

1 Rappels sur l'ensemble des réels

Définition 1.0.1 (Bornes supérieures, inférieures, minima, maxima) Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. Si A possède un plus grand élément (majorant qui est dans A), on appelle cet élément maximum de A et on le note $\max(A)$. On a : $\max(A) \in A$ et $\forall a \in A, a \leq \max(A)$.
2. Si A possède un plus petit élément (minorant qui est dans A), on appelle cet élément minimum de A et on le note $\min(A)$. On a : $\min(A) \in A$ et $\forall a \in A, a \geq \min(A)$.
3. On dit que x est la borne supérieure de A si c'est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A . On le note $\sup(A)$.
Si A a un plus grand élément, alors $\sup(A) = \max(A)$.
4. On dit que x est la borne inférieure de A si c'est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A . On le note $\inf(A)$.
Si A a un plus petit élément, alors $\inf(A) = \min(A)$.

Remarque 1.0.1 Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, alors : $\forall k \in \mathbb{R}_+, \sup(kA) = k \sup(A)$.

Théorème 1.0.1 (Théorème de la borne supérieure et inférieure) 1. Toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

Dans ce cas il existe une suite (x_n) de A telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sup(A)$.

2. Toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

Dans ce cas il existe une suite (x_n) de A telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \inf(A)$.

2 Normes et distances

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Normes

Définition 2.1.1 (Norme) On appelle norme sur E une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- Positivité : $\forall x \in E, N(x) \geq 0$.
- Séparation : $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
- Homogénéité : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
- Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Proposition 2.1.1 (Norme associée à un produit scalaire) Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$. L'application : $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est une norme.

Proposition 2.1.2 (Quelques normes sur $\mathbb{K}^n$) Sur $\mathbb{K}^n$: pour tout $u = (u_1, \dots, u_n)$ dans $\mathbb{K}^n$, on pose :

$$1. \|u\|_1 = \sum_{k=1}^n |u_k|; \quad 2. \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |u_k|^2}; \quad 3. \|u\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} (|u_k|).$$

Remarque 2.1.1 Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut reprendre les normes précédentes :

$$1. \|A\|_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|; \quad 2. \|A\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\overline{A}A)} = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|^2};$$

(de plus : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$);

$$3. \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|.$$

Proposition 2.1.3 (Quelques normes sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$) Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$: pour tout f dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, on pose :

1. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$ appelée norme de la convergence en moyenne ;
2. $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} (|f(x)|)$;
3. $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$ appelée norme de la convergence en moyenne quadratique.

2.2 Distances

Dans ce paragraphe, $(E, \|\cdot\|)$ désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Définition 2.2.1 (Distance) Soit $(x, y) \in E^2$. La distance entre x et y associée à la norme $\|\cdot\|$ est le réel $d(x, y) = \|x - y\|$.

Définition 2.2.2 (Distance d'un point à une partie non vide) Étant donné une partie A de E et x un élément de E , on appelle distance de x à A la borne inférieure des distances de x à tous les éléments de A (attention : cette borne n'est pas nécessairement atteinte) :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

2.3 Parties bornées

Définition 2.3.1 (Boule ouverte / fermée) Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $\mathcal{B}(a, r) = \{x \in E, d(a, x) < r\}$ est la boule ouverte de centre a et de rayon r .
2. $\bar{\mathcal{B}}(a, r) = \{x \in E, d(a, x) \leq r\}$ est la boule fermée de centre a et de rayon r .
3. $S(a, r) = \{x \in E, d(a, x) = r\}$ est la sphère de centre a et de rayon r .

Définition 2.3.2 (Partie convexe) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $A \subset E$. La partie A est convexe si

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in A.$$

Exemple 2.3.1 Toute boule est convexe.

Définition 2.3.3 (Parties, suites, fonctions bornées) Soient $A \subset E$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et f une fonction d'un ensemble X à valeurs dans E .

1. La partie A est un ensemble borné s'il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in A, \|x\| \leq M$ (autrement dit A est contenue dans une certaine boule fermée. Par exemple ici, on a : $A \subset \bar{\mathcal{B}}(0, M)$).
2. La suite (u_n) est bornée si s'il existe K dans $\mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq K$.
3. La fonction f est bornée si $f(X)$ est une partie bornée de E , c'est-à-dire : il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in X, \|f(x)\| \leq M$.

2.4 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Proposition 2.4.1 (Produit d'espaces vectoriels normés) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$, des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. On pose

$$\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p, \quad N(x) = \max_{1 \leq i \leq p} N_i(x_i).$$

Ainsi $(E_1 \times \dots \times E_p, N)$ est un espace vectoriel normé.

3 Suites d'un espace vectoriel

Définition 3.0.1 (Convergence) Soit (u_n) une suite d'éléments de E et $\ell \in E$. La suite (u_n) converge vers ℓ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - \ell\| = 0$.

Autrement dit : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$.

S'il n'existe pas d'éléments ℓ vérifiant cette propriété, la suite (u_n) diverge

Proposition 3.0.1 (Propriétés sur les suites convergentes) 1. Toute suite (u_n) convergente de E est bornée.

2. Si (u_n) possède une limite alors celle-ci est unique.

3. Si (u_n) et (v_n) convergent vers respectivement ℓ et ℓ' , alors pour tout λ dans $\mathbb{K}$, on a :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + \lambda v_n) = \ell + \lambda \ell'$.

4. Si (u_n) converge vers ℓ , alors $(\|u_n\|)$ converge vers $\|\ell\|$.

Remarque 3.0.1 La convergence dépend de la norme choisie.

Exemple 3.0.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|A\|_2 < 1$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.

Proposition 3.0.2 (Convergence d'une suite dans un produit d'espace) Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. On considère une suite (x_n) de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(p)}) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ si et seulement si pour tout k de $\llbracket 1, p \rrbracket$ la suite $(x_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k .

Proposition 3.0.3 (Sous-suites d'une suite convergente) Soit (u_n) une suite convergeant vers ℓ . Alors, toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ .

Définition 3.0.2 (Valeur d'adhérence) On appelle valeur d'adhérence d'une suite (u_n) tout élément de E qui est limite d'une sous-suite de (u_n) .

4 Limite et continuité

f désigne une application d'une partie A d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|_E)$ dans un e.v.n. $(F, \|\cdot\|_F)$.

4.1 Définition de la limite

Définition 4.1.1 (Limite en un point) Soit $a \in \overline{A}$ et $b \in F$. La fonction f a pour limite b en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon.$$

Si la limite existe, on note ceci $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ou $\lim_a f = b$.

Définition 4.1.2 (Limite avec $b = +\infty$ ou $b = -\infty$) Soit $a \in \overline{A}$. Dans le cas particulier $F = \mathbb{R}$, on parle aussi de limite infinie $b = +\infty$ ou $b = -\infty$ et alors les définitions deviennent respectivement :

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq M$ et on note cela : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq M$ et on note cela : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Définition 4.1.3 (Limite avec $a = +\infty$ ou $a = -\infty$) Dans le cas particulier $E = \mathbb{R}$, on parle aussi de limite infinie en $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ (lorsque A n'est respectivement pas majorée ou minorée) et alors les définitions deviennent respectivement :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \geq M \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon$ et on note cela : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon$ et on note cela : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

Définition 4.1.4 (Limite avec $\|x\|_E \rightarrow +\infty$) On suppose que A n'est pas bornée. On dit que la fonction admet pour limite b lorsque $\|x\|_E \rightarrow +\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, \|x\|_E \geq M \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon.$$

Si la limite existe, on note ceci $\lim_{\|x\|_E \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

Remarque 4.1.1 On a les même opérations sur les limites que pour les suites (combinaison linéaire, espace produit), mais il faut rajouter les opérations de composition.

Définition 4.1.5 (Continuité) Lorsque $a \in A$ et f admet une limite en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Dans ce cas, on dit que la fonction f est continue en a .
La fonction f est continue sur A si f est continue en tout point de A .

Exemple 4.1.1 $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

4.2 Caractérisation par les suites

Proposition 4.2.1 (Caractérisation séquentielle) 1. Soit $a \in \overline{A}$. Soit $f : A \rightarrow F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f tend vers ℓ en a .

(b) Pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a , la suite $(f(x_n))$ converge vers ℓ .
Le cas échéant, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

2. Soit $a \in \overline{A}$. L'application f est continue en a si et seulement si pour toute suite (u_n) de A , telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$.

Exemple 4.2.1 La fonction constante est la seule fonction continue $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :
 $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan}(x))$.

4.3 Applications uniformément continues et lipschitziennes

4.3.1 Uniforme continuité

Définition 4.3.1 (Applications uniformément continues) Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application f d'une partie A de E dans F est dite uniformément continue sur A lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in A^2, \|x - y\|_E \leq \alpha \implies \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Proposition 4.3.1 (Uniforme continuité et continuité) Toute application uniformément continue est continue.

4.3.2 Application Lipschitzienne

Définition 4.3.2 (Fonctions lipschitziennes) Soit $k \in \mathbb{R}_+$. La fonction f est k -lipschitzienne sur une partie A de E si

$$\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

Exemple 4.3.1 1. La norme est une fonction 1-lipschitzienne.

2. Soit $A \subset E$, l'application $x \mapsto d(x, A)$ est lipschitzienne.

Proposition 4.3.2 (Continuité et application lipschitzienne) Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue, donc continue.

4.3.3 Continuité des applications linéaires

Proposition 4.3.3 (Caractérisation des applications linéaires continues) Soient E et F deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E dans F . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $P1 : f$ est continue sur E .
2. $P2 : f$ est continue en 0_E .
3. $P3 : \exists K \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .

Exemple 4.3.2 Soient $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $g \in E$. Alors $f \mapsto \int_0^1 g(t)f(t)dt$. est continue sur E pour les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$.

Définition 4.3.3 (Norme subordonnée) Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire continue. On pose

$$\|f\| = \|f\|_{op} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

Proposition 4.3.4 (Norme subordonnée) L'application $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Exemple 4.3.3 Soit $E = \mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Soit l'endomorphisme

$$u : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i \end{cases}. \text{ Déterminer } \|u\| \text{ pour les normes } \|\cdot\|_2 \text{ et } \|\cdot\|_\infty.$$

Proposition 4.3.5 (Norme subordonnée et norme d'algèbre) Soient G un espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F, G)$. Alors $g \circ f$ est continue et :

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \times \|f\|.$$

On dit que $\|\cdot\|$ est une norme sous-multiplicative ou une norme d'algèbre.

5 Topologie

5.1 Voisinages, intérieur, adhérence

5.1.1 Voisinages

Définition 5.1.1 (Voisinage d'un point) On appelle voisinage d'un point x de E toute partie V de E qui contient une boule ouverte de centre x (rappelons qu'une boule a un rayon strictement positif). On note $\mathcal{V}_E(x)$ ou $\mathcal{V}(x)$ la collection de tous les voisinages de x dans E ; ainsi V est dans $\mathcal{V}_E(x)$ signifie que :

$$\exists r > 0, \quad \forall y \in E, \quad \|y - x\| < r \Rightarrow y \in V.$$

5.1.2 Intérieur

Définition 5.1.2 (Point intérieur) Soient $A \subset E$ et $x \in A$.

1. x est un point intérieur à A s'il existe une boule ouverte non vide centrée en x incluse dans A . C'est-à-dire : $\exists r \in \mathbb{R}_+, B(x, r) \subset A$. Autrement dit x est intérieur à A si A est un voisinage de x .
2. L'intérieur de A , noté $\overset{\circ}{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A .

Exemple 5.1.1 Les points intérieurs de $[0, 1] \cup [3, 7] \cup]8, 9[$ sont $]0, 1[\cup]3, 7[\cup]8, 9[$.

5.1.3 Adhérence

Définition 5.1.3 (Point adhérent) Soient $A \subset E$ et $\ell \in E$.

1. Le vecteur ℓ est un point adhérent à A si toute boule ouverte non vide centrée en ℓ rencontre A : $\forall r > 0, \mathcal{B}(\ell, r) \cap A \neq \emptyset$.
2. L'adhérence de A , notée $\overline{A}$, est l'ensemble des points adhérents à A .

Exemple 5.1.2 L'ensemble des points adhérents de $[0, 1[\cup [3, 7] \cup]8, 9[$ est $[0, 1] \cup [3, 7] \cup [8, 9]$.

Proposition 5.1.1 (Caractérisation séquentielle) Soient $A \subset E$ et $\ell \in E$. Le point ℓ est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers ℓ .
Autrement dit : $\ell \in \overline{A} \Leftrightarrow [\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell]$.

Exemple 5.1.3 Soit A une partie de E .

1. Si A est convexe, alors $\overline{A}$ aussi.
2. $\forall x \in E, d(x, A) = 0 \Rightarrow x \in \overline{A}$.

5.1.4 Frontière

Définition 5.1.4 (Frontière) Soit $A \subset E$. La frontière de A , notée ∂A , est l'ensemble des points de E adhérents mais non intérieurs à A , soit : $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Exemple 5.1.4 $\partial \mathcal{B}(a, r) = \partial \overline{\mathcal{B}}(a, r) = S(a, r)$.

5.2 Parties ouvertes et fermées

5.2.1 Parties ouvertes

Définition 5.2.1 (Partie ouverte) Soit $A \subset E$. La partie A est une partie ouverte de E si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \subset A$.

Exemple 5.2.1 1. Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Soient $\Omega_1, \dots, \Omega_p$ des ouverts de $E_1, \dots, E_p$ respectivement. Alors $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_p$ est un ouvert de $E = E_1 \times \dots \times E_p$.
2. Si A est une partie de E , alors $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de E .

Proposition 5.2.1 (Ouverts et boules) Soient $a \in E$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\mathcal{B}(a, R)$ est un ouvert de E .

Proposition 5.2.2 (Union et intersection d'ouverts) 1. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert : soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts. Alors $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ est un ouvert.

2. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert. Soit $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'ouverts. Alors $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$ est un ouvert.

Proposition 5.2.3 (Lien entre intérieur et ouvert) Une partie A de E est un ouvert de E si et seulement si : $A = \overset{\circ}{A}$.

Proposition 5.2.4 (Image réciproque d'un ouvert par une application continue) Soit E et F deux espaces vectoriels normés et f une application continue de E dans F . Alors :
Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de F , alors $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de E .

Exemple 5.2.2 $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5.2.2 Parties fermées

Définition 5.2.2 (Partie fermée) Une partie F de E est dite fermé dans E si son complémentaire $E \setminus F$ est un ouvert de E .

Exemple 5.2.3 1. Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Soient $F_1, \dots, F_p$ des fermés de $E_1, \dots, E_p$ respectivement. Alors $F = F_1 \times \dots \times F_p$ est un fermé de $E = E_1 \times \dots \times E_p$.
2. Si A est une partie de E , alors $\overline{A}$ est un fermé de E .

Proposition 5.2.5 (Fermés et boules et sphères) 1. Toute boule fermée est un fermé.
2. Toute sphère est un fermé.

Proposition 5.2.6 (Union et intersection de fermés) 1. Une intersection quelconque de fermés est un fermé, autrement dit soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E , alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé de E .
2. Une réunion finie de fermés est un fermé, autrement dit soit $(F_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ une famille finie de fermés de E , alors $\bigcup_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} F_i$ est un fermé de E .

Proposition 5.2.7 (Lien entre adhérence et fermé) Une partie A de E est un fermé dans E si et seulement si $\overline{A} = A$.

Proposition 5.2.8 (Caractérisation séquentielle des fermés) Soit $A \subset E$. La partie A est une partie fermée de E si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A (on appelle cela la caractérisation séquentielle).

Cela revient à dire que A est une partie fermée de E si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ est dans A .

Exemple 5.2.4 $GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 5.2.9 (Image réciproque d'un fermé par une application continue) Soit E et F deux espaces vectoriels normés et f une application continue de E dans F . Alors :

Soit $\mathcal{F}$ un fermé de F , alors $f^{-1}(\mathcal{F})$ est un fermé de E .

Exemple 5.2.5 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y + 4\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

5.3 Parties denses

Définition 5.3.1 (Parties denses) Soit A une partie de E . Une partie D de A est dite dense dans A si $\overline{D} = A$.

Autrement dit pour tout x de A il existe une suite (d_n) à valeurs dans D telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = x$.

Exemple 5.3.1 1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Proposition 5.3.1 (Applications coïncidant sur un ensemble dense) Soient $f : A \rightarrow F$ et $g : A \rightarrow F$ continues telle que : $\forall x \in D, f(x) = g(x)$, avec D une partie dense de A . Alors : $f = g$.

Exemple 5.3.2 Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, puis on étend cela pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5.4 Topologie induite sur une partie

Définition 5.4.1 (Voisinage relatif à une partie) Soient A une partie de E et x un élément de A . Soit V une partie de A . C'est un voisinage relatif de A du point x s'il existe un voisinage $\tilde{V}$ de x dans E tel que : $V = A \cap \tilde{V}$.

Définition 5.4.2 (Ouvert/fermé relatif à une partie) Soit A une partie de E .

1. Soit U une partie de A . C'est un ouvert relatif de A s'il existe un ouvert $\tilde{U}$ de E tel que : $U = A \cap \tilde{U}$.
2. Soit F une partie de A . C'est un fermé relatif de A s'il existe un fermé $\tilde{F}$ de E tel que : $F = A \cap \tilde{F}$.

6 Comparaison de normes

Définition 6.0.1 (Normes équivalentes) Soient N_1 et N_2 deux normes sur E . On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe α, β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Exemple 6.0.1 Sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, Les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Proposition 6.0.1 (Invariances pour des normes équivalentes) Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E .

1. Une partie A de E est bornée pour la norme N_1 si et seulement si elle est bornée pour la norme N_2 .
2. Une suite (u_n) de E converge vers ℓ pour la norme N_1 si et seulement si elle converge vers ℓ pour la norme N_2 .
3. Les ouverts et les fermés de E pour les normes N_1 et N_2 sont les mêmes.

7 Parties compactes

7.1 Définition d'une partie compacte

Définition 7.1.1 (Partie compacte) Une partie A de E est dite compacte lorsque de toute suite d'éléments de A , on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de A . Autrement dit, toute suite de A admet une valeur d'adhérence dans A .

Proposition 7.1.1 (CNS de convergence d'une suite d'éléments d'un compact) Une suite d'éléments d'une partie compacte est convergente si et seulement si elle admet une seule valeur d'adhérence.

Proposition 7.1.2 (Compact implique fermé/borné) Soit A une partie compacte de E . Alors A est fermée et bornée dans E .

Proposition 7.1.3 (Fermé d'un compact) Toute partie fermée F d'une partie compacte A est compacte.

Proposition 7.1.4 (Produit fini de compacts) Soient $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels normés et $A_1, \dots, A_p$ des parties compactes de $E_1, \dots, E_p$. Alors $A_1 \times \dots \times A_p$ est une partie compacte de $E_1 \times \dots \times E_p$.

7.2 Applications continues sur une partie compacte

Proposition 7.2.1 (Image continue d'un compact) Soit E et F deux espaces vectoriels normés et f une application d'une partie compacte A de E dans F . Si f est continue alors $f(A)$ est une partie compacte de F .

En d'autres termes l'image continue d'un compact est un compact.

Théorème 7.2.1 (Théorème des bornes atteintes) Soit A une partie compacte non vide de E d'un espace vectoriel normé et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est bornée et atteint ses bornes.

Exemple 7.2.1 Soient A partie compacte de E et $x \in E$. Alors il existe $x_0 \in A$ tel que : $\|x - x_0\| = d(x, A)$.

Théorème 7.2.2 (Heine) Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Toute application continue sur un compact A de E et à valeurs dans F est uniformément continue sur A .

8 Parties connexes par arcs

A est une partie de E .

8.1 Parties connexes par arcs

Définition 8.1.1 (Chemin) On appelle chemin de A toute application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$, et arc l'ensemble des points de A atteints : $\gamma([0, 1])$. Les points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont appelés extrémités de l'arc.

Définition 8.1.2 (Connexité par arcs) On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur A en posant : $a\mathcal{R}b$ si et seulement s'il existe un chemin continu de A allant de a vers b .

1. Les classes d'équivalence de cette relation d'équivalence sont appelées les composantes connexes par arcs de A .
2. Une partie A de E est dite connexe par arcs lorsqu'elle n'admet qu'une seule composante connexe par arcs. En d'autres termes : pour tous points a et b de A , il existe un arc d'extrémités a et b inclus dans A .

Définition 8.1.3 (Partie étoilée) Une partie A de E est dite étoilée lorsqu'il existe un point a de A tel que pour tout x de A , le segment $[a, x]$ est inclus dans A .

Exemple 8.1.1

1. L'ensemble $\mathbb{R}^*$ admet deux composantes connexes par arcs, à savoir $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Les parties convexes et étoilées sont connexes par arcs.
3. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

8.2 Image continue d'une partie connexe par arcs

Proposition 8.2.1 (Image continue d'une partie connexe par arcs) Soit E et F deux espaces vectoriels normés et f une application continue d'une partie A de E dans F . On suppose que A est connexe par arcs.

Alors $f(A)$ est connexe par arcs dans F .

Exemple 8.2.1 $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Corollaire 8.2.1 (Théorème des valeurs intermédiaires) Soit E un espace vectoriel normé et f une application continue d'une partie connexe par arcs A de E dans $\mathbb{R}$. Alors $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. En d'autres termes si f atteint sur une partie connexe par arcs deux valeurs réelles c et d alors elle atteint sur cette partie toute valeur intermédiaire entre c et d .

9 Résultats spécifiques à la dimension finie

Ici E est de dimension finie.

9.1 Normes et convergence de suites et de séries

Théorème 9.1.1 (Équivalence des normes en dimension finie) *Toutes les normes de E sont équivalentes.*

Corollaire 9.1.1 (Invariances en dimension finie) *La convergence de suite, la limite d'une fonction, la continuité d'une fonction, le caractère borné d'une partie ou d'une fonction, la notion d'ouvert ou de fermé ne dépend pas de la norme choisie.*

Proposition 9.1.1 (Convergence composante par composante) *Soient (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E de dimension finie et $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note*

$$u_n = \sum_{i=1}^p u_{n,i} e_i, \text{ avec les } u_{n,i} \text{ dans } \mathbb{K}.$$

La suite (u_n) est convergente si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la suite $(u_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un

$$\text{scalaire } \ell_i. \text{ Le cas échéant, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sum_{i=1}^p \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,i} \right) e_i = \sum_{i=1}^p \ell_i e_i.$$

Exemple 9.1.1 Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, avec $|\lambda| < 1$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{1-\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 9.1.2 (L'absolue convergence implique la convergence) *Toute série absolument convergente ($\sum \|u_n\|$ converge) est convergente ($\sum u_n$ converge, c'est-à-dire que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n$ existe dans E).*

9.2 Exponentielle

Corollaire 9.2.1 (Série exponentielle de matrice/endomorphisme) • Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La série

$$\sum \frac{A^n}{n!} \text{ converge (absolument) dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ et on pose } e^A = \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}, \text{ que l'on appelle}$$

exponentielle de A .

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge (absolument) dans $\mathcal{L}(E)$ et on pose $e^u = \exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$, que l'on appelle exponentielle de u .

Exemple 9.2.1 Soit $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et calcul de $\exp(A)$.

Proposition 9.2.1 (Exponentielle de matrices/endomorphismes qui commutent) • Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors :

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

- Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $uv = vu$. Alors :

$$\exp(u + v) = \exp(u) \exp(v).$$

Exemple 9.2.2 Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{C}$. Déterminer $\exp(A)$.

Proposition 9.2.2 (Continuité de l'exponentielle) • *L'application $\exp$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans*

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- *L'application $\exp$ est continue dans $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.*

Proposition 9.2.3 (Similitude, spectre et exponentielle)

1. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), P \exp(A) P^{-1} = \exp(PAP^{-1})$.
2. *Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $Sp(\exp(A)) = \{e^\lambda, \lambda \in Sp(A)\}$.*

9.3 Limites et continuité

Proposition 9.3.1 (Composante à composante) *Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F .*

Notons $f = \sum_{i=1}^p \varphi_i e_i$, avec les φ_i des fonctions définies sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. *Soit $a \in \overline{A}$. La fonction f admet une limite en a si et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la fonction φ_i admet une limite en a . Alors, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sum_{i=1}^p \lim_{x \rightarrow a} \varphi_i(x) e_i$.*

Autrement dit si on pose $\ell = \sum_{i=1}^p \ell_i e_i$, avec ℓ_i dans $\mathbb{K}$, alors $\lim_a f = \ell$ si et seulement si pour tout i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, on a $\lim_a \varphi_i = \ell_i$;

2. *Soit $a \in A$. La fonction f est continue en a si et seulement si pour tout i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, la fonction φ_i est continue en a .*
3. *La fonction f est continue sur A si et seulement si pour tout i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, la fonction φ_i est continue sur A .*

Définition 9.3.1 (Fonctions polynomiales) *On dit que $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ est polynomiale si elle est combinaison linéaire de fonctions de la forme $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, avec $k_1, \dots, k_n$ dans $\mathbb{N}$. Autrement dit f est construite par combinaisons linéaires et produits des fonctions $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ avec i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.*

Proposition 9.3.2 (Fonctions polynomiales) *Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{K}^n$.*

Corollaire 9.3.1 (Continuité du déterminant) *L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est continue.*

Exemple 9.3.1 *L'application $\begin{cases} GL_n(\mathbb{K}) & \rightarrow GL_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto M^{-1} \end{cases}$ est continue.*

9.3.1 Continuité des applications linéaires en dimension finie

Théorème 9.3.1 (Applications linéaires) *Soient E et F deux espaces vectoriels avec E de dimension finie. Toute application linéaire de E dans F est lipschitzienne et donc continue.*

Exemple 9.3.2 *Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'application linéaire $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue.*

9.3.2 Applications multilinéaire en dimension finie

Définition 9.3.2 (Application multilinéaire) *Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_p, F$ des espaces vectoriels. On dit qu'une application f définie sur $E_1 \times \dots \times E_p$ à valeur dans F est p -linéaire si pour tout i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, lorsque l'on fixe les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ de $E_1, \dots, E_p$ sauf x_i , alors $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p)$ est linéaire.*

Proposition 9.3.3 (Continuité des application multilinéaires) (Démonstration CCP 58, cas $p = 2$) *Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_p, \|\cdot\|_p), (F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés et $f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ une application p -linéaire. On suppose $E_1, \dots, E_p$ de dimension finie. Alors :*

1. *Il existe K dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \|f(x_1, \dots, x_p)\|_F \leq K \|x_1\|_1 \times \dots \times \|x_p\|_p$.*
2. *f est continue sur $E_1 \times \dots \times E_p$.*

Exemple 9.3.3 *Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $(A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire et donc continue.*

9.3.3 Norme subordonnée de matrices

Définition 9.3.3 (Norme subordonnée pour les matrices) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, muni d'une norme $\|\cdot\|$. On pose :

$$\|A\| = \|A\|_{op} = \sup \left\{ \frac{\|AX\|}{\|X\|}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} \right\}.$$

Proposition 9.3.4 (Propriétés des normes subordonnées matricielles) 1. $A \mapsto \|A\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

Exemple 9.3.4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $(\|A^n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que pour tout λ dans $Sp(A)$, on a $|\lambda| \leq 1$.

9.4 Parties compactes d'un espace vectoriel de dimension finie

Théorème 9.4.1 (Caractérisation des compacts en dimension finie) Les parties compactes d'un espace vectoriel normé E de dimension finie sont ses parties fermées bornées.

Exemple 9.4.1 $[a, b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

Plus généralement, dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ et dans tout espace vectoriel normé de dimension finie, toute boule fermée $\overline{B}(a, R)$ est compacte.

Corollaire 9.4.1 (Suites bornées en dimension finie) On suppose E de dimension finie. Toute suite (u_n) bornée, admet au moins une sous-suite convergente (c'est-à-dire admet au moins une valeur d'adhérence).

Corollaire 9.4.2 (Suites bornées et valeur d'adhérence en dimension finie) On suppose E de dimension finie. Une suite (u_n) bornée converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Proposition 9.4.1 (Sous-espace de dimension finie implique fermé) Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie E (qui n'est pas nécessairement de dimension finie). Alors F est fermé dans E .