Prévision et vérification des performances énergétiques des systèmes

Énergie cinétique d'un système matériel

L'énergie cinétique d'un système matériel E, en mouvement par rapport à un référentiel R, est

$$E_c(E/R)=\frac{1}{2}\int_{M\in E}\vec{V}(M/R)^2 dm \quad \text{en Joule}$$

Si S est un solide indéformable et A et M deux points de ce solide, alors on a

$$E_c(S/R)=\frac{1}{2}\int_{M\in S}\vec{V}(M\in S/R)^2 dm=\frac{1}{2}\int_{M\in S}\vec{V}(M\in S/R).\left(\vec{V}(A\in S/R)+\overrightarrow{MA}\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right)dm$$

$$\text{Donc}\quad E_c(S/R)=\frac{1}{2}.\left(\vec{V}(A\in S/R).\underbrace{\int_{M\in S}\vec{V}(M\in S/R)dm}_{m\vec{V}(G\in S/R)}+\vec{\Omega}(S/R).\underbrace{\int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M\in S/R)dm}_{\vec{\sigma}_A(S/R)}\right)$$

$$\boxed{2\cdot E_{c(S/R)}=\vec{V}_{A\in S/R}\cdot m.\vec{V}_{G\in S/R}+\vec{\Omega}_{S/R}\cdot\vec{\sigma}_{A\in S/R}}$$

$$\boxed{2\cdot E_{c(S/R)}=\{\mathcal{V}_{S/R}\}\boxed{\otimes}\{\mathcal{C}_{S/R}\}}=\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{S/R}\\ \vec{V}_{A\in S/R}\end{matrix}\right\}_A\otimes\left\{\begin{matrix}m.\vec{V}_{G\in S/R}\\ \vec{\sigma}_{A\in S/R}\end{matrix}\right\}_A$$

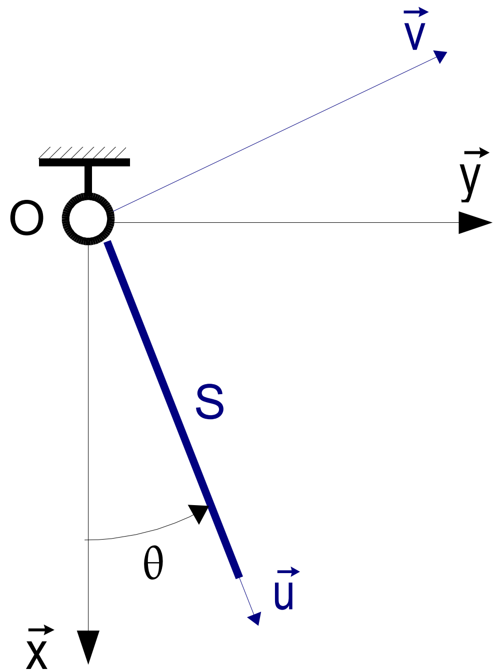
co-moment

Remarque

L'expression de l'énergie cinétique **ne dépend pas du point d'écriture.**

Énergie cinétique d'un système matériel

Déterminer l'énergie cinétique $E_c(S/R)$ de S (masse *m*, homogène, longueur *L*) dans son mouvement par rapport à $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On note G le centre de gravité de S situé à *L*/2.



En G :

En O :

A RETENIR :

Pour calculer l'énergie cinétique, on choisit le point le plus adapté (moins de calculs), donc au centre de gravité G du solide ou au point d'expression de la matrice d'inertie.

Énergie cinétique d'un solide

Puissance d'une action mécanique

Théorème de l'énergie cinétique

Rendement

Cas particuliers de calcul de l'énergie cinétique

Si un solide S est en translation par rapport à R, à la vitesse V

$$E_c(S/R)=\frac{1}{2}\{V(S/R)\}\otimes\{C(S/R)\}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{V}\end{Bmatrix}_{\forall P}\otimes\begin{Bmatrix}m\vec{V}\\ \vec{\sigma}_P(S/R)\end{Bmatrix}_{\forall P}=\frac{1}{2}mV^2$$

Si un solide S est en rotation autour d'un axe $(O,\vec{u})$ par rapport à R

$$E_c(S/R)=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(S/R)\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_O\otimes\begin{Bmatrix}m\vec{V}(G\in S/R)\\ \vec{\sigma}_0(S/R)=I(O,S).\vec{\Omega}(S/R)\end{Bmatrix}_O=\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R).I(O,S).\vec{\Omega}(S/R)$$

En appelant J l'inertie de S autour de l'axe $(O,\vec{u})$ et ω la vitesse angulaire

$$E_c(S/R)=\frac{1}{2}J\omega^2$$

En utilisant le centre de gravité G du solide S

$$E_c(S/R)=\frac{1}{2}\left(m\vec{V}(G\in S/R)^2+\vec{\Omega}(S/R).I(G,S).\vec{\Omega}(S/R)\right)$$

Énergie cinétique d'un ensemble de solides

$$\boxed{E_{c(\Sigma/R)} = \sum_{i=1}^{n} E_{c(S_i/R)} = E_{c(S_1/R)} + E_{c(S_2/R)} + \cdots + E_{c(S_n/R)}}$$

Énergie cinétique d'un solide

Puissance d'une action mécanique

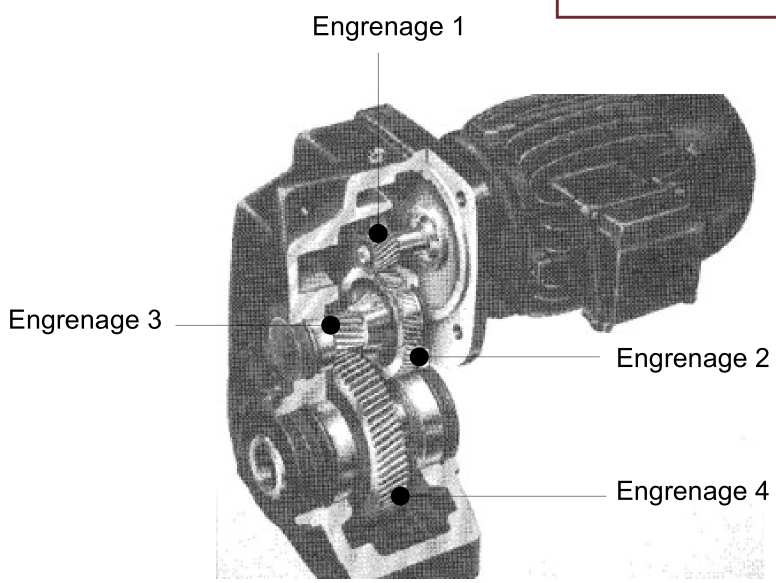
Théorème de l'énergie cinétique

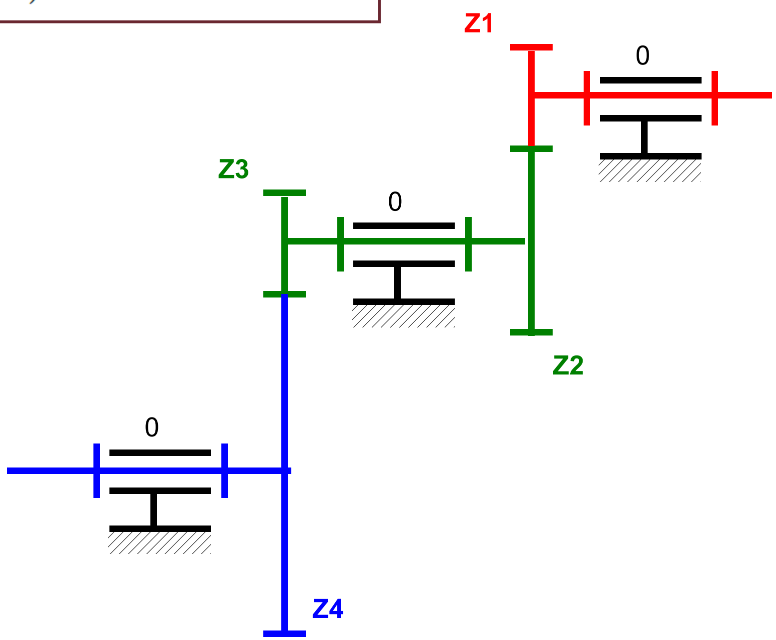
Rendement

Inertie (masse) équivalente

L'inertie équivalente d'un mécanisme ramenée sur l'axe du moteur est l'inertie d'un solide équivalent en rotation sur l'axe du moteur, dont l'énergie cinétique est égale à l'énergie cinétique du mécanisme dans son ensemble.

$$\boxed{2 \cdot E_{c(\Sigma/R)} = I_{eq\Delta} \cdot \omega_{\Delta}^{2}}$$



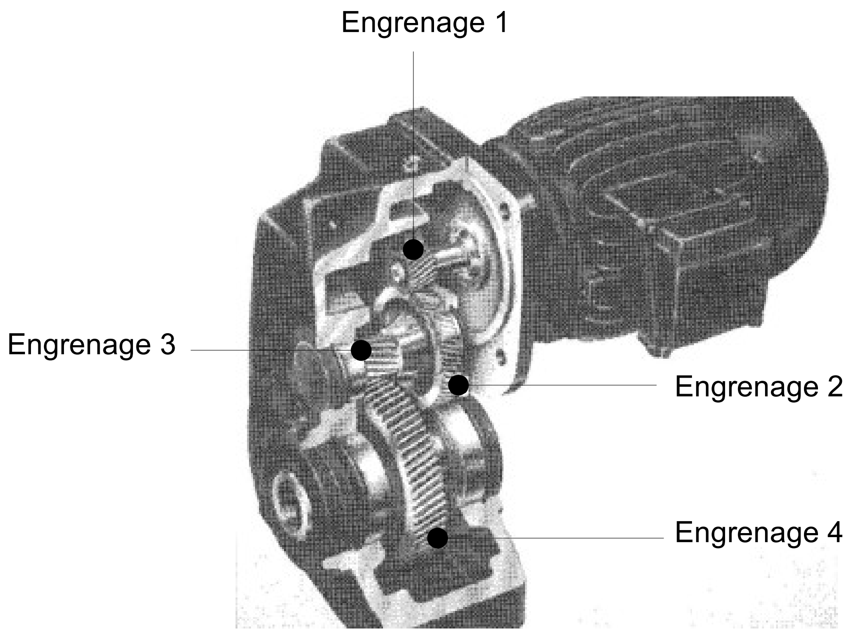


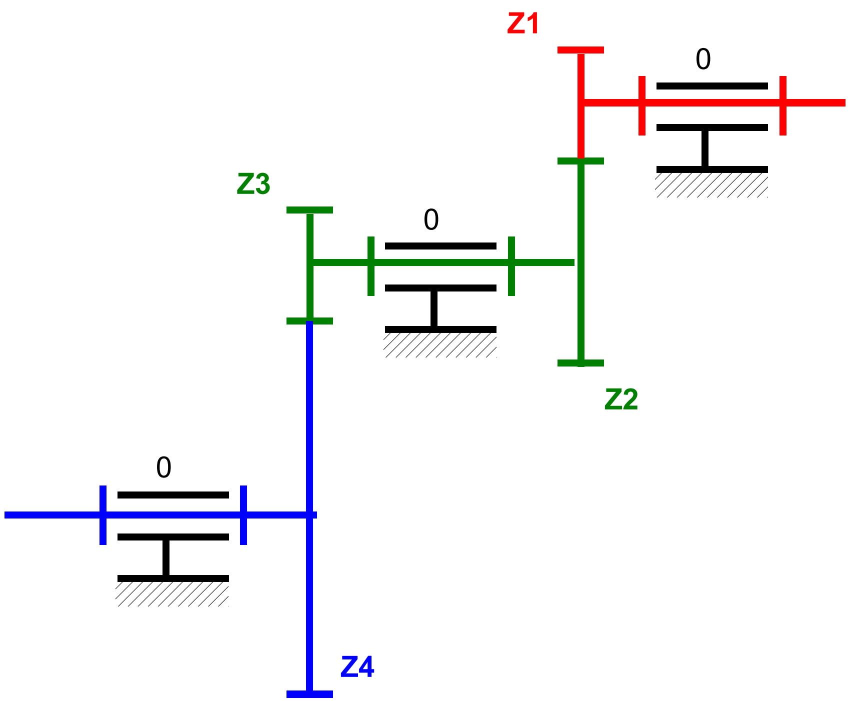
La masse équivalente d'un mécanisme ramenée sur l'axe de translation de l'actionneur linéaire (vérin, moteur linéaire …) est la masse d'un solide équivalent en translation sur l'axe de l'actionneur, dont l'énergie cinétique est égale à l'énergie cinétique du mécanisme dans son ensemble.

$$\boxed{2 \cdot E_{c(\Sigma/R)} = M_{eq_{\Delta}} \cdot V_{\Delta}^{2}}$$

Énergie cinétique

Inertie (masse) équivalente





Déterminer la loi entrée-sortie de ce mécanisme $\frac{\omega_4}{\omega_1}$.

En notant J_1, J_{23} et J_4 les inerties des pièces 1, {2+3} et 4 selon leurs axes de rotation respectifs, exprimer l'énergie cinétique de l'ensemble {1+2+3+4} dans son mouvement par rapport à 0.

Déterminer l'inertie équivalente de l'ensemble {1+2+3+4} ramenée sur l'axe du moteur, notée J_{eq}.

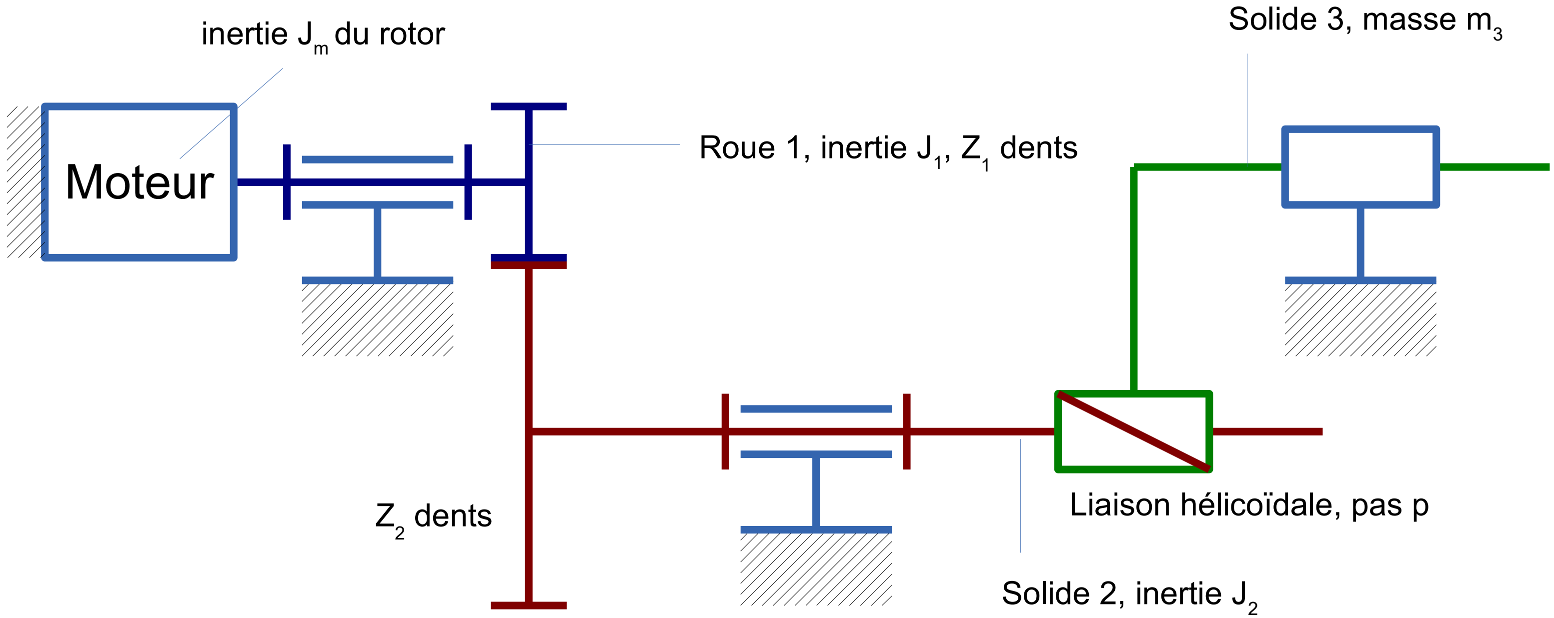
Énergie cinétique d'un solide

Puissance d'une action mécanique

Théorème de l'énergie cinétique

Rendement

Inertie (masse) équivalente



Déterminer l'inertie équivalente du mécanisme, ramenée sur l'axe du moteur, notée J_{eq}.

A RETENIR :

L'inertie équivalente, ramenée à l'arbre moteur, d'un solide S en rotation après un réducteur de rapport k tel que $\omega_s = k.\omega_e$, est égale à l'inertie de S multipliée par k².

Puissance d'une action mécanique

Puissance développée par une action mécanique

Si S est un solide indéformable, alors on a

$$\boxed{P_{\bar{S}\to S/R} = \{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\}} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{\bar{S}\to S} \\ \overrightarrow{M}_{A,\bar{S}\to S} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \\ \overrightarrow{V}_{A\in S/R} \end{array} \right\}_A$$

Elle s'exprime en Watt.

Remarque

La puissance exprimée n'a de sens **que par rapport à un repère**. Ainsi la puissance développée par l'action mécanique extérieure $\bar{S}$ sur S est nulle dans tout repère lié à (S), car $\{\mathcal{V}_{S/R}\} = \{0\}$.

On parle de puissances galiléennes, lorsque celles-ci sont calculées par rapport au repère galiléen lié au bâti du mécanisme. C'est très souvent le cas.

Puissance d'une action mécanique

Cas particuliers

Si $\left\{T_{\bar{S}\to S}\right\}=\begin{Bmatrix}\vec{R}_{\bar{S}\to S}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_O$ est un glisseur, $P\left(\bar{S}\to S/R\right)=\vec{R}_{\bar{S}\to S}.\vec{V}\left(O\in S/R\right)$

Si $\left\{T_{\bar{S}\to S}\right\}=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{C}\end{Bmatrix}_O$ est un couple, $P\left(\bar{S}\to S/R\right)=\vec{C}.\vec{\Omega}\left(S/R\right)$

Si un solide S est en translation par rapport à R, à la vitesse V

$\left\{V\left(S/R\right)\right\}=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{V}\end{Bmatrix}_O$ et $P\left(\bar{S}\to S/R\right)=\vec{R}_{\bar{S}\to S}.\vec{V}$

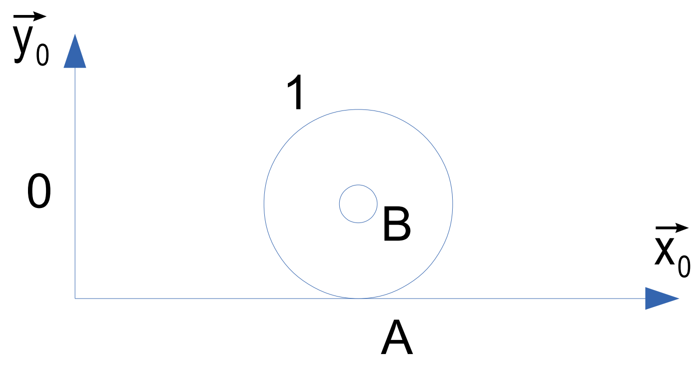
Si un solide S est en rotation autour d'un axe $\left(O,\vec{u}\right)$ par rapport à R

$\left\{V\left(S/R\right)\right\}=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}\left(S/R\right)\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_O$ et $P\left(\bar{S}\to S/R\right)=\vec{M}_O\left(\bar{S}\to S\right).\vec{\Omega}\left(S/R\right)$

Puissance d'une action mécanique

Puissance développée par une action mécanique

Exemple : une roue qui roule sur le sol. A est le point de contact.



$$\{V(1/0)\}=\begin{Bmatrix}\omega\vec{z}_0\\ V\vec{x}_0\end{Bmatrix}_B \qquad \{T(0\to1)\}=\begin{Bmatrix}N\vec{y}_0+T\vec{x}_0\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A$$

Calculer $P(0\to1/0)$

Calculer $P(0\to1/1)$

Refaire le calcul si 1 roule sans glisser sur 0 en A.

Puissance d'une action mécanique

Puissance des inter-efforts entre 2 solides

Si deux solides E_1 et E_2 sont en liaison, la puissance développée dans la liaison est $$\boxed{P_{E_1 \leftrightarrow E_2} = P_{E_1 \to E_2/R} + P_{E_2 \to E_1/R}}$$

Remarque : on prend en général un repère associé à un des 2 solides pour n'avoir qu'une puissance à calculer.

Si deux solides E_1 et E_2 (de repères associés R_1 et R_2) sont en liaison, la puissance développée dans la liaison est

$$P(E_1 \leftrightarrow E_2) = \{T(E_1 \to E_2)\} \otimes \{V(E_2/R_1)\} = \{T(E_2 \to E_1)\} \otimes \{V(E_1/R_2)\}$$

Elle est indépendante d'un quelconque repère, par définition.

Elle est appelée aussi, puissance intérieure ou puissance mutuelle.

Si la puissance intérieure est négative, cela signifie qu'il s'agit d'une puissance perdue (par frottement).

Puissance d'une action mécanique

Puissance des inter-efforts dans une liaison parfaite

Une liaison entre deux solides est dite parfaite si la puissance dissipée par les inter-efforts entre ces deux solides est nulle, quel que soit le torseur cinématique compatible avec la liaison.

Exemple pour la liaison pivot d'axe O,x

$$P\left(E_1 \leftarrow\rightarrow E_2\right) =$$

A RETENIR :

Dans le cas de liaisons parfaites, la puissance des inter-efforts (intérieure) est nulle.

Puissance d'une action mécanique

Puissance développée dans un contact ponctuel

Si deux solides S_1 et S_2 sont en contact ponctuel (avec ou sans frottement) et qu'ils roulent sans glisser l'un sur l'autre, la puissance des inter-efforts est nulle.

En effet, $P(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{T(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{V(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \underbrace{\vec{0}}_{\text{0 car contact ponctuel}} \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_2) \\ \underbrace{\vec{0}}_{\text{0 car roulement sans glissement}} \end{Bmatrix}_A = 0$

Théorème de l'énergie cinétique

Utilisation du TEC (TEP en physique)

TEC ≡ PFD ?

Le TEC fournit une seule équation = combinaison des 6 équations issues du PFD pour un isolement donné.

Quand utiliser le TEC ?

Pour obtenir une seule équation couplant les efforts extérieurs et les paramètres cinétiques ou une seule équation de mouvement (problème à un paramètre pilote = 1 DDL).

Théorème de l'énergie cinétique

Cas d'un solide

Soit S un solide en mouvement par rapport à un repère galiléen R. On a

$$\frac{d}{dt}E_c(S/R)=P(\overline{S}\rightarrow S/R)$$

En effet, d'après le PFD, on a

$$\{D(S/R)\}=\{T(\overline{S}\rightarrow S)\} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \int_{M\in S}\vec{\Gamma}(M\in S/R)\,dm=\int_{M\in S}\vec{df}(M) \\ \int_{M\in S}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{\Gamma}(M\in S/R)\,dm=\int_{M\in S}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{df}(M) \end{cases}$$

Or $\frac{d}{dt}E_c(S/R)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{M\in S}\vec{V}(M\in S/R)^2\,dm\right)=\int_{M\in S}\vec{V}(M\in S/R).\vec{\Gamma}(M\in S/R)\,dm$

Donc $\frac{d}{dt}E_c(S/R)=\int_{M\in S}\vec{V}(O\in S/R).\vec{\Gamma}(M\in S/R)\,dm+\int_{M\in S}\left(\overrightarrow{MO}\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right).\vec{\Gamma}(M\in S/R)\,dm$

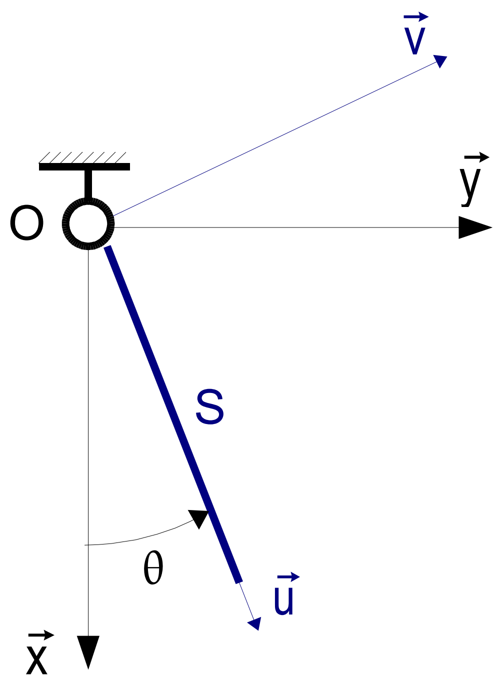
Donc $\frac{d}{dt}E_c(S/R)=\vec{V}(O\in S/R).\int_{M\in S}\vec{\Gamma}(M\in S/R)\,dm+\vec{\Omega}(S/R).\int_{M\in S}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{\Gamma}(M\in S/R)\,dm$

Donc $\frac{d}{dt}E_c(S/R)=\vec{V}(O\in S/R).\underbrace{\int_{M\in S}\vec{df}(M)}_{\vec{R}(\overline{S}\rightarrow S)}+\vec{\Omega}(S/R).\underbrace{\int_{M\in S}\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{df}(M)\right)}_{\overrightarrow{M_O}(\overline{S}\rightarrow S)}=P(\overline{S}\rightarrow S/R)$

Théorème de l'énergie cinétique

Cas d'un solide

Déterminer la loi de mouvement par le TEC appliqué à la barre S (masse *m*, homogène, longueur *L*).

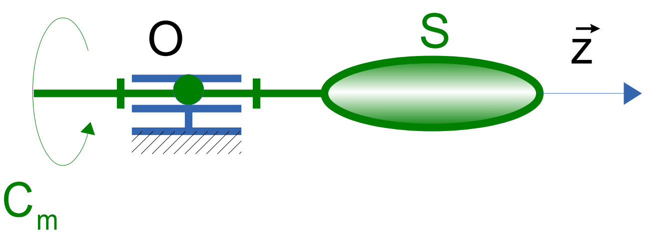


Linéariser l'équation lorsque θ est petit et en déduire l'équation différentielle traduisant l'évolution de l'angle θ en fonction du temps.

Théorème de l'énergie cinétique

Cas d'un solide

Soit S un solide en rotation autour de l'axe $(O,\vec{z})$. Il est soumis à un couple moteur C_m.



On a $I(O,S)=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$

Déterminer la loi de mouvement par le TEC appliqué à S.

Théorème de l'énergie cinétique

Cas d'un ensemble de solides

Soit $\sum$ un ensemble de solides en mouvement dans un repère galiléen R. On a

$$\frac{d}{dt} E_c(\Sigma/R) = P_{ext} + P_{int}$$

$P_{ext} = P(\bar{\Sigma} \to \Sigma/R)$

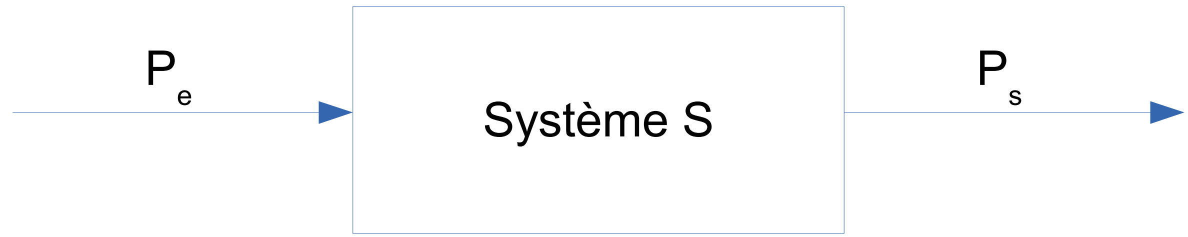
P_{int} est l'ensemble des puissances des inter-efforts entre tous les constituants de $\sum$

Méthode de résolution

1. Calculer l'énergie cinétique du solide ou de l'ensemble de solides ;
2. Faire l'inventaire des actions mécaniques extérieures ;
3. Calculer les puissances galiléennes des actions mécaniques extérieures ;
4. Calculer les puissances des inter-efforts ;
5. Appliquer le TEC.

Rendement

Rendement d'un système en <u>régime permanent</u>



Soit S est un système. La puissance fournie en entrée à S est notée P_e. La puissance fournie en sortie est notée P_s.

En régime permanent, on a :

$$\frac{d}{dt} E_c(S/R) = P_{ext} + P_{int} = 0$$

On définit le rendement de S par $\eta = \frac{P_s}{P_e}$ (*)

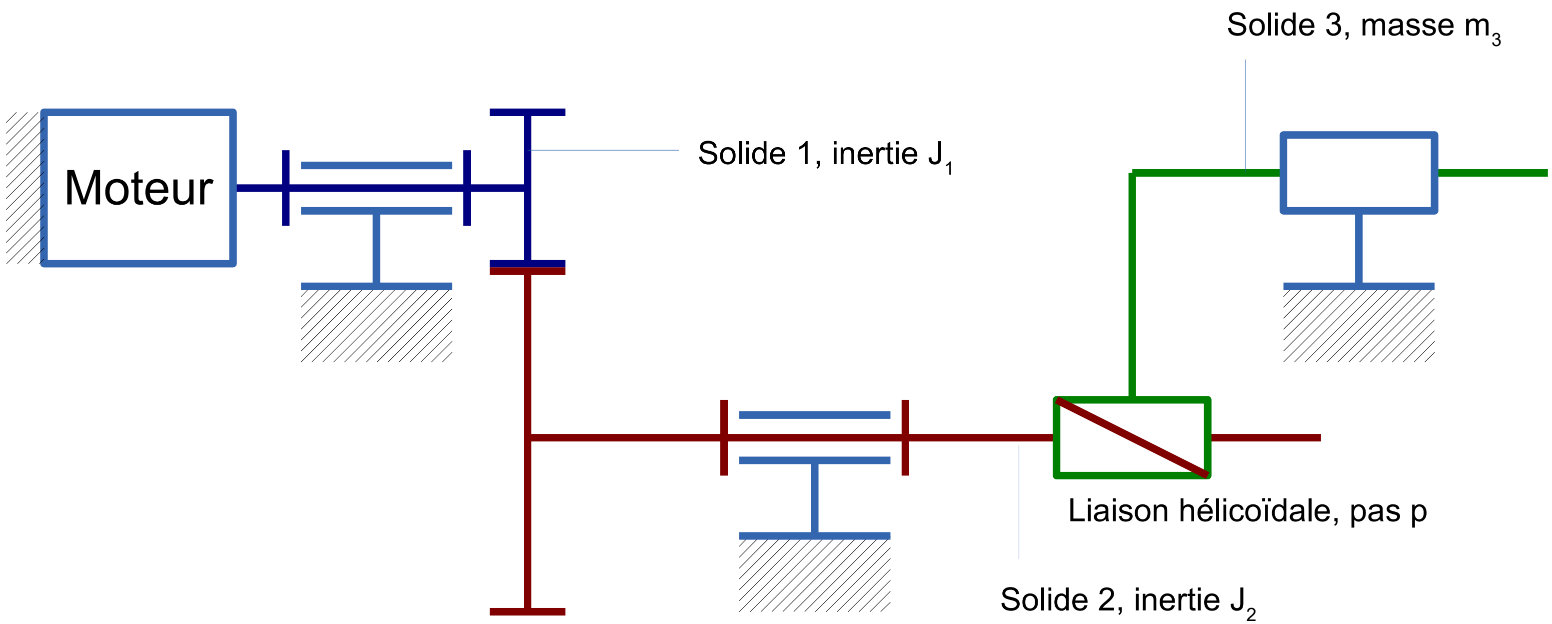
La puissance perdue (souvent par frottement) dans S est

$$P_e - P_s = (1-\eta) P_e$$

* Formule valable en régime permanent. Sinon, rajouter $\frac{d}{dt} E_c$ à P_s.

Rendement

Rendement d'un système en régime permanent



On doit déplacer le solide 3 à 12 cm/s. Il subit un effort résistant de 150 N. La liaison hélicoïdale a un rendement de 0,8 et le système d'engrenage a un rendement de 0,95. Calculer la puissance que le moteur doit fournir.