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-i\xi x}\,dx.$$

La transformée de Fourier $\mathcal{F}u$ est alors une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$.

On définit de même

$$\mathcal{S}u(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{ixy}\,dx$$

qui est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$.

Si u est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ on note

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)|$$

et

$$\|u\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

ces quantités étant infinies respectivement si u n'est pas bornée ou si $|u|^2$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

On admettra les deux résultats suivants que l'on pourra utiliser en particulier aux questions 1.6 et 2.6: pour toute fonction continue u telle que $\int_{\mathbb{R}} |u(x)|\,dx$ et $\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2\,dx$ convergent on a

$$\|\mathcal{F}u\|_2 = \|u\|_2 \tag{1}$$

et

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}u)(\xi) = u(\xi) \tag{2}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

On admettra le théorème de Fubini :

Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux applications h_1 et h_2 continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |f(x,y)| \leqslant h_1(x)h_2(y)$$

alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ sont convergentes et ces deux intégrales doubles sont égales.

Partie I

1.1) Soit ϕ_0 la fonction définie par $\phi_0(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$ et $\phi_0(x) = 0$ si $x \leq 0$. Montrer que pour $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, $d^k\phi_0/dx^k$ est de la forme $P_k(x)e^{-1/x^2}/Q_k(x)$ où P_k et Q_k sont deux polynômes. En déduire que ϕ_0 est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1.2) Vérifier que $\phi_0(x)\,\phi_0(1-x)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[0,1]$. Montrer que pour tout intervalle $[a,b]$ $(a < b)$ il existe une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement positive sur $]a,b[$ et nulle en dehors de $[a,b]$.

1.3.a) Soit ψ une fonction strictement positive sur $]3/4, 8/3[$, nulle en dehors de cet intervalle. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{q\geq 0} \psi(2^{-q}|x|)$$

ne comporte qu'au plus deux termes non nuls. Soit $\phi(x)$ défini par

$$\phi(x) = \frac{\psi(|x|)}{\psi(2|x|) + \psi(|x|) + \psi(2^{-1}|x|)}$$

si $\psi(|x|) \neq 0$ et par $\phi(x) = 0$ sinon. Montrer

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \phi(2^{-q}|x|) = 1$$

pour $|x| \geq 3/2$.

1.3.b) Montrer qu'il existe deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $\chi(x)$ (paire et nulle en dehors de l'intervalle $[-2,2]$) et $\phi(x)$ (nulle en dehors de l'intervalle $[3/4, 8/3]$) telles que

$$\chi(x) + \sum_{q=0}^{+\infty} \phi(2^{-q}|x|) = 1.$$

1.3.c) Montrer que $\chi^2(x) + \sum_{q=0}^{+\infty} \phi^2(2^{-q}|x|)$ est minoré par une constante strictement positive sur $\mathbb{R}$.

1.4) Soit u une fonction continue à support compact. On définit pour $q \in \mathbb{N}$

$$\Delta_q u = \mathcal{S}\Big(\phi(2^{-q}|\xi|)\,\mathcal{F}u(\xi)\Big)$$

et

$$\Delta_{-1} u = \mathcal{S}\Big(\chi(\xi)\,\mathcal{F}u(\xi)\Big).$$

Vérifier que $\Delta_q u$ et $\Delta_{-1} u$ définissent des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1.5) Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que $\Delta_q u$ peut se mettre sous la forme

$$\Delta_q u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_q(x-y)\,u(y)\,dy \tag{3}$$

où

$$h_q(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2^{-q}|\xi|)\,e^{iz\xi}\,d\xi.$$

1.6) Vérifier que h_q est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $|h_q(x)|$, $|h_q(x)\cdot x|$ et $|h_q(x)\cdot x^2|$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_q(y)dy = 0$$

(on pourra utiliser (2)), et montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} |h_q(y)|dy$ est indépendant de q.

1.7) Montrer que $\Delta_{-1} u$ peut se mettre sous la forme

$$\Delta_{-1} u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y)u(y)dy \tag{4}$$

où g est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Vérifier que $|g(x)|$, $|g(x).x|$ et $|g(x).x^2|$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

1.8) Montrer qu'il existe une constante C (ne dépendant pas de u) telle que pour tout $q \in \mathbb{N}$ on ait

$$\|\Delta_q u\|_\infty \leq C\,\|u\|_\infty$$

et

$$\|(\Delta_q u)'\|_\infty \leq C\,2^q\,\|u\|_\infty$$

(le $'$ désignant la dérivée en x).

Partie II

Pour $0 < \alpha < 1$ on définit l'espace de Hölder $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ comme étant l'ensemble des fonctions continues $u(x)$ telles que

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)| + \sup_{x<y} \frac{|u(y)-u(x)|}{|y-x|^\alpha} < +\infty.$$

2.1) Montrer que $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}$ est une norme sur $\mathcal{C}^{0,\alpha}$.

2.2) Montrer que si $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ et $v \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ alors $uv \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ et

$$\|uv\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \leq C\Big(\|u\|_\infty \|v\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} + \|v\|_\infty \|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}\Big)$$

pour une certaine constante C indépendante de u et de v.

2.3) Est ce que $\mathcal{C}^1$ (ensemble des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}$) est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)| + \sup_{x<y} \frac{|u(y)-u(x)|}{|y-x|} < +\infty?$$

2.4) Soit $\alpha > 1$. Montrer que

$$\Big\{u \in \mathcal{C}^0 \quad | \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)| + \sup_{x<y} \frac{|u(y)-u(x)|}{|y-x|^\alpha} < +\infty\Big\}$$

est l'ensemble des fonctions constantes.

2.5) Soit $0 < \alpha < 1$. Soit $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$. Montrer que les formules (3) et (4) définissent bien des fonctions bornées $\Delta_q u$, et que

$$\sup_{-1\leq q<+\infty} 2^{q\alpha} \|\Delta_q u\|_\infty < \infty.$$

Indication: montrer que pour $q \geq 0$, $\Delta_q u$ peut s'écrire sous la forme

$$\Delta_q u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(u(y) - u(x)\Big) h_q(x-y)dy.$$

2.6) Soit $0 < \alpha < 1$. Soit u une fonction continue à support compact. On suppose que

$$\sup_{q \geq -1} 2^{q\alpha} \|\Delta_q u\|_\infty < +\infty$$

Soit $p \geq 0$. Posons $S_p u = \sum_{q=-1}^{p-1} \Delta_q u$ et $R_p u = \sum_{q=p}^{+\infty} \Delta_q u$.

2.6.1) Montrer que $R_p u$ est bien définie et est une fonction continue et bornée.

2.6.2) Montrer que $\|u - S_p u\|_2$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini (on pourra utiliser (1) et (2)). En déduire que

$$u = \sum_{q=-1}^{\infty} \Delta_q u,$$

c'est-à-dire $u = S_p u + R_p u$.

2.6.3) Montrer qu'il existe une constante C_0 telle que pour tout $q \geq 0$,

$$\|(\Delta_q u)'\|_\infty \leq C_0 2^q \|\Delta_q u\|_\infty.$$

2.6.4) Montrer qu'il existe une constante C_1 telle que pour tout $p \geq 0$,

$$\|(S_p u)'\|_\infty \leq C_1 2^{p(1-\alpha)}.$$

2.6.5) Vérifier

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y| \cdot \|(S_p u)'\|_\infty + 2\|R_p\|_\infty.$$

2.6.6) Montrer que $u \in C^{0,\alpha}$ en choisissant astucieusement p.

Partie III

On note $\mathcal{C}^1_\star$ l'ensemble des fonctions u continues et à support compact sur $\mathbb{R}$ telles que $\sup_{-1 \leq q < +\infty} 2^q \|\Delta_q u\|_\infty < +\infty$.

3.1) Soit $u \in \mathcal{C}^1_\star$. Montrer que

$$|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq |y|^2 \sum_{q<p} \|(\Delta_q u)''\|_\infty + 4 \sum_{q \geq p} \|\Delta_q u\|_\infty.$$

En déduire qu'il existe une constante C telle que

$$|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C|y|$$

pour tous x et y.

3.2) Enoncer et démontrer une réciproque de la question précédente.

3.3) Montrer que si $u \in \mathcal{C}^1_\star$ alors il existe une constante C telle que pour tous x et y tels que $|x - y| < 1$ on ait

$$|u(x) - u(y)| \leq C\,|x - y|\,\big(1 - \log|x - y|\big).$$

3.4) Comparer $\mathcal{C}^1_\star$ et $\mathcal{C}^1$ (pour les fonctions à support compact).