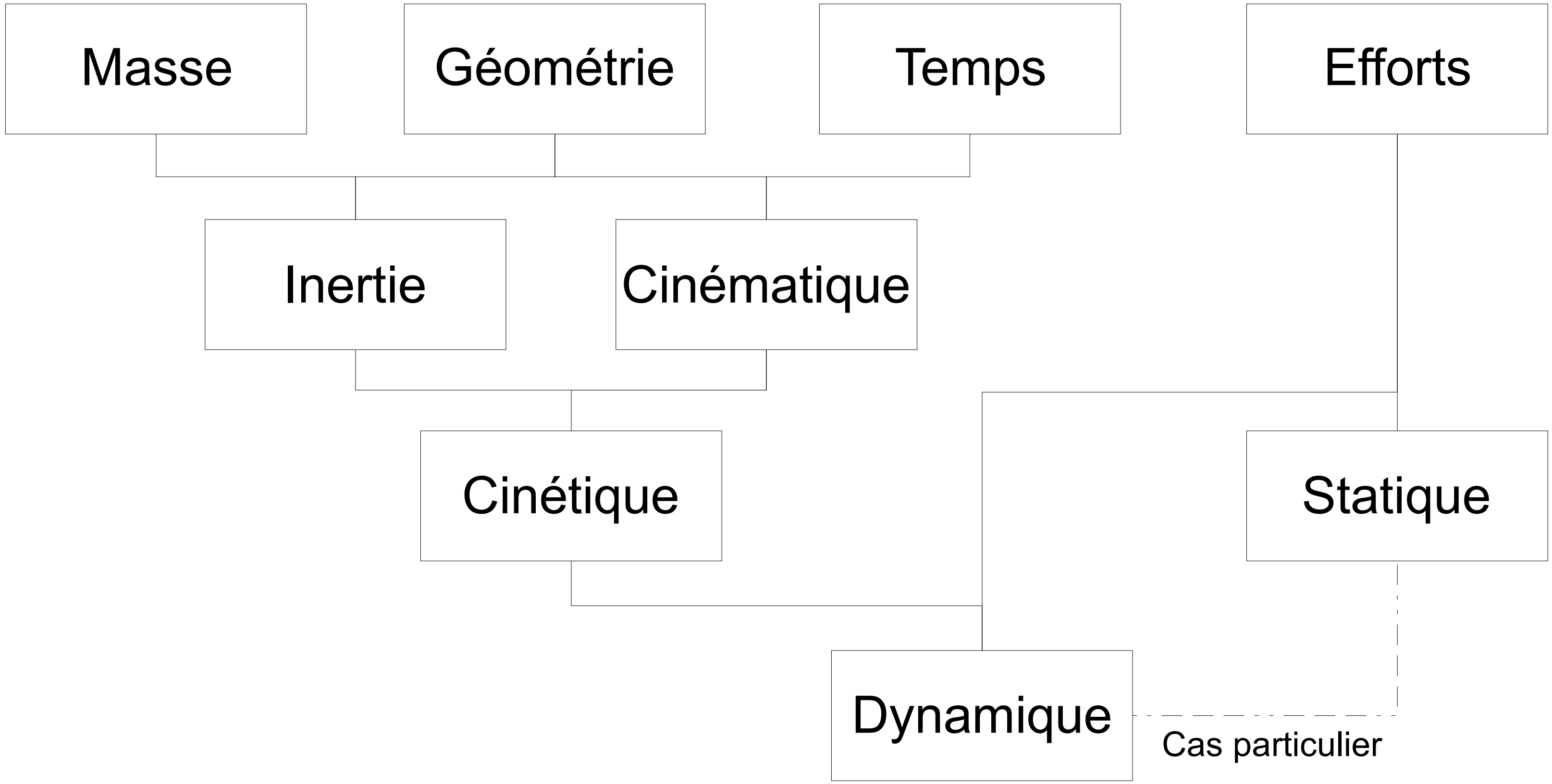
Modélisation et prévision des performances cinétiques et dynamiques des systèmes

Bilan des différentes études



La dynamique permet la résolution de 2 types de problème :

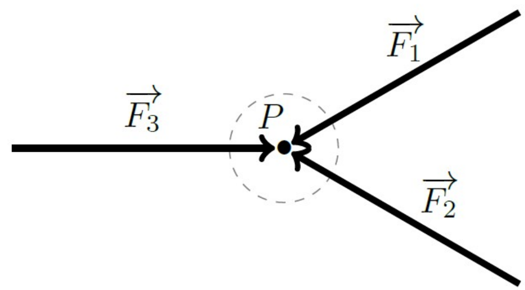
- les efforts sont connus … et on souhaite déterminer les mouvements ;
- les mouvements sont connus (imposés) … et on souhaite déterminer les actions mécaniques nécessaires.

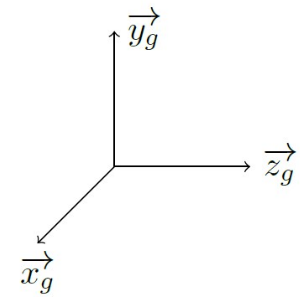
Hypothèses :

- Solides indéformables ;
- Repère galiléen ;
- Système à masse conservative.

Principe Fondamental de la Dynamique

Cas du point matériel (Physique)



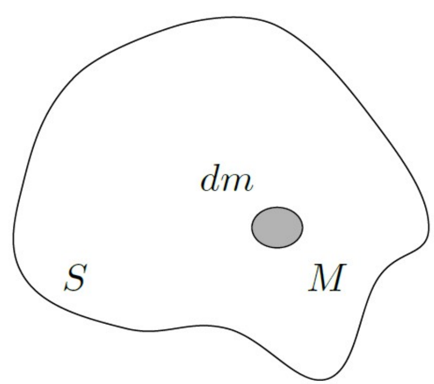


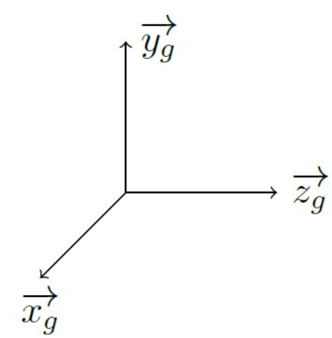
Soit P un point matériel de masse *m*, le PFD appliqué à *m* s'écrit :

$$\boxed{\exists R_g \quad tq \quad : \quad \sum \vec{F}_{ext \to P} = m \cdot \vec{\Gamma}_{P/R_g}} \qquad \sum \vec{M}_{P,ext \to P} = \vec{0}$$

Cas du solide (SI)

Solide = ensemble de points matériels de masse *dm*.

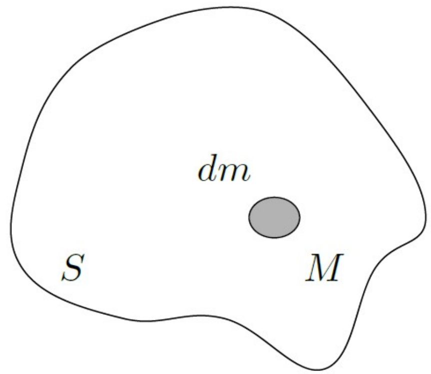


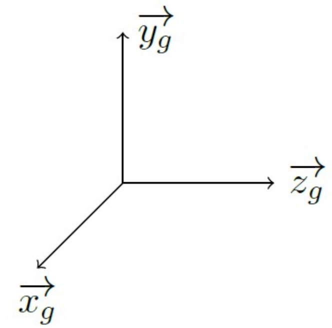


$$\exists R_g tq \quad \forall M \in S \quad : \quad \sum \vec{F}_{ext \to M} = dm \cdot \vec{\Gamma}_{M \in S/R_g} \qquad \sum \vec{M}_{M,ext \to M} = \vec{0}$$

Principe Fondamental de la Dynamique

Cas du solide





Théorème de la résultante dynamique appliqué à S (TRD)

Idée :

Intégrer sur tout le solide.

$$\int_S \sum \vec{F}_{\text{ext}\to M} = \int_S dm.\vec{\Gamma}_{M\in S/R_g}$$

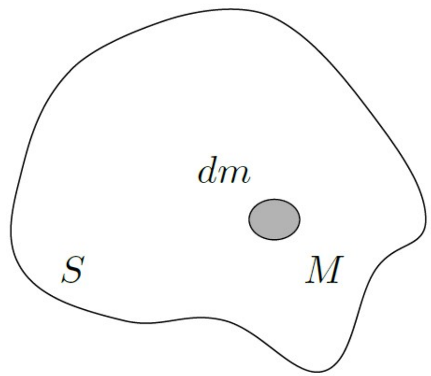
$$\int_S \sum \vec{F}_{\text{ext}\to M} = \sum \vec{F}_{\text{ext}\to S} \qquad \text{et} \qquad \int_S dm.\vec{\Gamma}_{M\in S/R_g} = m.\vec{\Gamma}_{G\in S/R_g}$$

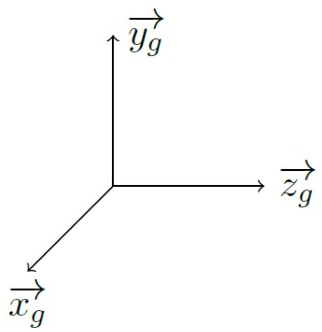
$$\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}\to S} = m.\vec{\Gamma}_{G\in S/R_g}}$$

À connaître par cœur !!!

Principe Fondamental de la Dynamique

Cas du solide





Théorème du moment dynamique appliqué à S en A (TRD)

Idée :

Intégrer sur tout le solide en un point quelconque A.

$$\int_S \sum \overrightarrow{M}_{M,\text{ext}\to M} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{M}_{A,\text{ext}\to M} + \int_S \overrightarrow{MA} \wedge dm.\overrightarrow{\Gamma}_{M\in S/R_g} = \overrightarrow{0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M}_{A,\text{ext}\to S} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{M\in S/R_g} \cdot dm}$$

Inutilisée sous cette forme !!!

Bilan des différentes études

PFD

Cinétique

Matrice d'inertie

Méthode de résolution

Équation de mouvement

Équilibrages d'un solide

Torseur dynamique

Le torseur dynamique d'un solide S en mouvement par rapport à R_g s'écrit :

$$\{\mathcal{D}_{S/R_g}\} = \left\{ \begin{matrix} \underbrace{\vec{R}_{d,S/R_g} = \int_S \vec{\Gamma}_{M\in S/R_g} \cdot dm = m.\vec{\Gamma}_{G\in S/R_g}}_{\text{Résultante dynamique}} \\ \underbrace{\vec{\delta}_{A\in S/R_g} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{M\in S/R_g} \cdot dm}_{\text{Moment dynamique}} \end{matrix} \right\}_A$$

La résultante du torseur dynamique est appelée aussi **quantité d'accélération**.

Ce torseur vérifie bien évidemment la formule du changement de point (formule de Varignon, ou de BABAR).

$$\boxed{\vec{\delta}_{B\in S/R_g} = \vec{\delta}_{A\in S/R_g} + \overrightarrow{BA} \wedge m.\vec{\Gamma}_{G\in S/R_g}}$$

Bilan des différentes études

PFD

Cinétique

Matrice d'inertie

Méthode de résolution

Équation de mouvement

Équilibrages d'un solide

Énoncé du PFD

Il s'agit d'un principe, énoncé par Isaac Newton en 1687.

Cas d'un solide S

Il existe un repère galiléen R_g, tel que :

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{\text{ext}\rightarrow S}\right\}_A = \left\{\mathcal{D}_{S/R_g}\right\}_A}$$

Le repère de Copernic (centré sur le soleil, pointant les étoiles à l'infini) est un bon R_g pour étudier les astres (utilisé en physique.

La Terre est un bon R_g pour étudier les systèmes industriels courants utilisé en SI).

Cas d'un ensemble de solides

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{\text{ext}\rightarrow\sum}\right\}_A = \left\{\mathcal{D}_{S_1/R_g}\right\}_A + \left\{\mathcal{D}_{S_2/R_g}\right\}_A + \left\{\mathcal{D}_{S_3/R_g}\right\}_A + \ldots + \left\{\mathcal{D}_{S_n/R_g}\right\}_A}$$

Principe Fondamental de la Dynamique

Torseur dynamique

$$\{\mathcal{D}_{S/R_g}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{d,S/R_g} = \int_S \vec{\Gamma}_{M\in S/R_g} \cdot dm = m.\vec{\Gamma}_{G\in S/R_g} \\ \vec{\delta}_{A\in S/R_g} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{M\in S/R_g} \cdot dm \end{Bmatrix}_A$$

Résultante dynamique :
Déterminable en calculant le vecteur accélération (cinématique).

Moment dynamique :
?????? → Cinétique

Bilan des différentes études

PFD

Cinétique

Matrice d'inertie

Méthode de résolution

Équation de mouvement

Équilibrages d'un solide

Torseur cinétique

Le torseur cinétique d'un solide S en mouvement par rapport à R_g s'écrit :

$$\{\mathcal{C}_{S/R_g}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_{S/R_g} = \int_S \vec{V}_{M\in S/R_g} \cdot dm = m.\vec{V}_{G\in S/R_g} \\ \vec{\sigma}_{A\in S/R_g} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{M\in S/R_g} \cdot dm \end{array} \right\}_A$$

Résultante cinétique [kg.m/s] Déterminable avec la cinématique

Moment cinétique [kg.m²/s] ??????

La résultante du torseur cinétique est appelée aussi **quantité de mouvement**.

Ce torseur vérifie aussi la formule du changement de point (formule de Varignon, ou de BABAR).

$$\boxed{\vec{\sigma}_{B\in S/R_g} = \vec{\sigma}_{A\in S/R_g} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{P}_{S/R_g}}$$

Bilan des différentes études
PFD
Cinétique
Matrice d'inertie
Méthode de résolution
Équation de mouvement
Équilibrages d'un solide

Calcul pratique du moment cinétique

On a : $\vec{\sigma}_{A\in S/R_g} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{M\in S/R_g} \cdot dm$

Or : $\vec{V}_{M\in S/R_g} = \vec{V}_{A\in S/R_g} + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_g}$

D'où : $\vec{\sigma}_{A\in S/R_g} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{A\in S/R_g} \cdot dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{\Omega}_{S/R_g} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot dm$

Et enfin :

$\vec{\sigma}_{A\in S/R_g} = m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A\in S/R_g} + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{\Omega}_{S/R_g} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot dm$

On appelle matrice d'inertie (opérateur d'inertie) du solide S au point A, l'opérateur défini par :

$$\vec{u} \mapsto \bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot dm$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_{A\in S/R_g} = \bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\vec{\Omega}_{S/R_g} + m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A\in S/R_g}}$$

Matrice d'inertie

Matrice d'inertie d'un solide S dans la base *b*

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(A,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_b}$$

La matrice d'inertie (opérateur d'inertie) permet de **synthétiser les caractéristiques inertielles d'un solide**. Il permet de **décrire la répartition des masses dans le solide par rapport aux axes de la base**.

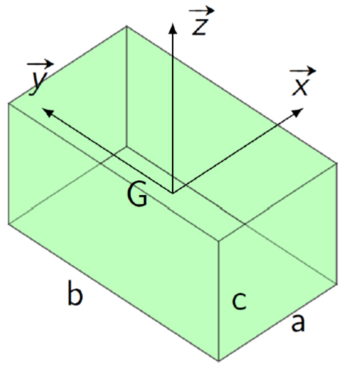
$$\overrightarrow{AM} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z}$$

Calcul des éléments de la matrice d'inertie I(A,S)

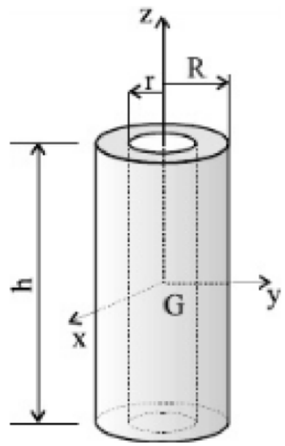
Moments d'inertie $(\mathrm{kg \cdot m^2})$	Produits d'inertie $(\mathrm{kg \cdot m^2})$
$A = \int_S (y^2 + z^2) \cdot dm$	$D = \int_S yz \cdot dm$
$B = \int_S (x^2 + z^2) \cdot dm$	$E = \int_S xz \cdot dm$
$C = \int_S (x^2 + y^2) \cdot dm$	$F = \int_S xy \cdot dm$

Matrice d'inertie

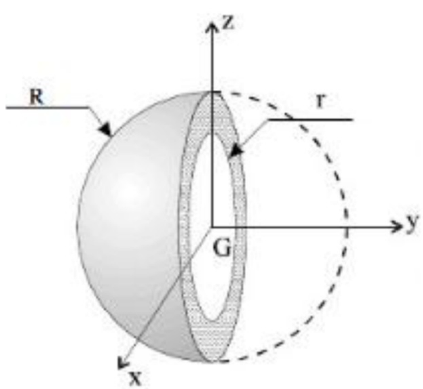
Matrice d'inertie de quelques solides usuels



$$\bar{\bar{I}}_{(G,S)} = \begin{pmatrix} m.\dfrac{b^2+c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m.\dfrac{a^2+c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m.\dfrac{a^2+b^2}{12} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



$$\bar{\bar{I}}_{(G,S)} = \begin{pmatrix} m.\dfrac{R^2+r^2}{4}+m.\dfrac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m.\dfrac{R^2+r^2}{4}+m.\dfrac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m.\dfrac{R^2+r^2}{2} \end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$$



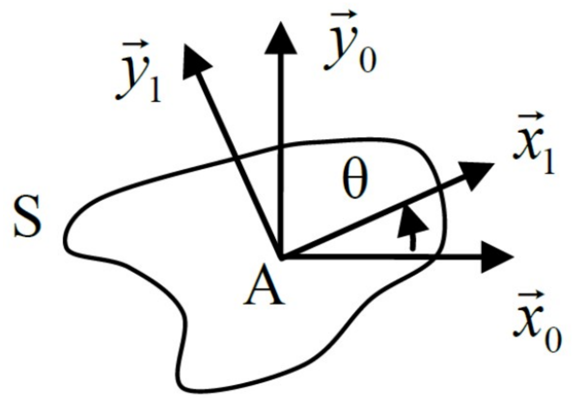
$$\bar{\bar{I}}_{(G,S)} = \begin{pmatrix} \dfrac{2m}{5}.\dfrac{R^5-r^5}{R^3-r^3} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2m}{5}.\dfrac{R^5-r^5}{R^3-r^3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2m}{5}.\dfrac{R^5-r^5}{R^3-r^3} \end{pmatrix}_{(-,-,-)}$$

Matrice d'inertie

$$\boxed{\vec{\sigma}_{A\in S/R_g} = \bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\vec{\Omega}_{S/R_g} + m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A\in S/R_g}}$$

Exprimés dans la même base !!!!

Changement de bases d'une matrice d'inertie



Matrice de changement de bases (de passage) :

$$P_{b_0\to b_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } P^{-1}_{b_0\to b_1} = P^{t}_{b_0\to b_1}$$

$$\bar{\bar{I}}_{(A,S,b_1)} = P^{-1}_{b_0\to b_1}.\bar{\bar{I}}_{(A,S,b_0)}.P_{b_0\to b_1}$$

Méthode à éviter !!!

Préférer exprimer le vecteur taux de rotation dans la base d'expression de la matrice d'inertie.

Bilan des différentes études

PFD

Cinétique

Matrice d'inertie

Méthode de résolution

Équation de mouvement

Équilibrages d'un solide

Propriétés des matrices d'inertie

Le solide possède un plan de symétrie

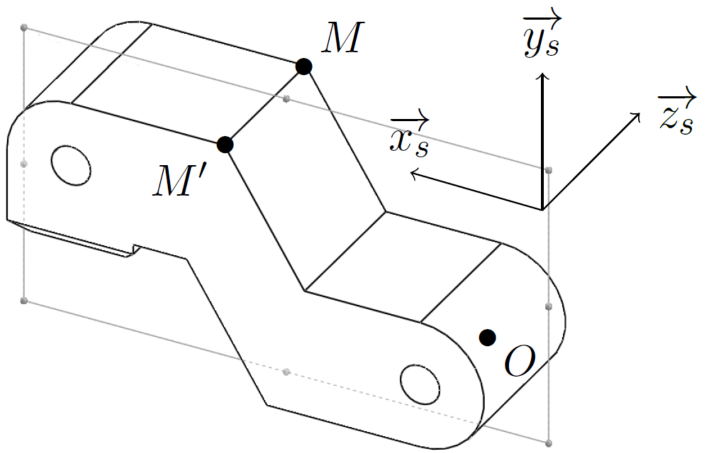
Moments d'inertie $(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2)$	Produits d'inertie $(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2)$
$A=\int_S (y^2+z^2)\cdot dm$	$D=\int_S yz\cdot dm$
$B=\int_S (x^2+z^2)\cdot dm$	$E=\int_S xz\cdot dm$
$C=\int_S (x^2+y^2)\cdot dm$	$F=\int_S xy\cdot dm$

Soit M un point de S tel que :

$$\overrightarrow{OM}=x\,\vec{x}_s+y\,\vec{y}_s+z\,\vec{z}_s$$

Si S possède un plan de symétrie $(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$ alors il existe un point M' tel que :

$$\overrightarrow{OM}'=x\,\vec{x}_s+y\,\vec{y}_s-z\,\vec{z}_s$$



Alors : $E=\int_S xz\,dm=0$

$D=\int_S yz\,dm=0$

Car : $\int_{-h/2}^{h/2} z\,dz=0$

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(O,S)}=\begin{pmatrix}A & -F & 0\\ -F & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}_{b_s}}$$

Propriétés des matrices d'inertie

Le solide possède une symétrie par rapport à 2 plans sécants perpendiculaires

Soit P un point de S tel que :

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{x}_s + y\vec{y}_s + z\vec{z}_s$$

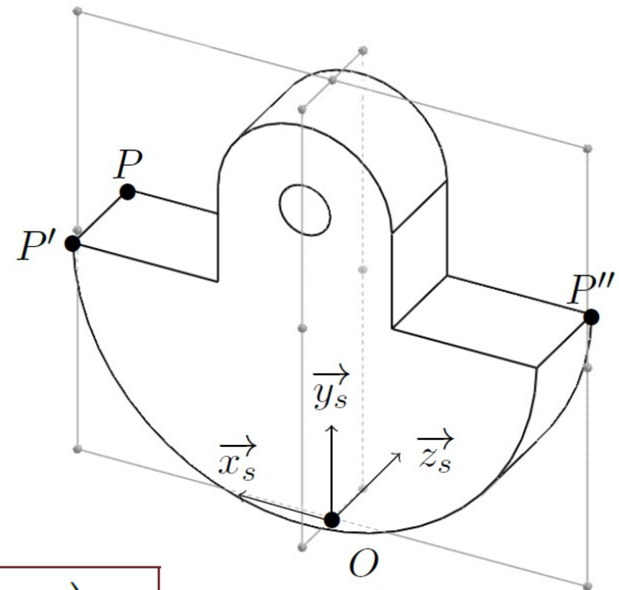
Si S possède deux plans de symétrie $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$ et $(O, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$

Moments d'inertie $(\mathrm{kg \cdot m^2})$	Produits d'inertie $(\mathrm{kg \cdot m^2})$
$A = \int_S (y^2+z^2) \cdot dm$	$D = \int_S yz \cdot dm$
$B = \int_S (x^2+z^2) \cdot dm$	$E = \int_S xz \cdot dm$
$C = \int_S (x^2+y^2) \cdot dm$	$F = \int_S xy \cdot dm$

alors il existe deux points P' et P'' tels que :

$$\overrightarrow{OP}' = x\vec{x}_s + y\vec{y}_s - z\vec{z}_s$$

$$\overrightarrow{OP}'' = -x\vec{x}_s + y\vec{y}_s + z\vec{z}_s$$



Alors : $E = \int_S xz\,dm = 0$

$D = \int_S yz\,dm = 0$

$F = \int_S xy\,dm = 0$

Car : $\int_{-a/2}^{a/2} z\,dz = 0$ et $\int_{-b/2}^{b/2} x\,dx = 0$

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s}}$$

Matrice d'inertie

Propriétés des matrices d'inertie

Le solide possède un axe de révolution

Moments d'inertie $(\mathrm{kg \cdot m^2})$	Produits d'inertie $(\mathrm{kg \cdot m^2})$
$A = \int_S (y^2+z^2) \cdot dm$	$D = \int_S yz \cdot dm$
$B = \int_S (x^2+z^2) \cdot dm$	$E = \int_S xz \cdot dm$
$C = \int_S (x^2+y^2) \cdot dm$	$F = \int_S xy \cdot dm$

Soit M un point de S tel que :

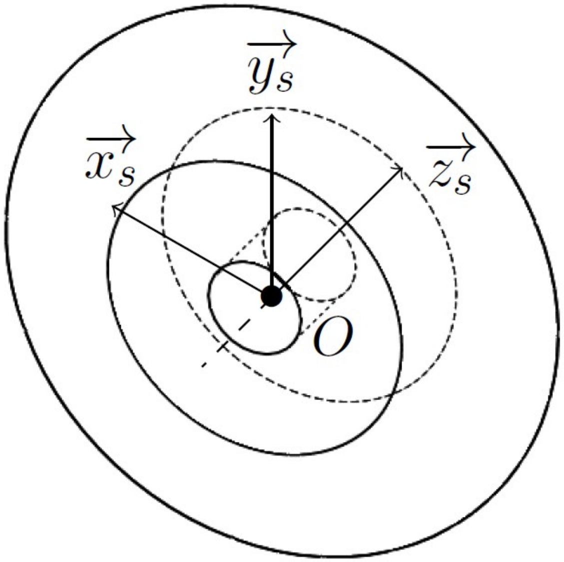
$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{x}_s + y\,\vec{y}_s + z\,\vec{z}_s$$

Si S possède un axe de révolution z (infinité de plans de symétrie), alors :

$$E = \int_S xz\,dm = 0$$
$$D = \int_S yz\,dm = 0$$
$$F = \int_S xy\,dm = 0$$

Et, puisque x et y jouent le même rôle, on a aussi :

$$A = B = \frac{C}{2} + \int_S z^2\,dm$$



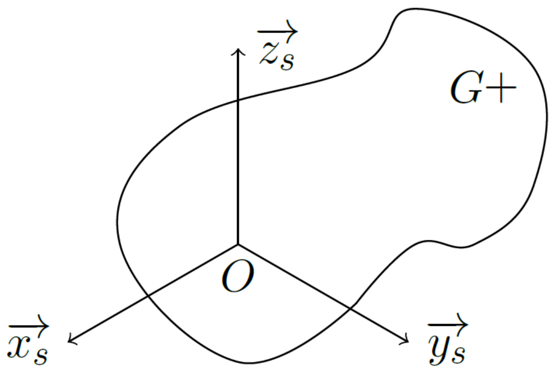
$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s}}$$

Matrice d'inertie

Changement de point de la matrice d'inertie

Théorème de Huygens

Ce théorème permet de passer la matrice d'inertie d'un solide S exprimée en son centre de gravité G en un point quelconque du solide (ici le point O).



Si : $\overrightarrow{OG} = a\,\vec{x}_s + b\,\vec{y}_s + c\,\vec{z}_s$

Alors :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \bar{\bar{I}}_{(G,S)} + m \cdot \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}}$$

Valable uniquement qu'entre le centre de gravité et un autre point du solide S.

Pour aller de A à B, passer par G !!!

Bilan des différentes études

PFD

Cinétique

Matrice d'inertie

Méthode de résolution

Équation de mouvement

Équilibrages d'un solide

Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ

Parfois il n'est pas nécessaire de connaître les 6 composantes de la matrice d'inertie d'un solide S, seul un moment d'inertie est intéressant (cas d'un solide en rotation autour d'un axe Δ).

Le moment d'inertie I_Δ d'un solide S par rapport à un axe Δ est (avec Δ passant par (O,u) et u vecteur unitaire) :

$$I_\Delta = \vec{u} . \left(\bar{\bar{I}}_{(A,S)} . \vec{u} \right)$$

Un moment d'inertie par rapport à un axe est minimum si cet axe passe par le centre de gravité G du solide S.

Bilan des différentes études
PFD
Cinétique
Matrice d'inertie
Méthode de résolution
Équation de mouvement
Équilibrages d'un solide

Relation entre torseurs cinétique et dynamique

$$\boxed{\vec{R}_{d,S/R_g} = \left.\frac{d\ \vec{P}_{S/R_g}}{dt}\right|_{R_g}}$$

$$\boxed{\vec{\delta}_{A\in S/R_g} = \left.\frac{d\ \vec{\sigma}_{A\in S/R_g}}{dt}\right|_{R_g} + m\cdot\left(\vec{V}_{A/R_g}\right)\wedge\vec{V}_{G\in S/R_g}}$$

Méthode de résolution

1. Tracer le graphe de structure du mécanisme et les figures géométrales ;

2. Proposer une démarche (stratégie) d'isolement permettant de répondre à l'objectif ;

3. Faire l'Inventaire des Actions Mécaniques Extérieures (IAME) s'exerçant sur le solide S ou l'ensemble Σ, et calculer $\left\{T\left(ext \to S\right)\right\}$ ou $\left\{T\left(ext \to \Sigma\right)\right\}$;

4. Écrire le PFD appliqué au solide S ou à l'ensemble de solides Σ isolé(s) ;

5. Calculer le torseur dynamique $\left\{D\left(E/R_g\right)\right\}$ ou $\left\{D\left(\Sigma/R_g\right)\right\}$;

6. Écrire les équations vectorielles ou scalaires, et résoudre.

Méthode de résolution

Solide en translation

$$\vec{\delta}_{G\in S/R}=\vec{0}$$

$$\vec{\delta}_{A\in S/R}=\overrightarrow{AG}\wedge m\vec{\Gamma}_{G\in S/R}$$

Solide en rotation autour d'un axe fixe (z)

$$\vec{\sigma}_{G\in S/R}=J.\dot{\Theta}.\vec{z}$$

$$\vec{\delta}_{G\in S/R}=J.\ddot{\Theta}.\vec{z}$$

J : moment d'inertie de S en G autour de z

... et si G sur l'axe de rotation

$$\vec{R}_{d,S/R}=\vec{0}$$

Solide en rotation

$$\begin{tikzcd}
\bar{\bar{I}}_{(A,S)} \arrow[r, leftrightarrow, "(1)"] \arrow[d, leftrightarrow, "(2)"] & \bar{\bar{I}}_{(G,S)} \arrow[d, leftrightarrow, "(3)"] \\
\vec{\sigma}_{A\in S/R} \arrow[r, leftrightarrow, "(4)"] \arrow[d, leftrightarrow, "(5)"] & \vec{\sigma}_{G\in S/R} \arrow[d, leftrightarrow, "(6)"] \\
\vec{\delta}_{A\in S/R} \arrow[r, leftrightarrow, "(7)"] & \vec{\delta}_{G\in S/R}
\end{tikzcd}$$

$$(1)\ :\ \bar{\bar{I}}_{(A,S)}=\bar{\bar{I}}_{(G,S)}+\bar{\bar{I}}_{(m,A,S)}$$

$$(2)\ :\ \vec{\sigma}_{A\in S/R}=\bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\vec{\Omega}_{(S/R)}+m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}_{A\in S/R}$$

$$(3)\ :\ \vec{\sigma}_{G\in S/R}=\bar{\bar{I}}_{(G,S)}.\vec{\Omega}_{(S/R)}$$

$$(4)\ :\ \vec{\sigma}_{A\in S/R}=\vec{\sigma}_{G\in S/R}+\overrightarrow{AG}\wedge m\vec{V}_{G\in S/R}$$

$$(5)\ :\ \vec{\delta}_{A\in S/R}=\left[\frac{d\vec{\sigma}_{A\in S/R}}{dt}\right]_R+m\left(\vec{V}_{A/R}\wedge\vec{V}_{G\in S/R}\right)$$

$$(6)\ :\ \vec{\delta}_{G\in S/R}=\left[\frac{d\vec{\sigma}_{G\in S/R}}{dt}\right]_R$$

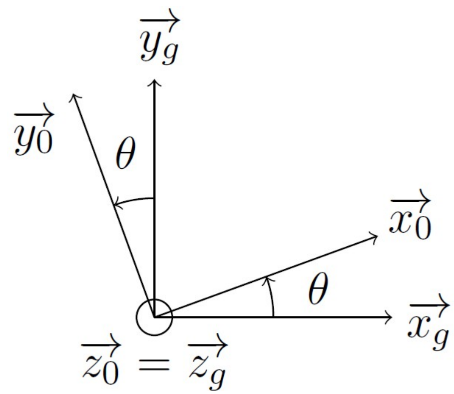
$$(7)\ :\ \vec{\delta}_{A\in S/R}=\vec{\delta}_{G\in S/R}+\overrightarrow{AG}\wedge m\vec{\Gamma}_{G\in S/R}$$

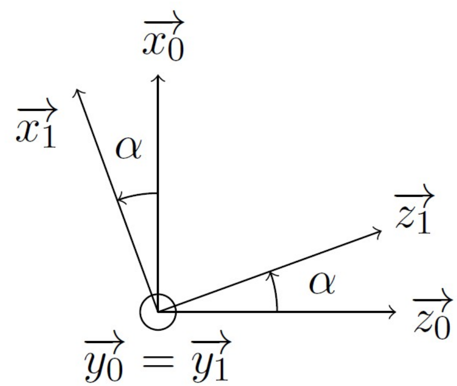
Méthode de résolution

Conseils pour les calculs

- Ne jamais projeter les vecteurs dans le repère de base (galiléen), et laisser le résultat dans une base simple.
- Pour calculer la dérivée vectorielle d'un vecteur unitaire, utiliser la formule de « Bour » :

$$\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{u}$$





$$\left[\frac{d\vec{x}_0}{dt}\right]_{R_g} = \dot{\theta}\,\vec{y}_0 \qquad \left[\frac{d\vec{y}_0}{dt}\right]_{R_g} = -\dot{\theta}\,\vec{x}_0$$

$$\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_{R_0} = -\dot{\theta}\,\vec{z}_1 \qquad \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right]_{R_0} = \dot{\theta}\,\vec{x}_1$$

- Pour calculer la projection d'un vecteur sur un vecteur d'une base, utiliser la formule :

$$\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_0} \cdot \vec{z} = \frac{d\left(\vec{u} \cdot \vec{z}\right)}{dt} - \vec{u} \cdot \left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_{R_0}$$

Exemple : $\left[\frac{d\vec{\sigma}_{A,S/R}}{dt}\right]_{R_0} \cdot \vec{z} = \frac{d\left(\vec{\sigma}_{A,S/R} \cdot \vec{z}\right)}{dt} - \vec{\sigma}_{A,S/R} \cdot \left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_{R_0}$

Bilan des différentes études

PFD

Cinétique

Matrice d'inertie

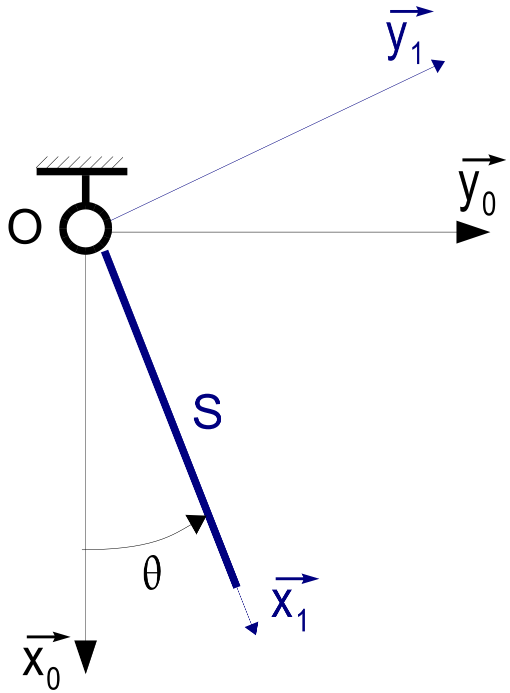
Méthode de résolution

Équation de mouvement

Équilibrages d'un solide

Équation de mouvement

Équation de mouvement = **équation différentielle** du 2^{nd} ordre traduisant l'évolution du paramètre (angle ou déplacement) en fonction des **caractéristiques géométrique et inertielle** du solide en mouvement et du temps.
Cette équation ne doit **faire intervenir que des composantes d'efforts connus**.
Il faut donc se placer en un **point judicieusement choisi**.

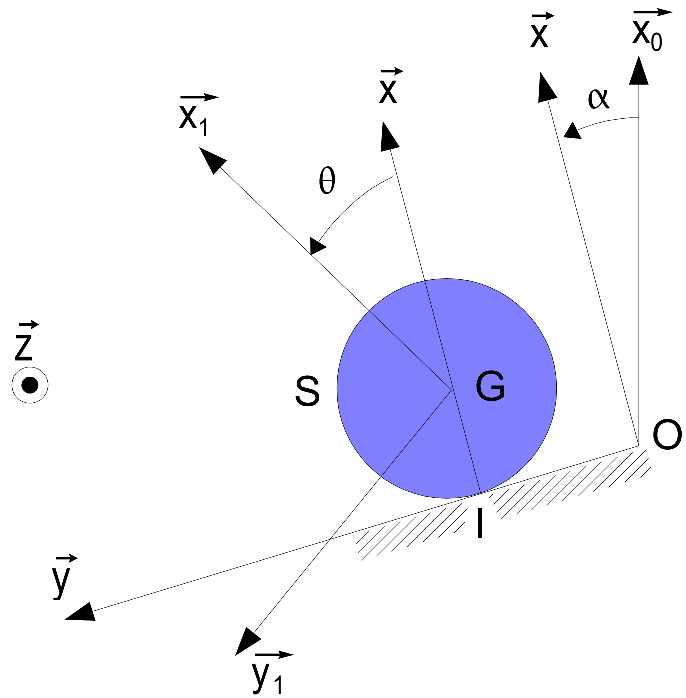


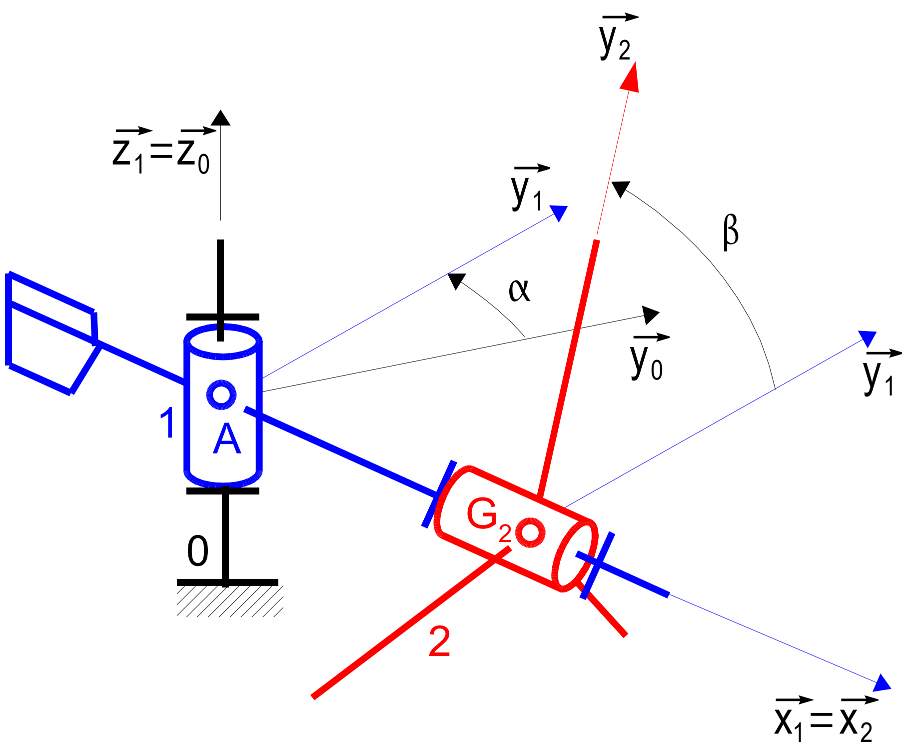
Écrire les équations issues du PFD appliqué à la barre S, homogène, de rayon négligeable, de masse m, de longueur L. On suppose que $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un référentiel galiléen et la pesanteur est telle que $\vec{g} = g\,\vec{x}_0$.

$$\left\{\begin{aligned}
-\frac{mL}{2}\dot{\theta}^2 &= X_0 + mg\cos\theta \\
\frac{mL}{2}\ddot{\theta} &= Y_0 - mg\sin\theta \\
0 &= Z_0 \\
0 &= L_0 \\
0 &= M_0 \\
\boxed{\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} = -\frac{mgL}{2}\sin\theta}
\end{aligned}\right.$$

Équation de mouvement

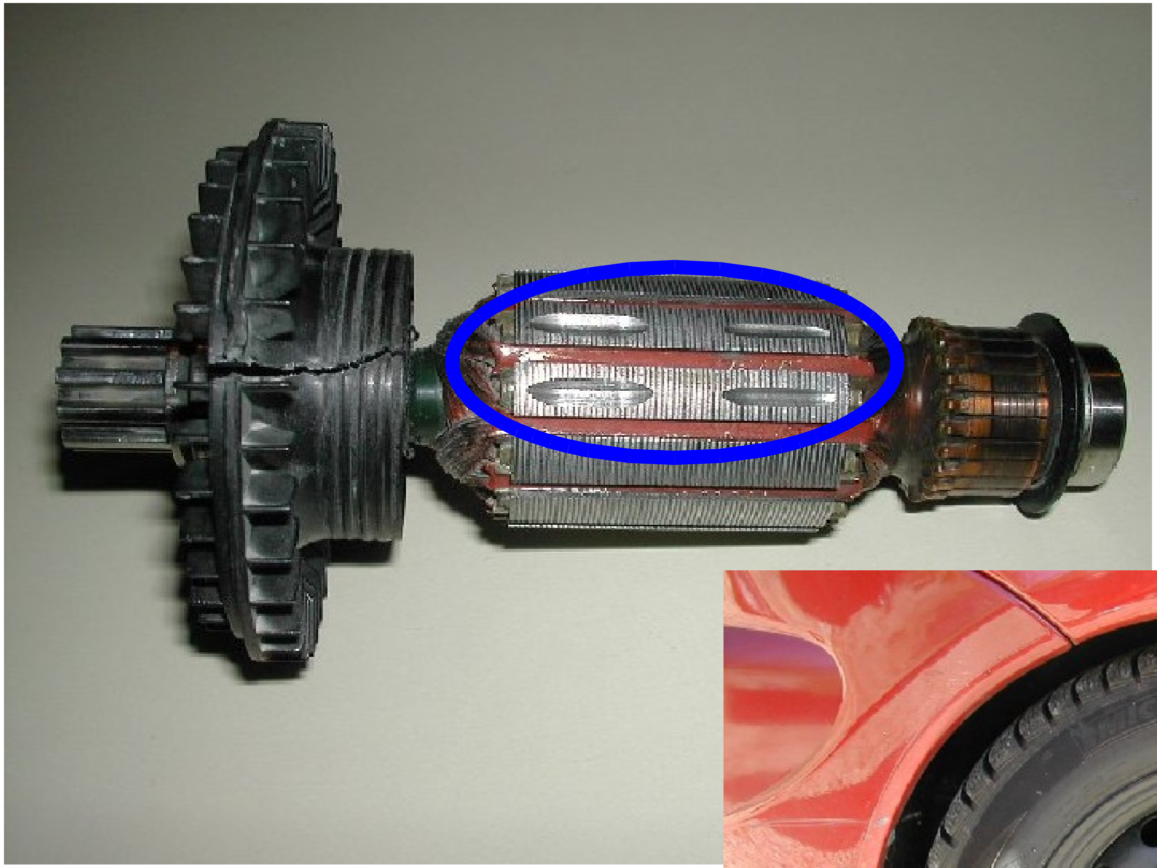
Déterminer l'équation **utile** issue du PFD permettant d'obtenir l'**équation de mouvement** (précisez le ou les solide(s) isolé(s) et le point d'écriture).





L'équation de mouvement pour les mécanismes à 1 DDL est généralement plus facile à obtenir à partir du théorème de l'énergie cinétique (Voir cours suivant).

Équilibrages d'un solide



Équilibrages d'un solide

Base propre d'inertie (axes principaux)

Pour tout solide, il existe une base, dite propre, ou la matrice d'inertie de ce solide est diagonale au centre d'inertie (de gravité).

Les axes de cette base sont appelés axes principaux.

Si le solide tourne autour d'un de ces axes principaux, alors la rotation de ce solide ne provoque pas de vibrations, ni de balourd. On dit alors que le solide est dynamiquement équilibré.

Équilibre statique $\Rightarrow$ la résultante du torseur des actions mécaniques transmissibles de la liaison est indépendante des effets d'inertie (centre de gravité du solide porté par l'axe de rotation).

Équilibre dynamique $\Rightarrow$ le moment du torseur des actions mécaniques transmissibles de la liaison (en un point de l'axe de rotation) est indépendant des effets d'inertie (produits d'inertie contenant l'axe de rotation nuls).

Si le solide n'est pas équilibré, la liaison pivot (généralement) subit des efforts (résultante et moment) importants susceptibles de l'endommager rapidement. Donc, à éviter si possible !

Bilan des différentes études

PFD

Cinétique

Matrice d'inertie

Méthode de résolution

Équation de mouvement

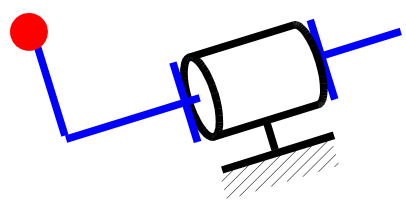
Équilibrages d'un solide

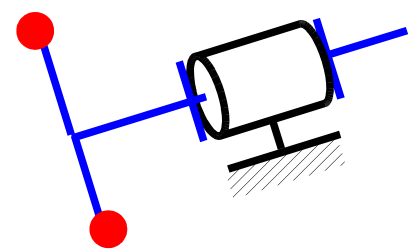
Équilibrages d'un solide

Équilibre statique ⇒ la résultante du torseur des actions mécaniques transmissibles de la liaison est indépendante des effets d'inertie (centre de gravité du solide porté par l'axe de rotation).

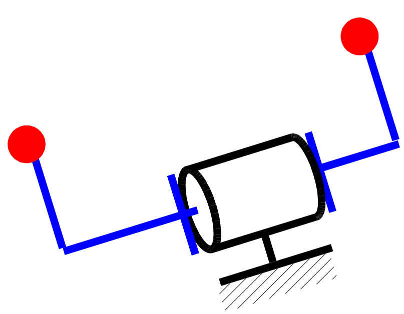
Équilibre dynamique ⇒ le moment du torseur des actions mécaniques transmissibles de la liaison est indépendant des effets d'inertie (produits d'inertie contenant l'axe de rotation nuls).

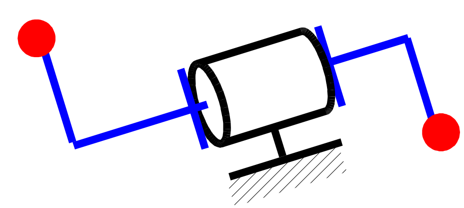
Pour chaque configuration, indiquer si les solides en rotation sont équilibrés statiquement et/ou dynamiquement.





Remarque :
Un solide non équilibré statiquement, n'est pas équilibré dynamiquement.





Équilibrages d'un solide

Comment équilibrer un solide en rotation ?

Voir Application 2 dans le cours.