

*Carnot*



**MPSI – PCSI**

# **Sciences Industrielles de l'Ingénieur**

**Séquence 6**

**Analyse cinématique des mécanismes**

- A** Analyser
- A1** Identifier le besoin et les exigences
  - A1-01** Décrire le besoin
  - A1-02** Traduire un besoin fonctionnel en exigences
  - A1-03** Présenter la fonction globale
  - A1-04** Définir les domaines d'application, les critères technico-économiques
  - A1-05** Identifier les contraintes
  - A1-06** Identifier et caractériser les fonctions
  - A1-07** Qualifier et quantifier les exigences (critère, niveau)
  - A1-08** Évaluer l'impact environnemental (matériaux, énergies, nuisances)
- A3** Appréhender les analyses fonctionnelle et structurelle
  - A3-01** Analyser les architectures fonctionnelle et structurelle
  - A3-02** Identifier les fonctions des différents constituants
  - A3-03** Repérer les constituants dédiés aux fonctions d'un système
  - A3-04** Identifier la structure d'un système asservi: chaîne directe, capteur, commande, consigne, comparateur, correcteur
  - A3-05** Identifier et positionner les perturbations
  - A3-06** Différencier régulation et poursuite
  - A3-08** Identifier et décrire la chaîne d'information et la chaîne d'énergie du système
  - A3-09** Identifier les liens entre la chaîne d'énergie et la chaîne d'information
  - A3-10** Identifier les constituants de la chaîne d'information réalisant les fonctions acquérir, coder, communiquer, mémoriser, restituer, traiter
  - A3-11** Identifier les constituants de la chaîne d'énergie réalisant les fonctions agir, alimenter, convertir, moduler, transmettre, stocker

# Table des matières

Cours	0
I Généralités . . . . .	1
I.1 Solide indéformable . . . . .	1
I.2 Repère – Référentiel – Solides . . . . .	1
I.3 Positionnement d'un point ou d'un solide dans l'espace . . . . .	2
II Rappels de cinématique du point . . . . .	4
II.1 Repérage d'un point . . . . .	4
II.2 Trajectoire . . . . .	4
II.3 Vitesse d'un point dans un référentiel . . . . .	4
II.4 Accélération d'un point par rapport à un référentiel . . . . .	6
III Dérivation vectorielle et vecteur taux de rotation . . . . .	6
III.1 Formule de dérivation vectorielle . . . . .	6
III.2 Propriétés du vecteur taux de rotation . . . . .	6
IV Champ des vecteurs vitesse et accélération d'un solide . . . . .	7
IV.1 Définitions . . . . .	7
IV.2 Vitesse d'un solide . . . . .	7
IV.3 Accélération d'un solide . . . . .	9
V Torseur cinématique . . . . .	9
V.1 Définition . . . . .	9
V.2 Propriétés . . . . .	10
VI Mouvements particuliers . . . . .	10
VI.1 Mouvement de translation . . . . .	10
VI.2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe . . . . .	11
VI.3 Contact ponctuel en un point . . . . .	12
VI.4 Exemple d'une roue de vélo . . . . .	13
VII Complément sur la modélisation et l'analyse des mécanismes . . . . .	14
VII.1 Torseur cinématique des liaisons . . . . .	14
VII.2 Liaison cinématique équivalente . . . . .	16
VII.3 Fermeture cinématique – Lois entrée/sortie . . . . .	18
I Produit vectoriel . . . . .	19
I.1 Définition . . . . .	19
I.2 Propriétés . . . . .	19
I.3 Expression analytique . . . . .	19
II Produit mixte . . . . .	19
II.1 Définition . . . . .	19
II.2 Propriétés . . . . .	19
III Dérivation d'une fonction scalaire (rappels) . . . . .	19
IV Dérivation d'une fonction vectorielle . . . . .	20
IV.1 Expression dans $R_0$ et dérivation par rapport à $R_0$ . . . . .	20
IV.2 Opérations sur les dérivées vectorielles . . . . .	20
IV.3 Dérivation dans $R_0$ d'une fonction exprimée dans $R_1$ . . . . .	21

IV.4	Propriété du vecteur taux de rotation . . . . .	22
<b>TDs</b>		<b>23</b>
<b>TD 1</b>		<b>23</b>
<b>TD 2</b>		<b>25</b>
<b>TD 3</b>		<b>27</b>
<b>TD 4</b>		<b>29</b>
<b>TD 5</b>		<b>31</b>
<b>TD 6</b>		<b>35</b>
<b>Kholles</b>		<b>41</b>
<b>Kholle 1</b>		<b>41</b>
<b>Kholle 2</b>		<b>42</b>
<b>Kholle 3</b>		<b>43</b>
<b>Kholle 4</b>		<b>45</b>
<b>Kholle 5</b>		<b>47</b>

La cinématique est l'étude des mouvements de points ou de solides d'un système. Les causes à l'origine de ces mouvements ne sont pas étudiées en cinématique.

Remarque : Le cours de dynamique (en deuxième année) traite de l'origine de ses mouvements en cherchant les relations entre efforts et mouvements.

### Objectif

Après avoir étudié ce cours, vous devez être capable de :

- déterminer les propriétés cinématiques (position, trajectoire, vitesse et accélération) de systèmes techniques composés de solides rigides ;
- caractériser les mouvements simples : rotation et translation.

## I Généralités

### I.1 Solide indéformable

On appelle système matériel un ensemble de points matériels. Un solide indéformable  $S$  est un système matériel, tel que la distance entre deux points  $A$  et  $B$  appartenant à ce système, reste constante au cours du temps :  $\forall A \in S$  et  $\forall B \in S$ ,  $\forall t$ ,  $\|\overrightarrow{AB}\| = \text{cste}$ .

### I.2 Repère – Référentiel – Solides

#### I.2.1 Notion de repère - Paramétrages courants

Un repère est défini par une origine et trois vecteurs orthonormés directs formant une base. Les points extrémités des vecteurs unitaires sont à des distances constantes de l'origine.

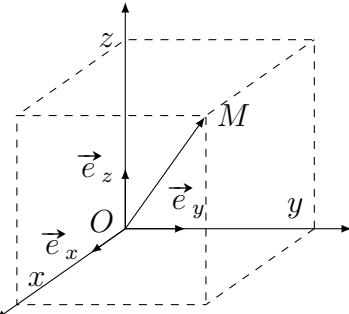
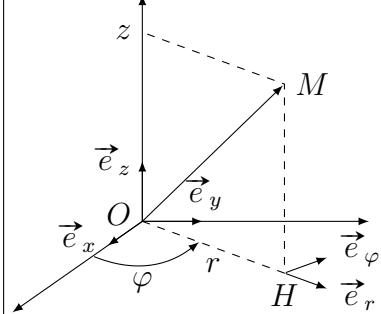
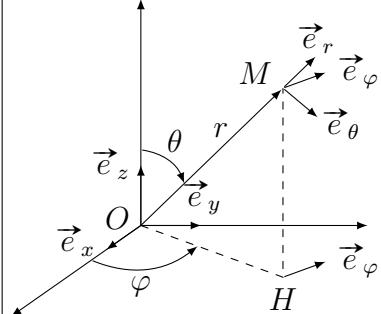
		
Coordonnées cartésiennes $M(x, y, z)$ $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$	Coordonnées cylindriques $M(r, \varphi, z)$ $\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{e}_r + z \cdot \vec{e}_z$	Coordonnées sphériques $M(r, \varphi, \theta)$ $\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{e}_r$

FIGURE 1 : Coordonnées d'un point  $M$  dans les 3 systèmes de coordonnées

#### I.2.2 Notion de référentiel

Afin d'étudier le mouvement d'un point ou d'un système de solides, il est nécessaire de mettre en place un système de référence appelé « référentiel ». Il représente en quelque sorte la position d'observation des phénomènes. Il est composé d'une description de l'espace (repère) et d'une description du temps.

### I.2.3 Équivalence référentiel - solide

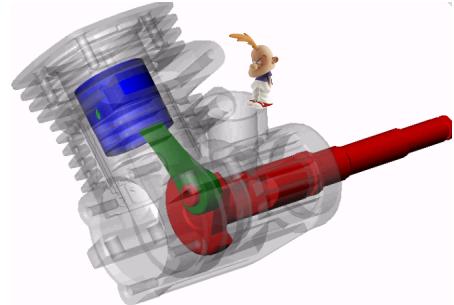
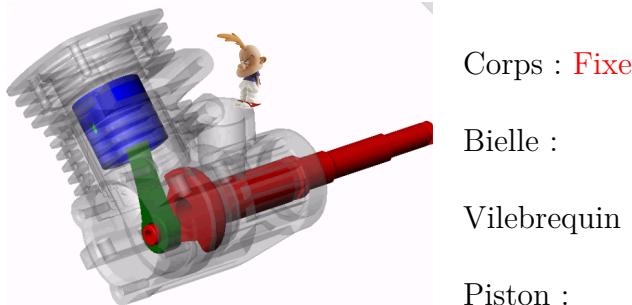
À chaque solide, on attache un référentiel. Le référentiel et le solide étant indéformables, on peut les confondre. Ainsi, l'étude des mouvements d'un solide  $S_k$  par rapport à un solide  $S_i$  notée  $(S_k/S_i)$  est identique à :

- l'étude des mouvements du solide  $S_k$  par rapport à un repère  $\mathcal{R}_i$  lié au solide  $S_i$  ( $S_k/\mathcal{R}_i$ ),
- l'étude des mouvements du repère  $\mathcal{R}_k$  lié au solide  $S_k$  par rapport au solide  $S_i$  ( $\mathcal{R}_k/S_i$ ),
- l'étude des mouvements du repère  $\mathcal{R}_k$  lié au solide  $S_k$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_i$  lié au solide  $S_i$  ( $\mathcal{R}_k/\mathcal{R}_i$ ).

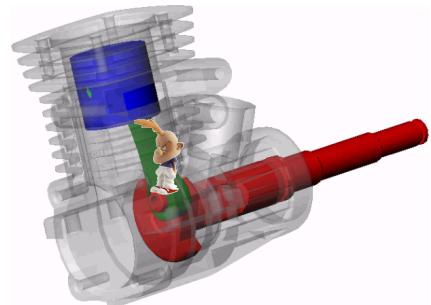
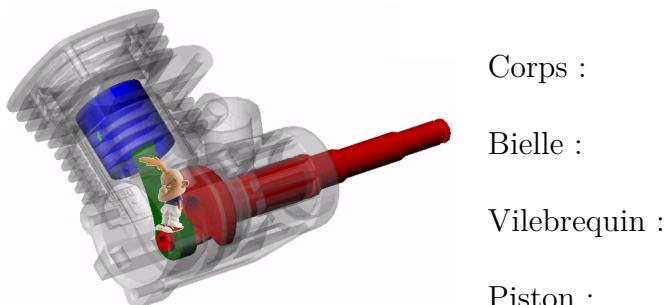
*Exemple : mouvement d'une balle rebondissante dans un train en mouvement. Différentes observations sont possibles de la balle par un observateur dans le train ou hors du train.*

*Exemple : Micromoteur*

Référentiel lié au bâti :



Référentiel lié à la bielle :



*Remarque : Le référentiel choisi est généralement marqué par le symbole du bâti dans le graphe des liaisons ou sur le schéma cinématique.*

## I.3 Positionnement d'un point ou d'un solide dans l'espace

### I.3.1 Paramétrage pour positionner un point

Pour positionner un point  $M$  dans l'espace (3 dimensions) par rapport à un repère  $\mathcal{R}_i$ , il est nécessaire de paramétriser 3 mouvements. Une possibilité de mouvement est appelée **degré de liberté**. Il faut donc 3 degrés de liberté pour positionner un point dans l'espace :

- soit 3 translations ( coordonnées cartésiennes) ;
- soit 2 translations sur des axes différents et 1 rotation autour d'un axe ( coordonnées cylindriques) ;
- soit 1 translation sur un axe, et 2 rotations autour de 2 axes ( coordonnées sphériques) ;

tel que représenté sur la **FIGURE 1**.

### I.3.2 Paramétrage pour positionner un solide dans l'espace

Pour positionner un solide  $S_k$  par rapport à un repère  $\mathcal{R}_i$  (associé au solide  $S_i$ ), dans un espace à trois dimensions, il est nécessaire de paramétriser la position du repère  $\mathcal{R}_k$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_i$ . Il est usuel de considérer :

- les trois coordonnées du point origine du repère  $\mathcal{R}_k$  dans le repère  $\mathcal{R}_i$  définissant 3 translations ;
- les trois angles qui définissent la position de la base du repère  $\mathcal{R}_k$  par rapport à celle du repère  $\mathcal{R}_i$ , définissant 3 rotations. Les possibilités de variation de ces six paramètres correspondent aux possibilités de mouvement du solide  $S_k$  par rapport au solide  $S_i$ . Il existe donc au maximum six degrés de liberté (trois translations et trois rotations). Une liaison entre deux solides annule  $p$  degrés de liberté avec  $0 < p \leq 6$ .

### I.3.3 Angles d'Euler

Les angles d'Euler représentent une possibilité pour définir l'**orientation** d'un solide dans l'espace à l'aide de 3 paramètres angulaires.

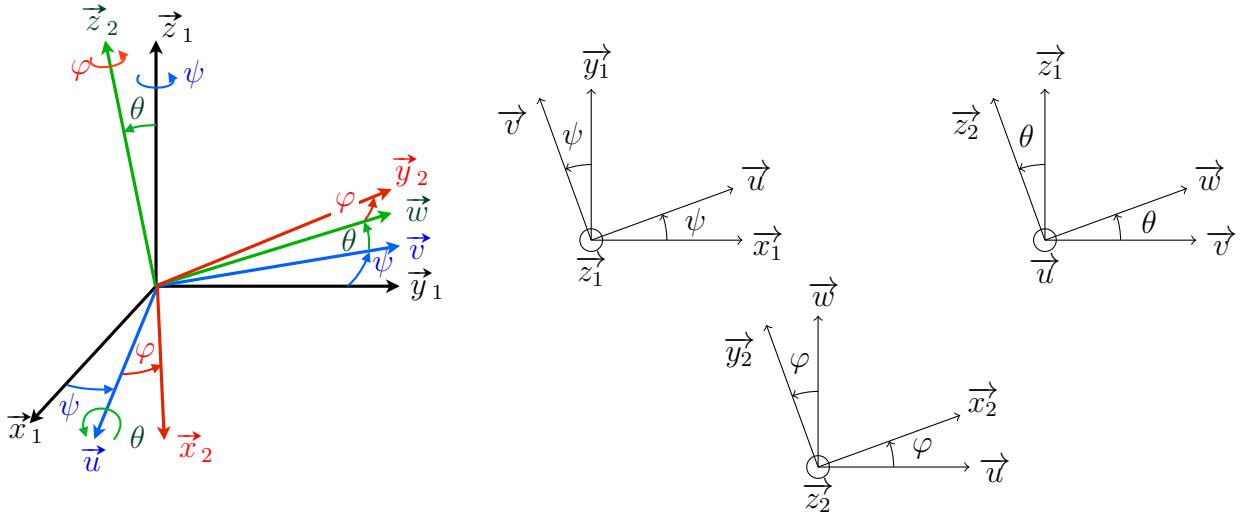


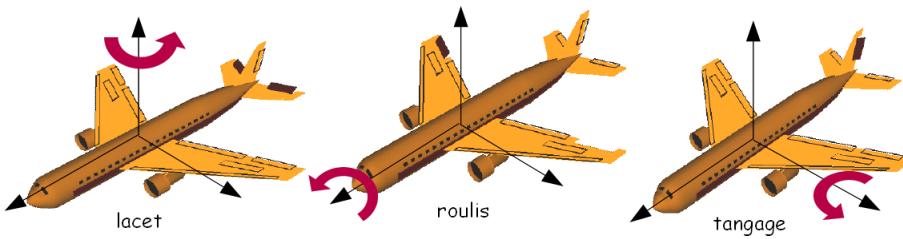
FIGURE 2 : Orientation de deux repères à l'aide des angles d'Euler

Les 3 rotations s'effectuent autour de 3 vecteurs indépendants. En considérant un repère initial  $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , le choix des vecteurs de rotation effectué d'après Euler est le suivant :

- la première rotation (notée  $\psi$  sur la figure ci-dessus), appelée *précession*, s'effectue autour de  $\vec{z}_1$  telle que  $\psi = (\vec{x}_1, \vec{u}) = (\vec{y}_1, \vec{v})$ . On obtient donc le repère  $R'_1 = (O_1, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)$  ;
- la seconde rotation (notée  $\theta$  sur la figure ci-dessus), appelée *nutation*, s'effectue autour de  $\vec{u}$  telle que  $\theta = (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ . On obtient donc le repère  $R''_1 = (O_1, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_2)$  ;
- la dernière rotation (notée  $\varphi$  sur la figure ci-dessus), appelée *rotation propre*, s'effectue autour de  $\vec{z}_2$  telle que  $\varphi = (\vec{u}, \vec{x}_2) = (\vec{w}, \vec{y}_2)$ . On obtient donc le repère  $R_2 = (O_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ .

### I.3.4 Angles de roulis, de tangage et de lacet

Pour les systèmes du domaine des transports, on privilégie les angles de roulis, de tangage et de lacet.

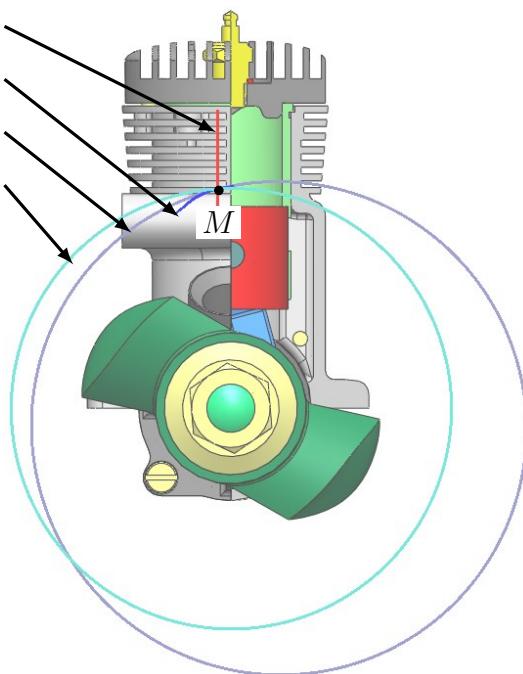


## II Rappels de cinématique du point

### II.1 Repérage d'un point

Soit un repère de référence  $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et un point  $M$  de l'espace quelconque. On définit la position du point  $M$  par le vecteur position :  $\overrightarrow{O_0M} = x_M(t) \cdot \vec{x}_0 + y_M(t) \cdot \vec{y}_0 + z_M(t) \cdot \vec{z}_0$ . Le vecteur position est une fonction vectorielle du temps (car toutes ses coordonnées peuvent dépendre du temps). Ses coordonnées s'expriment en mètre [m].

### II.2 Trajectoire



La trajectoire du point  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$  est l'ensemble des positions de  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$  lorsque le temps décrit un intervalle donné.

On considère dans un premier temps que le point  $M$  est « lié » ou appartenant au piston. Dans ce cas :

- la trajectoire de ce point  $M$  par rapport au corps est une droite verticale ;
- la trajectoire de ce point  $M$  par rapport au vilebrequin est une ellipse centrée sur l'axe de rotation de la bielle sur le vilebrequin ;
- la trajectoire de ce point  $M$  par rapport à la bielle est une portion de courbe.

On considère maintenant que le point  $M$  est « lié » ou appartenant au vilebrequin. Dans ce cas, la trajectoire de ce point  $M$  par rapport au corps est un cercle centré sur l'axe de rotation de l'hélice.

### II.3 Vitesse d'un point dans un référentiel

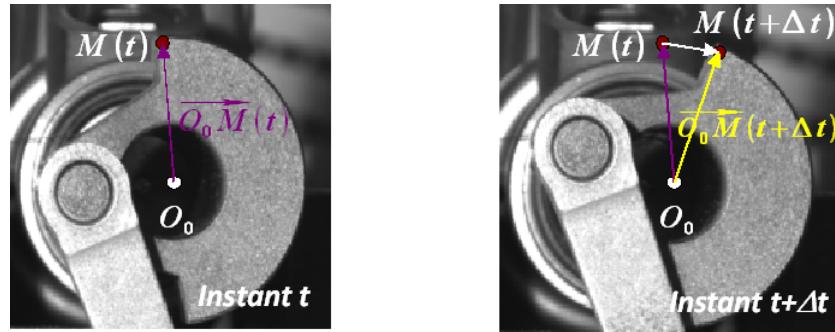
#### II.3.1 Vitesse moyenne

On considère la position à l'instant  $t$  du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  notée  $\overrightarrow{O_0M}(t)$ . On note le vecteur position à l'instant  $t + \Delta t$  :  $\overrightarrow{O_0M}(t + \Delta t)$ .

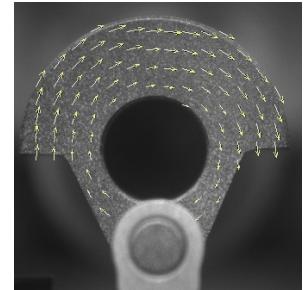
La vitesse moyenne du point  $M$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est :

$$[\vec{V}_{M/\mathcal{R}_0}]_{moy} = \frac{\overrightarrow{O_0M}(t + \Delta t) - \overrightarrow{O_0M}(t)}{\Delta t}$$

*Exemple : mesure de vitesse moyenne pour un vilebrequin de micromoteur (intervalle de temps entre deux clichés : 0,1 s).*



*Remarque :* pour accéder expérimentalement à la vitesse moyenne de manière précise, on peut utiliser une analyse d'images obtenues par une caméra rapide (jusqu'à 60 000 images par seconde !) puis une technique de corrélation d'images pour obtenir le champ de déplacement (amplifié par 10 sur la figure ci-contre).



### II.3.2 Vitesse instantanée

L'inconvénient de la vitesse moyenne est la définition de l'intervalle de temps  $\Delta t$  qui ne permet pas une définition unique de la vitesse. La vitesse instantanée permet de définir la vitesse d'un point par rapport à un référentiel à l'instant  $t$ .

On appelle vecteur vitesse instantanée ou vitesse à l'instant  $t$  du point  $M$  dans son mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0$ , le vecteur :  $\vec{V}_{M/\mathcal{R}_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{O_0M}(t + \Delta t) - \overrightarrow{O_0M}(t)}{\Delta t}$   
On note cette limite :  $\vec{V}_{M/\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\overrightarrow{O_0M}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}$

La dimension de la vitesse instantanée est une longueur sur un temps, son unité est le mètre par seconde  $[m.s^{-1}]$ .

*Remarque :* La droite support du vecteur vitesse instantanée est tangente à la trajectoire du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  à un instant  $t$  donné.

**Attention :** l'écriture de la vitesse  $\vec{V}_{M/\mathcal{R}_0}$  implique de choisir un point fixe de  $\mathcal{R}_0$  pour définir le vecteur position  $\overrightarrow{O_0M}$  et que les vecteurs de base de  $\mathcal{R}_0$  sont fixes également dans  $\mathcal{R}_0$ .

#### Exemple

$$\overrightarrow{O_0M}(t) = x_M(t) \cdot \vec{x}_0 + y_M(t) \cdot \vec{y}_0 + z_M(t) \cdot \vec{z}_0.$$

$$\text{Alors } \vec{V}_{M/\mathcal{R}_0} = \frac{dx_M}{dt}(t) \cdot \vec{x}_0 + \frac{dy_M}{dt}(t) \cdot \vec{y}_0 + \frac{dz_M}{dt}(t) \cdot \vec{z}_0$$

De même si  $\vec{x}_1$  est un vecteur mobile et  $\overrightarrow{O_1M}(t) = x_1(t) \cdot \vec{x}_1$  alors  $\vec{V}_{M/\mathcal{R}_1} = \frac{dx_1(t)}{dt} \cdot \vec{x}_1 \neq \vec{V}_{M/\mathcal{R}_0}$

**Ce n'est pas parce qu'on dérive par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  donné que l'on doit exprimer le résultat dans le repère associé!!!**

## II.4 Accélération d'un point par rapport à un référentiel

L'accélération instantanée du point  $M$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$  est définie par :  

$$\vec{\Gamma}_{M/\mathcal{R}_0} = \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \frac{d^2\vec{O}_0M(t)}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}_0}$$
, son unité est le mètre par seconde carré [m.s<sup>-2</sup>].

Exemple : Manège pieuvre

## III Dérivation vectorielle et vecteur taux de rotation

Comme nous avons pu le constater dans l'exemple précédent, pour calculer des vitesses et des accélérations, on est amené à dériver des vecteurs par rapport à un référentiel donné. La méthode qui consiste à exprimer les vecteurs à dériver dans le repère du référentiel puis à dériver leurs coordonnées conduit très souvent à des calculs lourds et à des expressions gigantesques. Une autre méthode consiste à **changer de base de dérivation**.

Les démonstrations (à ne pas connaître) sont données dans la fiche d'outils mathématiques sur la dérivation vectorielle.

### III.1 Formule de dérivation vectorielle

Soit un vecteur  $\vec{u}$  en mouvement par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}_0$  et un référentiel  $\mathcal{R}_1$  en mouvement également par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

La formule de dérivation vectorielle est : 
$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \vec{u}(t)$$

où  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}$  est le vecteur taux de rotation (ou vitesse angulaire) de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

Remarque : Si  $\vec{u}$  est fixe dans  $\mathcal{R}_1$ , la formule se simplifie : 
$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \vec{u}(t)$$
. On essaiera de toujours choisir le référentiel de dérivation pour se ramener à cette formule simplifiée.

Dans le cas d'une rotation autour d'un axe ( $O, \vec{z}$ ) de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  d'un angle  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ , le vecteur taux de rotation est parallèle à l'axe de rotation (dirigé dans l'exemple selon  $\vec{z}$  et a pour norme la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ , orienté dans le sens direct. Il s'exprime en rad.s<sup>-1</sup> :  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} \vec{z}$ .

### III.2 Propriétés du vecteur taux de rotation

#### III.2.1 Antisymétrie

Soit un référentiel  $\mathcal{R}_0$  et un référentiel  $\mathcal{R}_1$ .

On a  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} = -\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_0/\mathcal{R}_1}$

#### III.2.2 Composition des vecteurs taux de rotation

Considérons 3 repères  $\mathcal{R}_0$ ,  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  et un vecteur  $\vec{u}$  quelconque. En appliquant la formule de dérivation composée précédente, on obtient :

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \vec{u}(t) \quad \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_1} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}(t) \wedge \vec{u}(t)$$

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_2} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_0/\mathcal{R}_2}(t) \wedge \vec{u}(t)$$

En additionnant les trois relations précédentes, on a :  $\vec{0} = (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_0/\mathcal{R}_2}) \wedge \vec{u}$

Pour  $\vec{u}$  quelconque, on en déduit **la composition des vecteurs taux de rotation** :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}$$

On peut généraliser cette relation pour  $n$  repères.

Remarque : on détermine très souvent les vecteurs taux de rotation à partir des figures géométriques de changement de bases.

Exemple : Manège Pieuvre

## IV Champ des vecteurs vitesse et accélération d'un solide

### IV.1 Définitions

Considérons tous les points d'un solide  $S_1$  au cours de son déplacement par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$ . À un instant donné, on peut alors déterminer les vecteurs vitesse et les vecteurs accélération de tous ces points :

- l'ensemble de ces vecteurs vitesse constitue le champ des vecteurs vitesse du solide en mouvement ;
- l'ensemble de ces vecteurs accélération constitue le champ des vecteurs accélération du solide en mouvement.

Le vecteur vitesse d'un point  $M$  appartenant au solide  $S_1$  est noté  $\vec{V}_{M \in S_1/\mathcal{R}_0}$  et son accélération est notée  $\vec{\Gamma}_{M \in S_1/\mathcal{R}_0}$ .

Remarque : Le symbole  $\in$  permet de considérer n'importe quel point lié à  $S_1$ , même si le point n'appartient pas physiquement au solide à l'instant considéré !

### IV.2 Vitesse d'un solide

#### IV.2.1 Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse

Soient  $A$  et  $B$  deux points du solide  $S$ . On a alors :  $\vec{V}_{A \in S/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{AB} = \vec{V}_{B \in S/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{AB}$ .

On dit que le champ des vitesses est équiprojectif. Cette propriété permet de déterminer graphiquement des vitesses sans faire de calcul ! (rarement utilisée).

Démonstration :

On utilise la définition du solide indéformable :  $\forall t, \|\vec{AB}\| = \text{cste}$

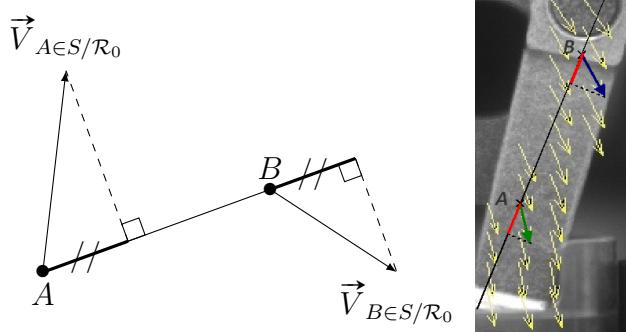
On a ainsi  $\forall t, \|\vec{AB}\|^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = \text{cste}$

On dérive cette expression au carré :  $2 \cdot \vec{AB} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$

On introduit le point  $O$  fixe dans  $\mathcal{R}_0$  :  $\vec{AB} \cdot$

$$\left( \frac{d\vec{AO}}{dt} + \frac{d\vec{OB}}{dt} \right) = 0$$

D'où  $\vec{V}_{A \in S/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{AB} = \vec{V}_{B \in S/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{AB}$



### IV.2.2 Formule de changement de point

Soient  $A$  et  $B$  deux points du solide  $S$  (associé à un repère  $\mathcal{R}_S$ ). Connaissant la vitesse de  $A$  appartenant à  $S$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , on souhaite déterminer la vitesse du point  $B$  appartenant à  $S$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

L'équiprojectivité démontrée sur un solide indéformable est équivalente à la relation de changement de point (ou relation de Varignon) :

$$\vec{V}_{B \in S / \mathcal{R}_0} = \vec{V}_{A \in S / \mathcal{R}_0} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{S / \mathcal{R}_0}$$

Démonstration :

Soit  $O$  un point fixe dans  $\mathcal{R}_0$  :

$$\vec{V}_{B \in S / \mathcal{R}_0} = \frac{d\vec{OB}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\frac{d\vec{OA}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0}}_{\vec{V}_{A \in S / \mathcal{R}_0}} + \frac{d\vec{AB}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \vec{V}_{A \in S / \mathcal{R}_0} + \frac{d\vec{AB}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_S} + \vec{\Omega}_{S / \mathcal{R}_0} \wedge \vec{AB}$$

or comme  $A$  et  $B$  appartiennent à  $S$  :  $\frac{d\vec{AB}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_S} = \vec{0}$

d'où  $\vec{V}_{B \in S / \mathcal{R}_0} = \vec{V}_{A \in S / \mathcal{R}_0} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{S / \mathcal{R}_0}$

### IV.2.3 Composition des vecteurs vitesse

Si on reprend l'exemple du micromoteur, on peut définir 3 mouvements différents : le mouvement de  $\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0$ , le mouvement de  $\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1$  et le mouvement de  $\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0$ .

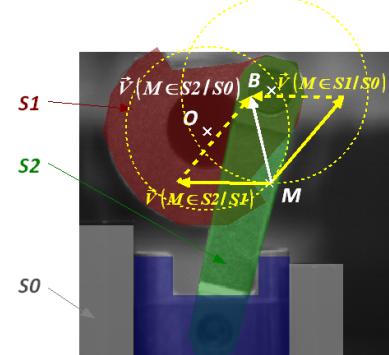
Nous avons déjà vu que pour les vecteurs taux de rotation, on avait :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0}$$

Pour les vecteurs vitesses linéaires, on a également composition des vitesses :

$$\vec{V}_{M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0} = \vec{V}_{M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1} + \vec{V}_{M \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0} \quad \text{avec :}$$

- $\vec{V}_{M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0}$  la vitesse absolue du point  $M$
- $\vec{V}_{M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1}$  la vitesse relative du point  $M$
- $\vec{V}_{M \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0}$  la vitesse d'entraînement du point  $M$



Démonstration :

Soit  $O$  un point fixe dans  $\mathcal{R}_0$  et  $A$  un point fixe dans  $\mathcal{R}_1$  :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0} &= \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\frac{d\vec{OA}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0}}_{\vec{V}_{A \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0}} + \frac{d\vec{AM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \vec{V}_{A \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0} + \underbrace{\frac{d\vec{AM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_1}}_{\vec{V}_{M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0} \wedge \vec{AM} \\ &= \vec{V}_{M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1} + \underbrace{\vec{V}_{A \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0} + \vec{MA} \wedge \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0}}_{\vec{V}_{M \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0}} \end{aligned}$$

#### IV.2.4 Antisymétrie du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est antisymétrique par rapport à ces repères de référence :

$$\vec{V}_{M \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0} = -\vec{V}_{M \in \mathcal{R}_0 / \mathcal{R}_1}$$

Démonstration :

D'après la composition des vitesses :  $\vec{V}_{M \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0} + \vec{V}_{M \in \mathcal{R}_0 / \mathcal{R}_1} = \vec{V}_{M \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_1} = \vec{0}$

Exemple : Manège pieuvre

### IV.3 Accélération d'un solide

#### IV.3.1 Formule de changement de point

Soient  $A$  et  $B$  deux points du solide  $S$  (associé à un repère  $\mathcal{R}_S$ ). Connaissant l'accélération de  $A$  appartenant à  $S$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , on souhaite déterminer l'accélération du point  $B$  appartenant à  $S$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ . Le résultat est le suivant :

$$\vec{\Gamma}_{B \in S / \mathcal{R}_0} = \vec{\Gamma}_{A \in S / \mathcal{R}_0} + \vec{BA} \wedge \frac{d\vec{\Omega}_{S / \mathcal{R}_0}}{dt} + \vec{\Omega}_{S / \mathcal{R}_0} \wedge (\vec{\Omega}_{S / \mathcal{R}_0} \wedge \vec{AB})$$

**Cette formule n'est pas à connaître !**

Remarque : le terme en double produit vectoriel, fait que le champ d'accélération n'est pas équiprojectif.

#### IV.3.2 Composition des accélérations

Pour l'accélération, on obtient :  $\vec{\Gamma}_{M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0} = \vec{\Gamma}_{M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1} + \vec{\Gamma}_{M \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0} + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0} \wedge \vec{V}_{A \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1}$  avec :

- $\vec{\Gamma}_{M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0}$  est l'accélération absolue du point  $M$  ;
- $\vec{\Gamma}_{M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1}$  est l'accélération relative du point  $M$  ;
- $\vec{\Gamma}_{M \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0}$  est l'accélération d'entraînement du point  $M$  ;
- $2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0} \wedge \vec{V}_{A \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1}$  est l'accélération de Coriolis.

**Cette formule n'est pas à connaître !**

Exemple : Manège pieuvre - calcul de l'accélération maximale ressentie

## V Torseur cinématique

### V.1 Définition

Un torseur est un outil mathématique, utilisé en mécanique, afin de décrire les champs antisymétriques (vitesse, moment d'effort ...).

Le torseur est composé de deux vecteurs : une **résultante** (en cinématique, le vecteur taux de rotation) et un **moment** (en cinématique, le vecteur vitesse). Ce sont ses éléments de réduction. Son expression dépend de son point d'écriture, on le note :

$$\left\{ \mathcal{V}_{S / \mathcal{R}_0} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S / \mathcal{R}_0} \\ \vec{V}_{M \in S / \mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_M$$

L'intérêt d'un tel outil est qu'il contient toutes les informations pour décrire le mouvement d'un solide par rapport à un autre. Il permet de synthétiser les propriétés obtenues pour les taux de rotation et les vitesses instantanées.

## V.2 Propriétés

Ces propriétés sont tirées directement des propriétés du vecteur taux de rotation et du vecteur vitesse :

- antisymétrie :

$$\{\mathcal{V}_{S_1/S_2}\} = -\{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\}$$

- changement de point :

$$\{\mathcal{V}_{S/\mathcal{R}_0}\} = \left\{ \vec{V}_{A \in S/\mathcal{R}_0} \right\}_A = \left\{ \vec{V}_{B \in S/\mathcal{R}_0} = \vec{V}_{A \in S/\mathcal{R}_0} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}_0} \right\}_B$$

- composition :

$$\{\mathcal{V}_{S_2/S_0}\} = \{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\} + \{\mathcal{V}_{S_1/S_0}\}$$

**Attention pour faire la somme de deux torseurs, ils doivent être écrits au même point.**

Remarque : Les torseurs seront très utiles dans tous les domaines de la mécanique (actions mécaniques, dynamique, résistance des matériaux ...). Il y a donc uniquement à connaître la forme du torseur et ses propriétés pour pouvoir mener une étude complexe.

Exemple : Manège pieuvre - écriture des torseurs cinématiques et utilisation

## VI Mouvements particuliers

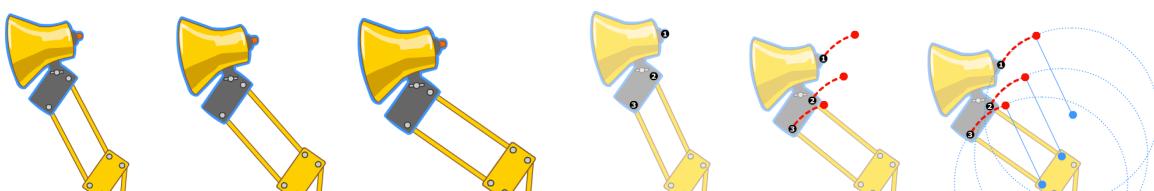
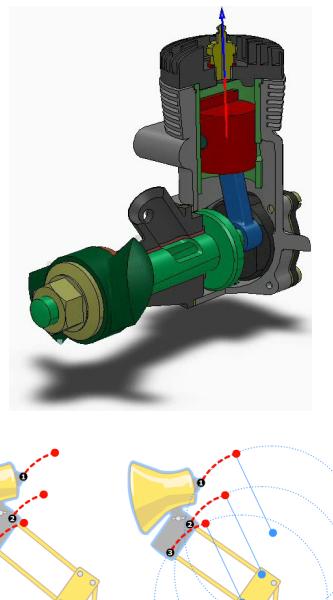
### VI.1 Mouvement de translation

#### VI.1.1 Définition

Un solide  $S$  est animé d'un mouvement de translation dans un repère  $\mathcal{R}_0$  si deux vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  distincts et non colinéaires appartenant à  $S$  restent respectivement équipollents (supports parallèles, même sens, même norme) aux vecteurs  $\vec{AB}(t_0)$  et  $\vec{AC}(t_0)$  appartenant au repère  $\mathcal{R}_0$ .

Il existe plusieurs types de translation :

- rectiligne : la trajectoire des points du solide est une droite (translation du piston du moteur) ;
- circulaire : la trajectoire des points du solide est un cercle (lampe de bureau) ;



- curviligne : pour les autres cas (exemple d'un télésiège).



### VI.1.2 Propriété d'un mouvement de translation

Les vecteurs vitesses de tous les points du solide sont tous égaux et le vecteur taux de rotation est nul.

### VI.1.3 Torseur cinématique

$$\forall t, \quad \left\{ \mathcal{V}_{S/\mathcal{R}_0} \right\} = \left\{ \vec{V}_{M \in S/\mathcal{R}_0} \right\}_M$$

Ce type de torseur est un **torseur couple**. Les éléments de réduction de ce torseur sont les mêmes quel que soit le point où on les expriment.

Démonstration :

$$\forall A \in S, \forall B \in S, \quad \left. \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{0} \text{ car } \overrightarrow{AB} \text{ est constant.}$$

$$\left. \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{V}_{B \in S/\mathcal{R}_0} - \vec{V}_{A \in S/\mathcal{R}_0} = \vec{0} \implies \vec{V}_{B \in S/\mathcal{R}_0} = \vec{V}_{A \in S/\mathcal{R}_0}$$

d'après la formule de changement de point, comme  $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$  on obtient  $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}_0} = \vec{0}$

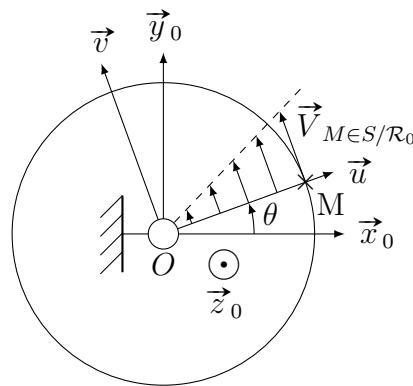
Remarque : dans le cas des translations rectilignes, la liaison associée sera une liaison **glissière**.

## VI.2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

### VI.2.1 Définition

Un solide  $S$  est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe  $D_0$  dans un repère  $\mathcal{R}_0$  si deux points distincts  $A$  et  $B$  appartenant à  $S$  coïncident en permanence avec les deux points fixes  $A_0$  et  $B_0$  appartenant à l'axe  $D_0$ .

La trajectoire de l'ensemble des points du solide  $S$ , est un cercle dans un plan orthogonal à l'axe de rotation, centré sur ce même axe.



### VI.2.2 Propriété d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Si la position angulaire du mouvement est paramétrée par l'angle  $\theta$  alors le vecteur taux de rotation vaut  $\dot{\theta} \vec{z}_0$  avec  $\vec{z}_0$  un vecteur directeur de l'axe de rotation.

Si on considère un point  $M$  tel que :  $\overrightarrow{OM} = z \cdot \vec{z}_0 + R_M \cdot \vec{u}$ . Le vecteur vitesse vaut  $\vec{V}_{M \in S/\mathcal{R}_0} = R_M \dot{\theta} \cdot \vec{v}$ .

La vitesse est perpendiculaire à la direction  $(OM)$  et proportionnelle à  $R_M$ .

Démonstration :

$$\vec{V}_{M \in S/\mathcal{R}_0} = \underbrace{\vec{V}_{O \in S/\mathcal{R}_0}}_{= \vec{0} \text{ car } O \in D_0} + \vec{MO} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}_0} = (-z \cdot \vec{z}_0 - R_M \cdot \vec{u}) \wedge \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 = R_M \dot{\theta} \cdot \vec{v}$$

### VI.2.3 Torseur cinématique

$$\forall M \in S, \quad \{\mathcal{V}_{S/\mathcal{R}_0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}_0} \\ \vec{V}_{M \in S/\mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ R_M \dot{\theta} \cdot \vec{v} \end{array} \right\}_M$$

En particulier, sur l'axe de rotation, le torseur est un **glisseur**, c'est-à-dire que :

$$\forall M \in D_0, \quad \{\mathcal{V}_{S/\mathcal{R}_0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

Remarque : Lorsqu'un solide  $S_1$  est en liaison avec un autre solide  $S_0$  et que le seul degré de liberté conservé est une rotation, on dit que le solide  $S_1$  est en liaison **pivot** par rapport au solide  $S_0$ .

## VI.3 Contact ponctuel en un point

### VI.3.1 Définition

Deux solides  $S_i$  et  $S_k$  sont en contact ponctuel, lorsque le contact se fait sur un point unique.

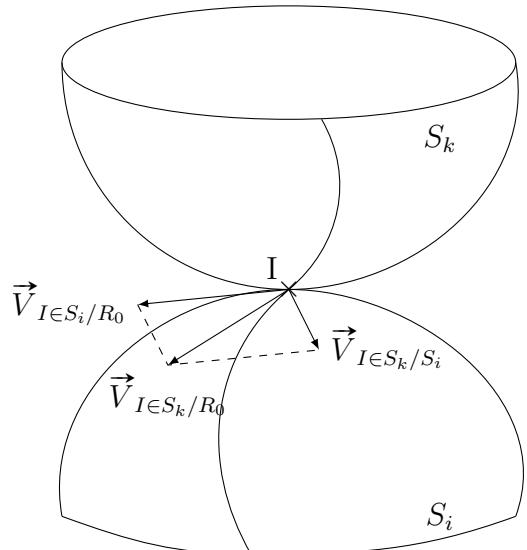
### VI.3.2 Vitesse de glissement au contact

**Définition :**

Soient deux solides  $S_i$  et  $S_k$  en contact par les surfaces qui les limitent. Les deux surfaces  $\Sigma_i$  et  $\Sigma_k$  sont tangentes en un point  $I$  et le **contact est ponctuel**. On appelle vitesse de glissement du solide  $S_k$  par rapport au solide  $S_i$  au point  $I$  :

$$\vec{V}_{I \in S_k/S_i} = \vec{V}_{I \in S_k/\mathcal{R}_0} - \vec{V}_{I \in S_i/\mathcal{R}_0}$$

La vitesse de glissement est la différence des vecteurs vitesse des molécules des solides  $S_i$  et  $S_k$  qui sont en contact au point  $I$ , donc de deux vecteurs vitesse instantanée. Elle dépend donc du temps.



**Propriété 1 :**

La vitesse de glissement est indépendante du repère de référence. En effet nous pouvons écrire la décomposition de la vitesse de glissement par rapport à n'importe repère :

$$\vec{V}_{I \in S_k/S_i} = \vec{V}_{I \in S_k/\mathcal{R}_0} - \vec{V}_{I \in S_i/\mathcal{R}_0} = \vec{V}_{I \in S_k/\mathcal{R}_?} - \vec{V}_{I \in S_i/\mathcal{R}_?}$$

**Propriété 2 :**

La vitesse de glissement du solide  $S_k$  par rapport au solide  $S_i$ , au point  $I$ , est contenue dans le plan tangent commun aux deux solides  $S_i$  et  $S_k$  au point  $I$ . En effet,  $\vec{V}_{I \in S_k/S_i} \cdot \vec{n} = \vec{0}$  avec  $\vec{n}$  la normale au plan tangent, sinon il y aurait interénétration entre les deux solides.

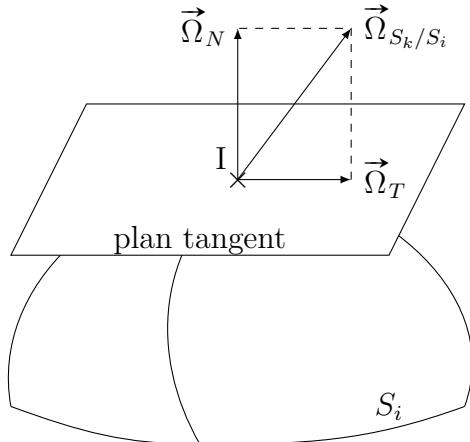
### Roulement sans glissement :

Quand dans les hypothèses, on supposera qu'il y a roulement sans glissement au point de contact  $I$  pour le mouvement de  $S_k$  par rapport à  $S_i$ , il faudra écrire la relation suivante :

$$\vec{V}_{I,S_k/S_i} = \vec{0}$$

### VI.3.3 Vecteur roulement – Vecteur pivotement

Soient  $\vec{\Omega}_T$  et  $\vec{\Omega}_N$  les projections de  $\vec{\Omega}_{S_k/S_i}$ , respectivement, sur le plan tangent commun aux deux solides  $S_i$  et  $S_k$  et sur la normale à ce plan.



$\vec{\Omega}_N$  est appelé vecteur pivotement du solide  $S_k$  par rapport au solide  $S_i$ .

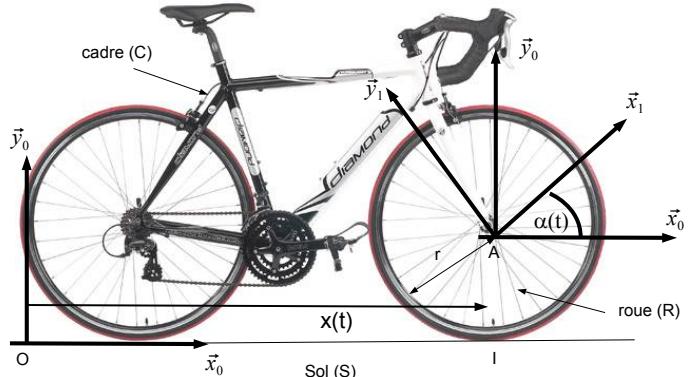
$\vec{\Omega}_T$  est appelé vecteur roulement du solide  $S_k$  par rapport au solide  $S_i$ .

D'après la figure ci-contre, nous pouvons écrire :

- $\vec{\Omega}_N = (\vec{\Omega}_{S_k/S_i} \cdot \vec{n}) \vec{n}$ ;
- $\vec{\Omega}_T = \vec{n} \wedge (\vec{\Omega}_{S_k/S_i} \wedge \vec{n})$

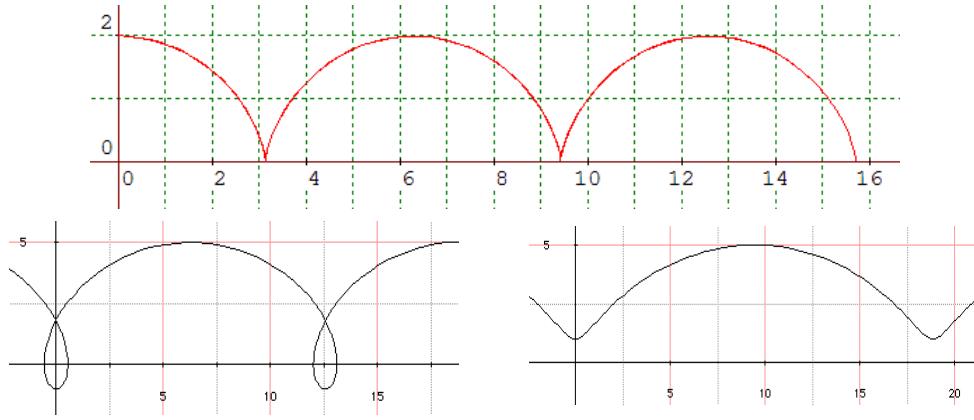
### VI.4 Exemple d'une roue de vélo

On considère un vélo qui avance. La roue (R) de rayon  $r$  roule sans glisser sur le sol (S). La position du cadre (C) du vélo (point A) est repérée par la longueur  $x(t)$  et la rotation de la roue par l'angle  $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ . L'écriture de la vitesse de glissement au point I permet de déterminer une relation entre  $\dot{x}$  et  $\dot{\alpha}$ .



En supposant pour conditions initiales  $x = 0$  quand  $\alpha = 0$ , on a  $x = -r\alpha$ . On peut alors tracer par exemple la trajectoire d'un point de la roue dans ces conditions, on parle de cycloïde.

S'il n'y a pas roulement sans glissement, on a dérapage ou patinage et la trajectoire des points est modifiée.



Remarque : Calcul de la vitesse de glissement

Très souvent la vitesse de glissement est différente de  $\frac{d\vec{OI}}{dt}_{\mathcal{R}_0}$  car l'appartenance du point I à un solide doit être traitée avec précaution. En effet dans l'exemple ci-dessus,  $\frac{d\vec{OI}}{dt}_{\mathcal{R}_0} = \dot{x} \cdot \vec{x}_0 \neq \vec{V}(I \in R/S)$  car le point I considéré dans ce calcul n'est pas le point de glissement mais le point lié au cadre qui se déplace avec lui !

**Pour calculer la vitesse de glissement, on ne doit jamais dériver le vecteur position, mais utiliser la composition des vitesses et la relation de changement de point.**

## VII Complément sur la modélisation et l'analyse des mécanismes

### VII.1 Torseur cinématique des liaisons

#### VII.1.1 Degrés de liberté et torseur cinématique

Une liaison supprime des degrés de liberté de rotation ou de translation entre deux classes d'équivalence cinématique  $S_1$  et  $S_0$ .

Pour caractériser à tout instant le mouvement de  $S_1$  par rapport à  $S_0$ , on introduit à partir des degrés de liberté en rotation, le vecteur taux de rotation  $\vec{\Omega}(S_1/S_0)$  et à partir des degrés de liberté en translation, le vecteur vitesse linéaire d'un point particulier A de la liaison  $\vec{V}(A, S_1/S_0)$ .

Ces quantités permettent de définir le torseur cinématique de la liaison par ses éléments de réduction :

$$\{\mathcal{V}_{S_1/S_0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(A, S_1/S_0) \end{array} \right\}_A$$

En introduisant les composantes des vecteurs dans une base bien choisie (ici  $\mathcal{R}_0$ ), le torseur cinématique de la liaison est alors très proche du tableau des degrés de liberté de la liaison.

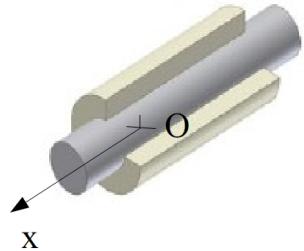
$$\{\mathcal{V}_{S_1/S_0}\} = \left\{ \begin{array}{ll} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & v_z \end{array} \right\}_{A, \mathcal{R}_0}$$

avec  $\vec{\Omega}(S_1/S_0) = \omega_x \cdot \vec{x}_0 + \omega_y \cdot \vec{y}_0 + \omega_z \cdot \vec{z}_0$  et  $\vec{V}(A, S_1/S_0) = v_x \cdot \vec{x}_0 + v_y \cdot \vec{y}_0 + v_z \cdot \vec{z}_0$

Remarque : il est indispensable dans ces conditions de bien préciser la base dans laquelle écrire les vecteurs sont écrits. Un choix intelligent de cette base permet de simplifier les calculs.

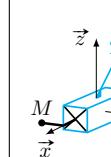
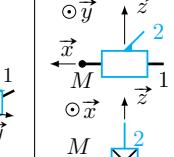
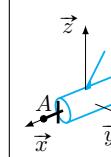
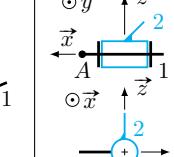
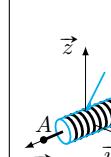
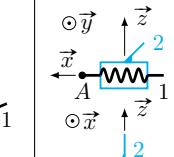
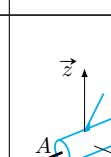
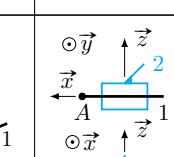
Exemple : Torseur d'une liaison pivot glissant d'axe ( $O, \vec{x}$ )

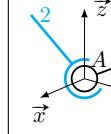
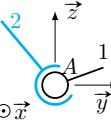
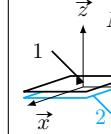
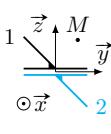
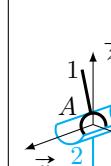
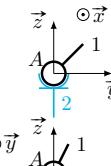
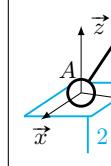
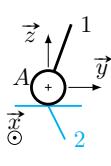
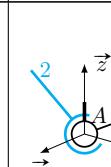
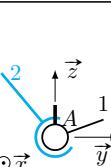
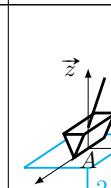
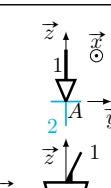
$$\{\mathcal{V}_{S_1/S_0}\} = \begin{cases} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases} \quad \forall P \in (O, \vec{x}), R$$



avec  $R = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

### VII.1.2 Tableau des liaisons normalisées

Nom de la liaison	Caractéristiques géométriques	Degrés de liberté	Schéma spatial	Schémas plans	Torseur cinématique de 2/1
Encastrement		0 ddl			$\forall M \quad \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_M$
Glissière	Direction $\vec{x}$	1 ddl			$\forall M \quad \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ u_{21} \vec{x} \end{matrix} \right\}_M$
Pivot	Axe ( $A, \vec{x}$ )	1 ddl			$\forall M \in (A, \vec{x}) \quad \left\{ \begin{matrix} p_{21} \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_M$
Hélicoïdale	Axe ( $A, \vec{x}$ )	1 ddl			$\forall M \in (A, \vec{x}) \quad \left\{ \begin{matrix} p_{21} \vec{x} \\ u_{21} \vec{x} \end{matrix} \right\}_M$ avec $u_{21} = k \cdot p_{21}$ $k = \frac{p}{2\pi}$ où $p$ est le pas algébrique (positif ou négatif) en $\text{m} \cdot \text{tour}^{-1}$
Pivot glissant	Axe ( $A, \vec{x}$ )	2 ddl			$\forall M \in (A, \vec{x}) \quad \left\{ \begin{matrix} p_{21} \vec{x} \\ u_{21} \vec{x} \end{matrix} \right\}_M$

Nom de la liaison	Caractéristiques géométriques	Degrés de liberté	Schéma spatial	Schémas plans	Torseur cinématique de 2/1
<b>Sphérique</b> 	Centre de la sphère $A$	3 ddl			En $A$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{quelconque} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$
<b>Appui plan</b> 	Normale au plan $\vec{z}$	3 ddl			$\forall M \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_{21} \vec{z} \\ u_{21} \vec{x} + v_{21} \vec{y} \end{array} \right\}_M$
<b>Sphère cylindre</b> 	Centre de la sphère $A$ Direction $\vec{x}$	4 ddl			En $A$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{quelconque} \\ u_{21} \vec{x} \end{array} \right\}_A$
<b>Sphère plan</b> 	Point de contact $A$ Normale au plan $\vec{z}$	5 ddl			$\forall M \in (A, \vec{z}) \left\{ \begin{array}{l} \text{quelconque} \\ u_{21} \vec{x} + v_{21} \vec{y} \end{array} \right\}_M$ avec $\vec{V}_{2/1}(B) \cdot \vec{z} = 0$
<b>Sphérique à doigt</b> 	Centre de la sphère $A$ Normale au plan $\vec{x}$ Direction du doigt $\vec{z}$	2 ddl			En $A$ $\left\{ \begin{array}{l} p_{21} \vec{x} + r_{21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$
<b>Linéaire rectiligne (ou cylindre plan)</b> 	Droite de contact $(A, \vec{x})$ Normale au plan $\vec{z}$	4 ddl			$\forall M \in \text{plan}(A, \vec{x}, \vec{z}) \left\{ \begin{array}{l} p_{21} \vec{x} + r_{21} \vec{z} \\ u_{21} \vec{x} + v_{21} \vec{y} \end{array} \right\}_M$

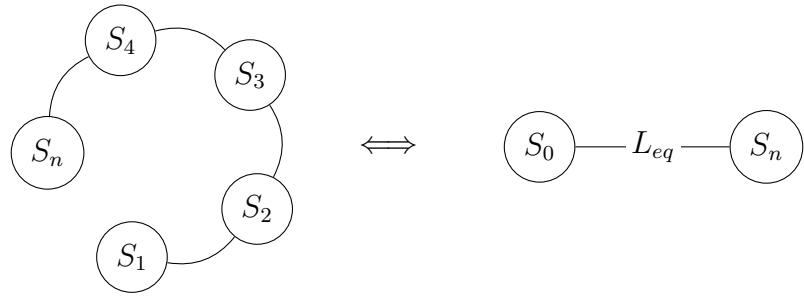
## VII.2 Liaison cinématique équivalente

### VII.2.1 Définition

La réalisation technologique des liaisons impose la mise en place de liaisons géométriques composées. Une liaison équivalente est une liaison du tableau normalisé autorisant les mêmes mouvements et transmettant les mêmes efforts que l'association de liaisons en série ou en parallèle.

Il n'est pas toujours possible de trouver une liaison équivalente !

### VII.2.2 Liaisons en série

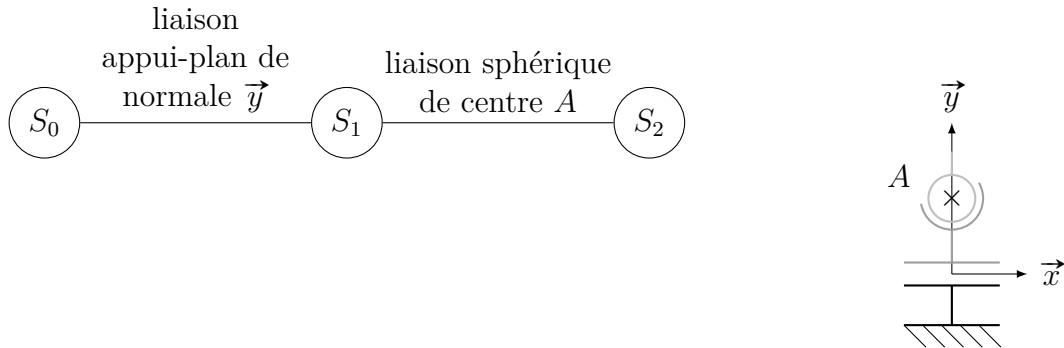


#### Condition de compatibilité cinématique

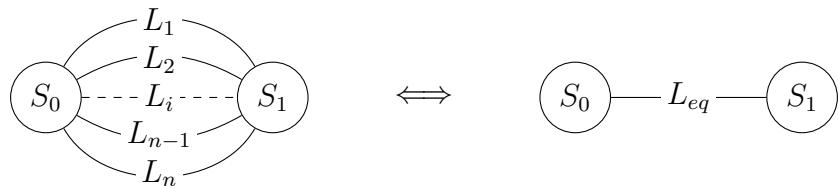
Le torseur cinématique, de la liaison équivalente aux  $n - 1$  liaisons disposées en série, est obtenu en additionnant, **au même point**, les différentes composantes de toutes les liaisons élémentaires :

$$\{\mathcal{V}_{n/1}\}^{L_{eq}} = \{\mathcal{V}_{n/n-1}\} + \{\mathcal{V}_{n-1/n-2}\} + \cdots + \{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\}$$

#### Application :



### VII.2.3 Liaisons en parallèle

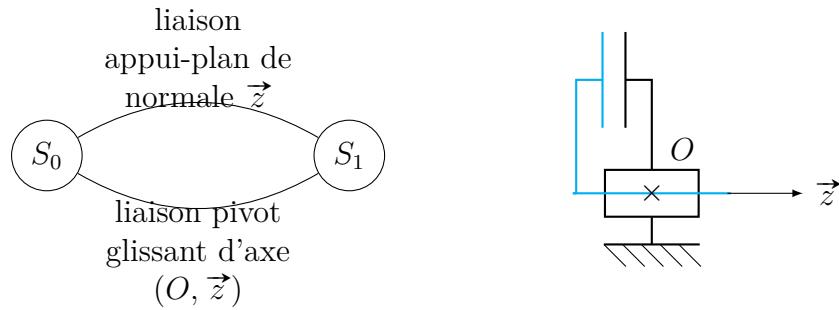


#### Condition de compatibilité cinématique

Le torseur cinématique, de la liaison équivalente aux  $n$  liaisons disposées en parallèle, est égal au torseur cinématique de chacune des liaisons élémentaires ramenées au même point. Il s'agit de vérifier la compatibilité entre les différents torseurs en **un même point** (mouvements autorisés).

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\}^{L_{eq}} = \{\mathcal{V}_{1/0}\}^{L_1} = \{\mathcal{V}_{1/0}\}^{L_2} = \cdots = \{\mathcal{V}_{1/0}\}^{L_{n-1}} = \{\mathcal{V}_{1/0}\}^{L_n}$$

#### Application :



### VII.3 Fermeture cinématique – Lois entrée/sortie

Il s'agit de réaliser une fermeture sur les quantités cinématiques :

- vecteur taux de rotation ;
- vecteur vitesse d'un point.

Cela revient à faire une fermeture sur les torseurs cinématiques ramenées **au même point**.

$$\{\mathcal{V}_{n/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/2}\} + \cdots + \{\mathcal{V}_{n-1/n}\} = \{0\}$$

Les équations obtenues dans une fermeture de chaîne cinématique sont les dérivées des équations obtenues dans les fermetures géométriques. Les deux approches sont donc équivalentes.

On choisira l'une ou l'autre des méthodes en fonction de l'énoncé et des quantités recherchées. En général, il est plus rapide de faire une fermeture géométrique et de dériver des relations scalaires que de faire une fermeture cinématique.

## Annexe – Dérivation vectorielle

### I Produit vectoriel

#### I.1 Définition

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs est un **vecteur**, noté  $\vec{w}$  tel que  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  :

- sa norme est  $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})$  ;
- sa direction est orthogonale à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ;
- son sens est tel que la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  soit directe.

#### I.2 Propriétés

Anticommutativité :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

Distributivité :  $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Si  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$  alors  $\vec{u} = \vec{0}$ , ou  $\vec{v} = \vec{0}$ , ou  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

#### I.3 Expression analytique

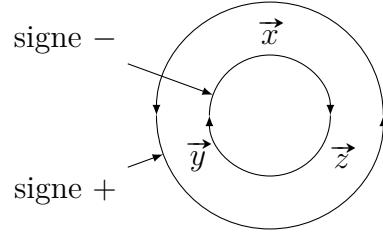
Dans une base  $B$  orthonormée directe  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , on peut montrer que le produit vectoriel est

défini par la relation entre les coordonnées :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_x & v_x & u_y v_z - u_z v_y \\ u_y & v_y & v_x u_z - v_z u_x \\ u_z & v_z & u_x v_y - u_y v_x \end{vmatrix}_B$

Pour éviter de poser les calculs en colonne, on utilisera régulièrement les propriétés :

$$\begin{aligned} \vec{x} \wedge \vec{y} &= \vec{z} & \vec{y} \wedge \vec{x} &= -\vec{z} \\ \vec{y} \wedge \vec{z} &= \vec{x} & \vec{z} \wedge \vec{y} &= -\vec{x} \\ \vec{z} \wedge \vec{x} &= \vec{y} & \vec{x} \wedge \vec{z} &= -\vec{y} \end{aligned}$$

Ces propriétés se retrouvent vite :



### II Produit mixte

#### II.1 Définition

Le produit mixte est un **nombre** égal à  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$  noté  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ .

#### II.2 Propriétés

Le produit mixte est invariant par permutation circulaire :  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ .

Il est nul si deux vecteurs sont colinéaires ou si les trois vecteurs sont coplanaires.

### III Dérivation d'une fonction scalaire (rappels)

Soit une fonction scalaire  $f(t)$ . Par définition, on exprime la dérivée de  $f$  par rapport au temps :

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \dot{f}(t)$$

Différentes opérations peuvent être réalisées sur les dérivées de fonctions scalaires :

$$\text{Soit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ un scalaire : } \frac{d[\lambda f(t)]}{dt} = \lambda \frac{df(t)}{dt}$$

$$\text{Soit une fonction scalaire } g(t) : \frac{d[f(t).g(t)]}{dt} = \frac{df(t)}{dt}g(t) + f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{f(t)}{g(t)} \right] = \frac{1}{g(t)^2} \left[ \frac{df(t)}{dt}g(t) - f(t)\frac{dg(t)}{dt} \right]$$

## IV Dérivation d'une fonction vectorielle

### IV.1 Expression dans $R_0$ et dérivation par rapport à $R_0$

Attention : La dérivation d'une fonction vectorielle est définie toujours par rapport à un repère de référence.

Soit un référentiel auquel on attache un repère  $R_0 : (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

Soit une fonction vectorielle  $\vec{U}(t) = X_0(t)\vec{x}_0 + Y_0(t)\vec{y}_0 + Z_0(t)\vec{z}_0$  où  $X_0(t)$ ,  $Y_0(t)$  et  $Z_0(t)$  sont des fonctions scalaires de  $t$ .

On appelle dérivée du vecteur  $\vec{U}(t)$  par rapport au temps relativement au repère  $R_0$  :

$$\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{U}(t + \Delta t) - \vec{U}(t)}{\Delta t}$$

Remarque : La limite est calculée par rapport à  $R_0 : \vec{U}(t + \Delta t) = X_0(t + \Delta t)\vec{x}_0 + Y_0(t + \Delta t)\vec{y}_0 + Z_0(t + \Delta t)\vec{z}_0$

et on calcule  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[X_0(t + \Delta t) - X_0(t)]\vec{x}_0 + [Y_0(t + \Delta t) - Y_0(t)]\vec{y}_0 + [Z_0(t + \Delta t) - Z_0(t)]\vec{z}_0}{\Delta t}$

$$\text{Soit } \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{dX_0(t)}{dt}\vec{x}_0 + \frac{dY_0(t)}{dt}\vec{y}_0 + \frac{dZ_0(t)}{dt}\vec{z}_0 = \dot{X}_0(t)\vec{x}_0 + \dot{Y}_0(t)\vec{y}_0 + \dot{Z}_0(t)\vec{z}_0$$

Si on cherche la dérivée du vecteur  $\vec{U}(t)$  par rapport au temps dans le référentiel  $R_1$  mobile par rapport à  $R_0 : \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_1}$ , on doit écrire :  $\vec{U}(t + \Delta t) = X_0(t + \Delta t)\vec{x}_0(t + \Delta t) + Y_0(t + \Delta t)\vec{y}_0(t + \Delta t) + Z_0(t + \Delta t)\vec{z}_0(t + \Delta t)$  car  $\vec{x}_0$ ,  $\vec{y}_0$  et  $\vec{z}_0$  sont mobiles par rapport à  $R_1$ .

### IV.2 Opérations sur les dérivées vectorielles

Soit  $R_0$  un repère de référence. Soient  $\vec{U}(t)$  et  $\vec{V}(t)$  deux fonctions vectorielles exprimées dans  $R_0$ .

En utilisant les relations précédentes, on montre facilement :

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \frac{d\lambda\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_0} = \lambda \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_0} ;$
- $\frac{d\vec{U}(t) + \vec{V}(t)}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_0} + \frac{d\vec{V}(t)}{dt} \Big|_{R_0} ;$
- $\frac{d\vec{U}(t) \cdot \vec{V}(t)}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_0} \cdot \vec{V}(t) + \vec{U}(t) \cdot \frac{d\vec{V}(t)}{dt} \Big|_{R_0} ;$
- $\frac{d\vec{U}(t) \wedge \vec{V}(t)}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_0} \wedge \vec{V}(t) + \vec{U}(t) \wedge \frac{d\vec{V}(t)}{dt} \Big|_{R_0} .$

### IV.3 Dérivation dans $R_0$ d'une fonction exprimée dans $R_1$

Soit  $R_0$  un repère de référence. Soit  $R_1$  un repère de référence mobile par rapport à  $R_0$ . Soit une fonction vectorielle  $\vec{U}(t) = x_1(t)\vec{x}_1 + y_1(t)\vec{y}_1 + z_1(t)\vec{z}_1$ .

La dérivée vaut : 
$$\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_0} = \dot{x}_1(t)\vec{x}_1 + x_1(t) \frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{R_0} + \dot{y}_1(t)\vec{y}_1 + y_1(t) \frac{d\vec{y}_1}{dt} \Big|_{R_0} + \dot{z}_1(t)\vec{z}_1 + z_1(t) \frac{d\vec{z}_1}{dt} \Big|_{R_0}$$

Il faut donc calculer la dérivée des vecteurs de base.

#### IV.3.1 Existence d'un vecteur rotation

La base de  $R_1$ ,  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , forme une base orthonormée directe alors, on a :

$$\begin{cases} \|\vec{x}_1\| = \|\vec{y}_1\| = \|\vec{z}_1\| = 1 \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 = \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1 = \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_1 = 1 \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 = \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_1 = \vec{z}_1 \cdot \vec{x}_1 = 0 \end{cases}$$

Si on dérive toutes ses relations par rapport au temps et relativement à  $R_0$ .

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 = 1 \Rightarrow \frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{R_0} \cdot \vec{x}_1 = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{R_0} = \alpha \vec{y}_1 + \beta \vec{z}_1$$

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1 = 1 \Rightarrow \frac{d\vec{y}_1}{dt} \Big|_{R_0} \cdot \vec{y}_1 = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{y}_1}{dt} \Big|_{R_0} = \gamma \vec{x}_1 + \lambda \vec{z}_1$$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_1 = 1 \Rightarrow \frac{d\vec{z}_1}{dt} \Big|_{R_0} \cdot \vec{z}_1 = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{z}_1}{dt} \Big|_{R_0} = \varphi \vec{x}_1 + \xi \vec{y}_1$$

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{R_0} \cdot \vec{y}_1 + \vec{x}_1 \cdot \frac{d\vec{y}_1}{dt} \Big|_{R_0} = 0 \Rightarrow \alpha = -\gamma$$

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{z}_1 = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{R_0} \cdot \vec{z}_1 + \vec{x}_1 \cdot \frac{d\vec{z}_1}{dt} \Big|_{R_0} = 0 \Rightarrow \beta = -\varphi$$

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_1 = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{y}_1}{dt} \Big|_{R_0} \cdot \vec{z}_1 + \vec{y}_1 \cdot \frac{d\vec{z}_1}{dt} \Big|_{R_0} = 0 \Rightarrow \xi = -\lambda$$

On a donc montré que  $\frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{R_0} = \alpha \vec{y}_1 + \beta \vec{z}_1 \quad \frac{d\vec{y}_1}{dt} \Big|_{R_0} = -\alpha \vec{x}_1 + \lambda \vec{z}_1 \quad \frac{d\vec{z}_1}{dt} \Big|_{R_0} = -\beta \vec{x}_1 - \lambda \vec{y}_1$ .

En posant  $\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \lambda \vec{x}_1 - \beta \vec{y}_1 + \alpha \vec{z}_1$ , on a :

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{R_0} = \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{x}_1 \quad \frac{d\vec{y}_1}{dt} \Big|_{R_0} = \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{y}_1 \quad \frac{d\vec{z}_1}{dt} \Big|_{R_0} = \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{z}_1$$

$\vec{\Omega}_{R_1/R_0}$  est appelé vecteur taux de rotation instantanée du repère  $R_1$  par rapport à  $R_0$ .

#### IV.3.2 Formule de dérivation vectorielle

En reprenant le calcul précédent, on obtient :

$$\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_0} = \dot{x}_1(t)\vec{x}_1 + x_1(t) [\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{x}_1] + \dot{y}_1(t)\vec{y}_1 + y_1(t) [\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{y}_1] + \dot{z}_1(t)\vec{z}_1 + z_1(t) [\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{z}_1]$$

$$\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_0} = \underbrace{\dot{x}_1(t)\vec{x}_1 + \dot{y}_1(t)\vec{y}_1 + \dot{z}_1(t)\vec{z}_1}_{\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_1}} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \underbrace{[x_1(t)\vec{x}_1 + y_1(t)\vec{y}_1 + z_1(t)\vec{z}_1]}_{\vec{U}(t)}$$

D'où  $\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{U}(t)$  la formule de dérivation vectorielle à connaître.

## IV.4 Propriété du vecteur taux de rotation

Soit une fonction vectorielle  $\vec{U} = x_1(t)\vec{x}_1 + y_1(t)\vec{y}_1 + z_1(t)\vec{z}_1$ .

Soit  $R_0$  un repère de référence. Soit  $R_1$  un repère mobile par rapport à  $R_0$ . Soit  $R_2$  un repère mobile par rapport à  $R_1$ .

### IV.4.1 Antisymétrie par rapport à un repère de référence

$$\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{U}(t)$$

On peut écrire :  $\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_1} = \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_0} + \vec{\Omega}_{R_0/R_1} \wedge \vec{U}(t)$

En ajoutant ces deux relations, on obtient :  $[\vec{\Omega}_{R_1/R_0} + \vec{\Omega}_{R_0/R_1}] \wedge \vec{U}(t) \quad \forall \vec{U}(t)$ .

On en déduit que  $\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = -\vec{\Omega}_{R_0/R_1}$ .

### IV.4.2 Composition des vecteurs taux de rotation

$$\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{U}(t) \quad \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_1} = \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{U}(t)$$

$$\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_2} = \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \Big|_{R_0} + \vec{\Omega}_{R_0/R_2} \wedge \vec{U}(t)$$

En additionnant les trois relations précédentes, on a :  $[\vec{\Omega}_{R_1/R_0} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} + \vec{\Omega}_{R_0/R_2}] \wedge \vec{U}(t) \quad \forall \vec{U}(t)$   
On en déduit la composition des vecteurs taux de rotation :

$$\vec{\Omega}_{R_2/R_0} = \vec{\Omega}_{R_2/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0}$$

On peut généraliser cette relation pour  $n$  repères.

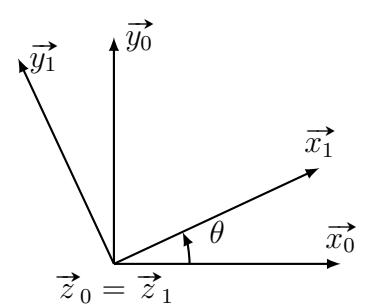
### IV.4.3 Détermination du vecteur taux de rotation

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{d(\cos \theta \vec{x}_0 + \sin \theta \vec{y}_0)}{dt} \Big|_{R_0} = \dot{\theta}(-\sin \theta \vec{x}_0 + \cos \theta \vec{y}_0) = \dot{\theta} \vec{z}_0$$

$$\dot{\theta} \vec{y}_1 = \dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1$$

On en déduit que  $\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta} \vec{z}_0$ .

En Sciences de l'Ingénieur, on utilise très souvent ce type de repérage (mouvement de rotation autour d'un axe). Il suffira alors pour formuler le vecteur taux de rotation d'utiliser la propriété précédente et la composition des vecteurs taux de rotation.



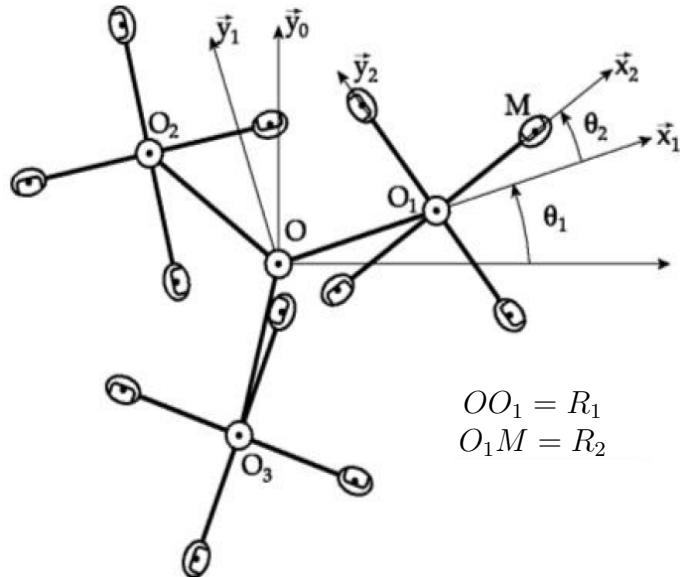
# TD 1 – Manège Pieuvre

## Présentation

Le manège pieuvre est un classique des foires. Il procure des sensations par son mouvement épicycloïdal qui produit de fortes accélérations. Nous allons étudier la vitesse d'un des sièges de ce manège, auquel on associe le point  $M$ . Soit  $O$  le centre de rotation principal,  $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0)$  le repère lié au bras principal **1**, en rotation d'angle  $\theta_1$  par rapport à un repère  $(\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 = \vec{z}_1))$  fixe par rapport au sol **0**. Soit  $\mathcal{R}_2 = (O_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 = \vec{z}_1)$  un repère accroché au bras secondaire **2** en rotation d'angle  $\theta_2$  par rapport au bras **1**.



On ne tient pas compte de la possibilité de rotation autour de  $\vec{y}_1$  pour les bras.



**Q1.** Donner les figures de changement de bases relatives aux angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Écrire les vecteurs taux de rotation correspondants.

**Q2.** Exprimer le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  le plus simplement possible.

**Q3.** Dériver ce vecteur pour obtenir  $\vec{V}_{M \in 2/0}$ . Mettre cette vitesse sous la forme :

$$\vec{V}_{M \in 2/0} = R_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1 + R_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_2$$

En observant le manège tourner en régime permanent, on constate que  $\omega_1 = \dot{\theta}_1 = \text{cste}$  et  $\omega_2 = \dot{\theta}_2 = -2\omega_1$ .

**Q4.** Calculer dans ces conditions  $\|\vec{V}_{M \in 2/0}\|$  et indiquer pour quelle valeur de  $\theta_2$  cette norme est maximale. Effectuer l'application numérique pour  $R_1 = 8 \text{ m}$ ,  $R_2 = 1 \text{ m}$  et  $\omega_1 = 6 \text{ tr/min}$ .

**Q5.** Calculer l'accélération  $\vec{\Gamma}_{M \in 2/0}$  dans le cas où  $\omega_1 = \dot{\theta}_1 = \text{cste}$  et  $\omega_2 = \dot{\theta}_2 = -2\omega_1$  et en déduire la valeur de la norme de l'accélération. Quelle est la norme de l'accélération maximale subie par un passager ?

**Q6.** Écrire les torseurs cinématiques  $\{\mathcal{V}_{1/0}\}$  et  $\{\mathcal{V}_{2/0}\}$ .

# TD 2 – Space Mountain

## Mise en situation

Le Space Mountain est une attraction installée au parc Euro Disney. Elle se présente sous la forme d'un chapiteau renfermant une montagne russe à grande vitesse. Le système de lancement de la montagne russe, évoquant un canon, est une catapulte à propulsion électrique de type porte-avions. Un pousseur vient en contact avec le train (contenant les passagers) afin de le propulser.

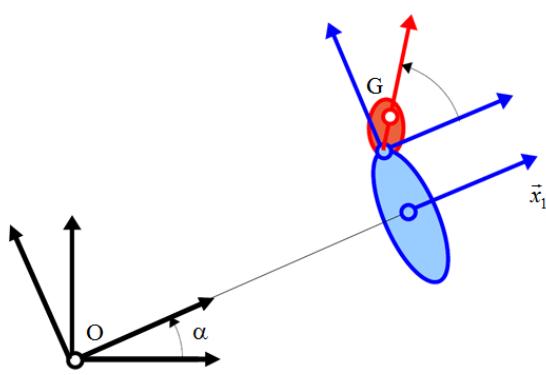


Les critères suivants caractérisent la fonction de propulsion :

Critères	Niveaux
Temps de cycle	$t < 30$ s
Fréquence de lancement	1 toutes les 36 s
Masse propulsée	7 500 kg maxi
Inclinaison voie	$34^\circ$
Vitesse de propulsion	$18$ m/s $\pm 5\%$
Accélération	$8$ m/s $^2$ $\pm 1$ m/s $^2$
Dépassement des capacités humaines	0

On s'intéresse dans ce sujet à valider le non-dépassement des capacités humaines en termes d'accélérations supportées.

On donne le modèle cinématique suivant de la catapulte et d'un passager.



On associe au sol le repère  $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . Le repère  $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$  est attaché au rail incliné d'un angle  $\alpha$  constant avec  $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_0) = (\vec{y}, \vec{y}_0)$ .  $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  est le repère attaché à la catapulte. Les repères  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_0$  sont en translation l'un par rapport à l'autre. On note  $\overrightarrow{OO_1} = \lambda(t)\vec{x}_1$ . Le corps du passager est immobile par rapport à la catapulte par contre la tête peut pivoter. On associe le repère  $\mathcal{R}_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  à la tête du passager avec  $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$  dépendant du temps. Le centre de gravité de la tête est défini par  $\overrightarrow{O_2G} = a_2\vec{x}_2$ . On a également  $\overrightarrow{O_1O_2} = a_1\vec{x}_1 + b_1\vec{y}_1$ .

**Q1.** Compléter le schéma ci-dessous en faisant apparaître les points et repères manquants. Exprimer les vecteurs taux de rotation  $\vec{\Omega}_{1/0}$ ,  $\vec{\Omega}_{2/1}$  et  $\vec{\Omega}_{2/0}$ .

**Q2.** Calculer les vecteurs vitesses instantanées  $\vec{V}(O_2/0)$  puis  $\vec{V}(G/0)$ .

**Q3.** En déduire l'accélération  $\vec{\Gamma}(G/0)$ .

On imagine le cas le plus défavorable en supposant que l'accélération maximale du cahier des charges est supportée par le terme de l'accélération projetée sur  $\vec{y}_2$ , à savoir  $a_2\ddot{\beta}$ .

Le corps humain peut supporter des accélérations angulaires jusqu'à  $80 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$ .  
On prend  $a_2 = 0,17 \text{ m}$ .

**Q4.** Montrer que la spécification de non-dépassement des capacités humaines est vérifiée.

# TD 3 – Robot de soudure

Les robots sont très utilisés dans les opérations de fabrication (soudure, assemblage ...). L'étude suivante porte sur un tel robot dont une modélisation est proposée figure 1. Le robot est constitué de 4 segments (ou solides) articulés entre eux, le premier solide étant articulé sur un solide fixe **S0**. Le robot est de type RRRT, où R désigne un mouvement relatif de type Rotation entre deux segments consécutifs et T désigne un mouvement relatif de type Translation.

Le solide **S0**, appelé base, est fixé au sol de l'atelier. Soit  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère lié à la base.

Le solide **S1**, appelé fût, est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O_0, \vec{z}_0)$  par rapport à la base **S0**. Ce mouvement de rotation est assuré par un moteur M1 non représenté. Soit  $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  un repère lié au fût. On pose  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  et  $\overrightarrow{O_0 O_1} = L_0 \vec{z}_0$  ( $L_0 = 50$  cm).

Le solide **S2**, appelé bras, est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O_1, \vec{x}_1)$  par rapport au fût **S1**. Ce mouvement de rotation est assuré par un moteur M2 non représenté. Soit  $R_2(O_2, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  un repère lié au bras. On pose  $\theta_2 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$  et  $\overrightarrow{O_1 O_2} = L_1 \vec{y}_2$  ( $L_1 = 70$  cm).

Le solide **S3**, appelé avant-bras, est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O_2, \vec{x}_1)$  par rapport au bras **S2**. Ce mouvement de rotation est assuré par un moteur M3 non représenté. Soit  $R_3(O_3, \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  un repère lié à l'avant-bras. On pose  $\theta_3 = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$  et  $\overrightarrow{O_2 O_3} = L_2 \vec{y}_3$  ( $L_2 = 60$  cm).

Le solide **S4**, appelé organe terminal, est animé d'un mouvement de translation suivant la direction  $\vec{z}_3$  par rapport à l'avant-bras **S3**. Ce mouvement de translation est assuré par un vérin linéaire V4 non représenté. Soit  $R_4(O_4, \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  un repère lié à l'organe terminal. On pose  $\overrightarrow{O_3 O_4} = \lambda(t) \vec{z}_3$ .

Les mouvements du robot sont étudiés dans le repère  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié à la base et supposé galiléen. L'axe  $(O_0, \vec{z}_0)$  est vertical ascendant.

## Cahier des charges :

- un cordon de soudure ne doit pas être réalisé à une vitesse supérieure à 30 cm/s.

## Caractéristiques du vérin :

- vitesse maximale :  $\pm 0,1$  m/s
- accélération maximale :  $\pm 1$  m/s<sup>2</sup>
- effort maximum : 50 N

## Caractéristiques des moteurs (après réduction) :

- vitesse de rotation maximale :  $\pm 0,3$  rad/s
- accélération angulaire maximale :  $\pm 1$  rad/s<sup>2</sup>

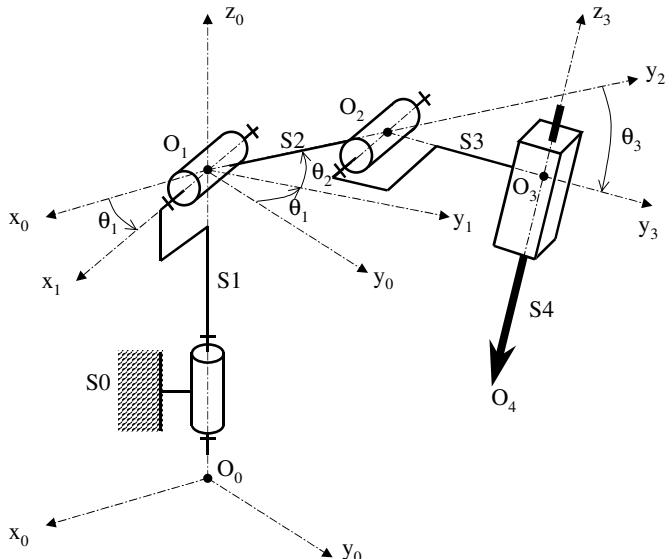


FIGURE 1 : Modélisation du robot de soudure

## Détermination de la loi de commande en vitesse

Dans cette partie, on s'intéresse plus particulièrement à la caractérisation de la position de l'organe terminal en fonction des variables articulaires  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \lambda)$  ainsi qu'à la commande des axes pour accomplir une tâche donnée, c'est-à-dire pour réaliser le déplacement d'une pièce suivant une trajectoire donnée. Pour obtenir un mouvement donné de l'organe terminal, il faut spécifier les vitesses angulaires des moteurs  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$  et la vitesse linéaire du vérin  $\dot{\lambda}$ .

L'objectif de cette partie est donc de déterminer la vitesse d'un point de l'organe terminal en fonction des paramètres de vitesse imposés.

**Q1.** Mettre en place les figures de changement de bases relatives aux angles de rotation  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ .

**Q2.** Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{O_0O_4}$  sans chercher à le décomposer dans une base précise.

**Q3.** En utilisant la dérivation vectorielle, montrer que le vecteur vitesse  $\vec{V}(O_4 \in S4/R_0)$  vaut :  

$$\vec{V}(O_4 \in S4/R_0) = \dot{\lambda}\vec{z}_3 + L_1\dot{\theta}_2\vec{z}_2 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)(L_2\vec{z}_3 - \lambda\vec{y}_3) + [\lambda \sin(\theta_2 + \theta_3) - L_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) - L_1 \cos \theta_2]\dot{\theta}_1\vec{x}_2$$

**Q4.** Retrouver ce résultat en utilisant la composition des vecteurs vitesse et le champ des vecteurs vitesse (formule de Varignon).

## Commande pour un déplacement horizontal de l'organe terminal

On souhaite réaliser un cordon de soudure d'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  (cf. FIGURE 1). Ce mouvement impose les contraintes suivantes :

- déplacement dans le plan :  $\theta_1 = 0$  ;
- réalisation d'un cordon de soudure correct :  $\alpha = (\vec{z}_0, \vec{z}_3) = \text{cste}$  ;
- déplacement de l'organe terminal à vitesse constante selon  $\vec{y}_0$  :  $\vec{V}(O_4 \in S4/R_0) = V\vec{y}_0$  avec  $V = \text{cste}$ .

**Q5.** Après avoir exprimé  $\alpha$  en fonction de  $\theta_1, \theta_2$  et  $\theta_3$ , en utilisant les deux premières hypothèses, simplifier au maximum l'expression de  $\vec{V}(O_4 \in S4/R_0)$ .

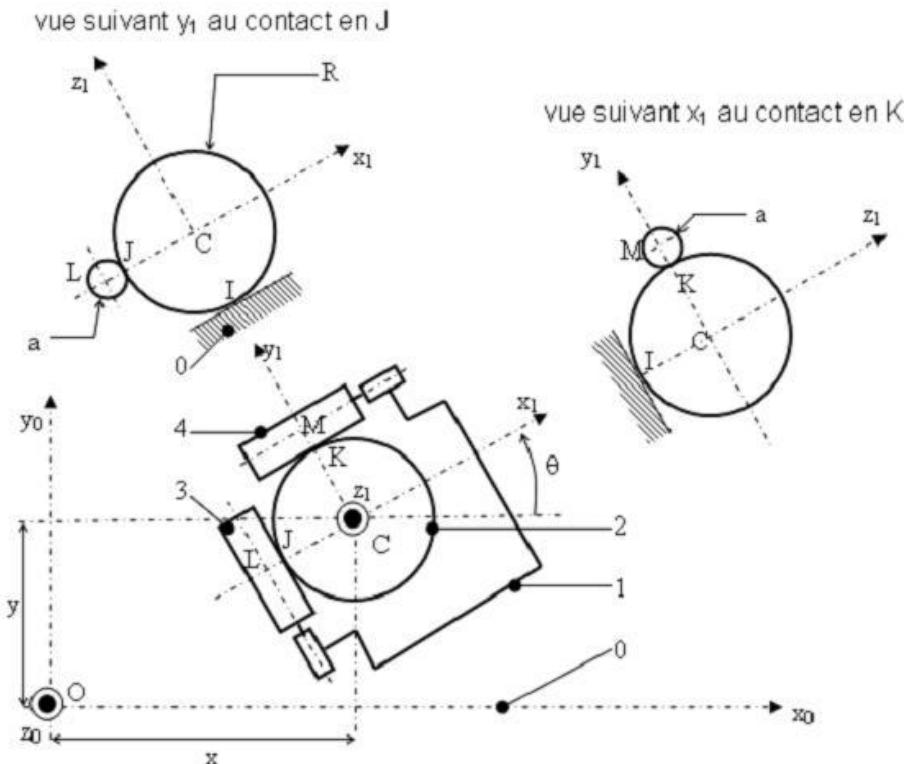
**Q6.** Donner les deux relations scalaires, reliant les paramètres articulaires  $\theta_i$  et leur dérivée  $\dot{\theta}_i$  et  $\dot{\lambda}$  en fonction de  $\alpha$  et  $V$ , traduisant la relation  $\vec{V}(O_4 \in S4/R_0) = V\vec{y}_0$ .

**Q7.** Déterminer le vecteur taux de rotation  $\vec{\Omega}(S3/S0)$ . En déduire le mouvement de **S3** par rapport à **S0**.

**Q8.** Déterminer la vitesse maximale  $V_{\max}$  atteignable en fonction des caractéristiques du vérin et des moteurs. Conclure quant au respect du cahier des charges sur le critère de vitesse maximale.

## TD 4 – Vieilles souris d'ordinateur

On se propose d'étudier le fonctionnement d'une souris mécanique associée à un micro-ordinateur et de comprendre les inconvénients liés à ce type de souris. Quand vous manipulez une souris mécanique en la faisant glisser sur une surface plane, une boule de caoutchouc – ou d'acier recouvert de caoutchouc – située sous la souris, tourne en suivant le même mouvement. Cette boule entraîne par friction deux rouleaux qui la touchent en deux points. Un des rouleaux obéit aux déplacements verticaux sur l'écran. Le second, perpendiculaire au premier, gère les mouvements horizontaux. Chaque rouleau communique ses rotations à un petit disque, appelé encodeur (du type codeur incrémental). L'encodeur est constitué d'un disque dont sa périphérie est constituée d'alternance de dents (présence de matière et absence de matière), d'un émetteur de lumière (photodiode émettrice) et d'un récepteur de lumière (phototransistor récepteur). Le comptage des dents permet de mesurer le déplacement.



Le plan de travail est indicé (0), il lui est associé le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

Le cadre lié à la souris porte le numéro (1), il lui est associé le repère  $R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

En fonctionnement normal, la bille 2 de rayon  $R$  roule sans glisser en  $I$ , sur le plan lié à  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ .

L'encodeur 3, de rayon  $a$ , est en rotation d'axe  $(L, \vec{y}_1)$  avec le cadre 1.

L'encodeur 4, de rayon  $a$ , est en rotation d'axe  $(M, \vec{x}_1)$  avec le cadre 1.

En fonctionnement normal, les encodeurs 3 et 4 roulent sans glisser, respectivement en  $J$  et  $K$  sur la bille 2.

On note  $\vec{\Omega}(3/1) = \omega_{31} \vec{y}_1$  le vecteur taux de rotation de 3/1, et  $\vec{\Omega}(4/1) = \omega_{41} \vec{x}_1$  le vecteur taux de rotation de 4/1.

On suppose que le cadre **1** est en liaison appui-plan par rapport à (**0**). On note  $\vec{IC} = R\vec{z}_1 = R\vec{z}_0$  (la souris ne décolle pas du plan!!!). La position de 1/0 est définie par :  $\vec{OC} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + R\vec{z}_0 ; \theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) ; \vec{z}_0 = \vec{z}_1$ .

Le mouvement du cadre **1** par rapport au plan **0** est ainsi défini par le torseur cinématique :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 \end{array} \right\}_C$$

La bille **2** est en liaison rotule avec le cadre **1** de centre *C*. On note le torseur cinématique associé à cette liaison :  $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(2/1) = p\vec{x}_0 + q\vec{y}_0 + r\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$  où *p*, *q*, *r* sont des inconnues.

---

### Objectif

---

*L'objectif de ce problème est de relier la position de la souris *x* et *y* dans le plan aux rotations des encodeurs  $\theta_{31}$  et  $\theta_{41}$ . Ces relations seront utilisées pour programmer le driver permettant à la souris de fonctionner sur le PC.*

---

**Q1.** Tracer le graphe de liaisons de ce mécanisme. Donner la forme des torseurs cinématiques de chacune des liaisons en choisissant pour chaque torseur un point d'écriture et une base simples.

**Q2.** Donner l'expression du torseur cinématique du mouvement 2/0 en *C* en fonction des inconnues du mouvement 1/0 et 2/1.

**Q3.** Écrire en *I* le torseur cinématique du mouvement 2/0.

**Q4.** Expliciter la condition de roulement sans glissement en *I*. En déduire  $\vec{\Omega}(2/1)$  en fonction des données. Reste-t-il une composante inconnue ?

**Q5.** Expliciter la condition de roulement sans glissement en *J*. En appliquant une démarche similaire à ce qui a été fait pour *I*, déduire  $\vec{\Omega}(3/1)$  en fonction des données. Que dire de la composante inconnue ?

**Q6.** De même, expliciter la condition de roulement sans glissement en *K* et en déduire  $\vec{\Omega}(4/1)$  en fonction des données.

**Q7.** Exprimer les vitesses de déplacement de la souris *x* et *y* en fonction de la mesure de la rotation des encodeurs  $\omega_{31}$  et  $\omega_{41}$ .

**Q8.** Lorsque l'on utilise la souris, l'angle  $\theta$  ne varie pas beaucoup. On fait donc l'hypothèse que l'angle  $\theta$  est très petit devant 1. Que deviennent les relations précédentes ? Quelles relations faudra-t-il entrer dans le driver de la souris ?

# TD 5 – Liaisons équivalentes

Pour guider des solides les uns par rapport aux autres, on réalise la plupart du temps des liaisons par assemblage de liaisons élémentaires faciles à fabriquer.

## Objectif

*L'objectif de ce TD est d'analyser différentes liaisons en parallèle ou en série de plusieurs mécanismes. L'intérêt de chacune des réalisations sera explicité à chaque fois.*

## Liaison équivalente entre un pied de la Wii Balance Board et le sol

La Wii Balance Board permet de proposer des exercices de remise en forme pour la console de jeu Wii. Elle est constituée de 4 capteurs d'effort placés entre la planche et les pieds posés sur le sol.

En démontant les pieds de la Wii Balance Board, on constate que la liaison entre un pied et la planche n'est pas un simple appui plan mais plutôt une association en série entre une liaison sphérique à doigt en un point  $O$ , de doigt ( $O, \vec{y}$ ) et de plan de rainure ( $O, \vec{y}, \vec{z}$ ) avec  $\vec{z}$  la verticale et une liaison appui-plan de normale  $\vec{z}$ .



**Q1.** Proposer un schéma cinématique de l'association des liaisons (pour un seul pied).

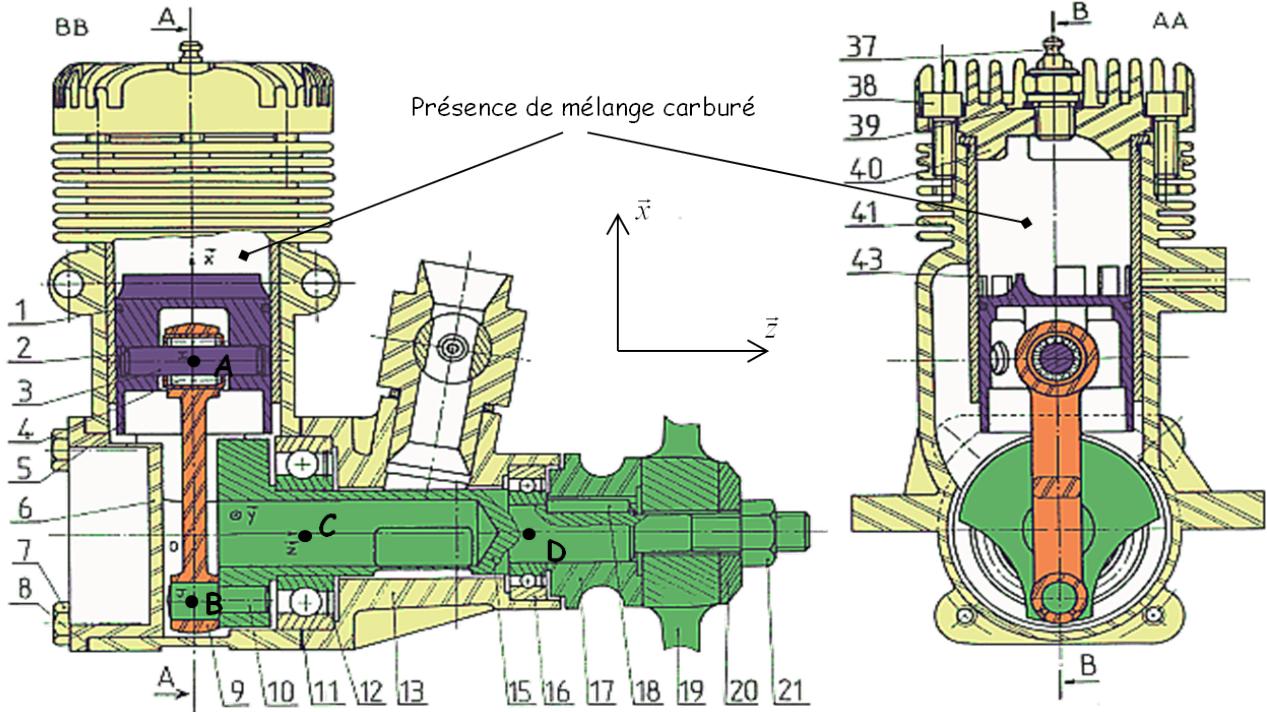
**Q2.** Donner les torseurs cinématiques de chaque liaison (attention à ne pas choisir trop vite le point et la base d'écriture des torseurs).

**Q3.** Déterminer la liaison équivalente entre la planche et le sol au niveau d'un pied. Montrer le résultat par le calcul.

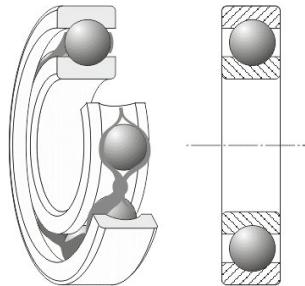
**Q4.** Quel est l'intérêt d'avoir de telles liaisons dans ce système ?

## Liaison équivalente entre le vilebrequin et le corps du micromoteur

La liaison entre le vilebrequin et le corps du micromoteur (déjà étudié précédemment) est réalisée par deux roulements à billes.



Les roulements à billes sont composés de deux bagues qui sont solidaires du vilebrequin pour les bagues intérieures et du corps pour les bagues extérieures, d'éléments roulants (ici des billes) ainsi qu'une cage à billes. Compte-tenu du jeu existant dans le roulement, on considère que la bague extérieure peut tourner autour de la bague intérieure, ce qui revient à considérer pour un roulement une liaison sphérique au centre du roulement entre le vilebrequin et le corps.



**Q1.** Repérer les roulements sur le plan 2D ci-dessus.

**Q2.** Proposer un graphe des liaisons et un schéma cinématique du mécanisme constitué uniquement du vilebrequin et du bâti. Les roulements seront remplacés par leur modèle de liaison sphérique.

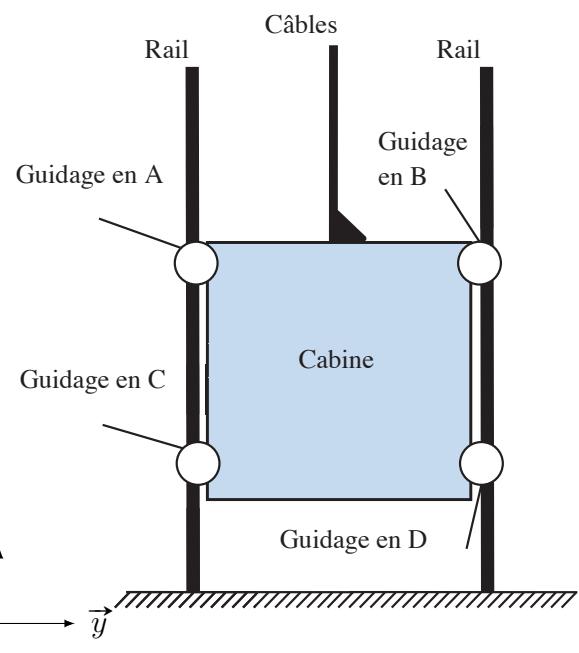
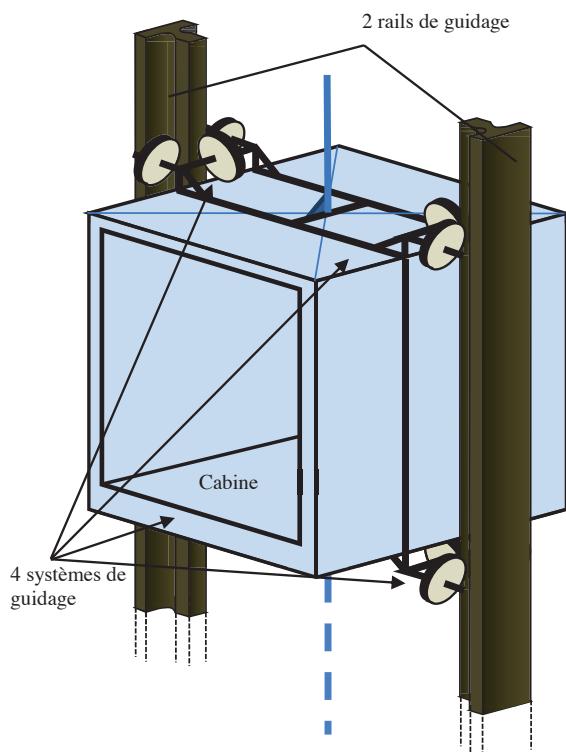
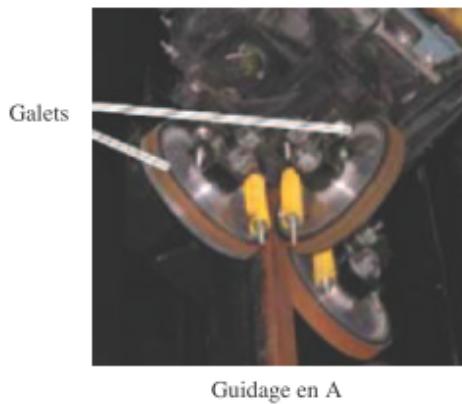
**Q3.** Les liaisons sont-elles en parallèle ou en série ? Intuitivement, donner le nom de la liaison correspondant à l'association de ces deux liaisons sphériques.

**Q4.** Donner les torseurs cinématiques de chaque liaison au point les plus simples en nommant astucieusement les composantes. Montrer par calcul le résultat obtenu intuitivement à la **Q3**.

**Q5.** Quel est, selon vous, l'intérêt d'utiliser deux roulements plutôt qu'un contact direct cylindre/cylindre ?

## Ascenseur de la tour de la terreur

La tour de la terreur du parc Walt Disney Studios propose aux visiteurs d'entrer dans une tour et de faire une chute de 13 étages dans un ascenseur. L'ascenseur est guidé en translation sur deux rails par 12 galets répartis sur 4 systèmes de guidage.



On modélise chaque contact entre un galet et le rail par une liaison sphère-plan. Pour la suite du sujet, on appellera 1 la cabine et 0 les rails liés au bâti.

**Q1.** Proposer un graphe des liaisons faisant intervenir les modèles des 12 galets entre le rail et l'ascenseur.

**Q2.** Donner le torseur cinématique d'une liaison sphère/plan en précisant le point d'écriture et la base.

**Q3.** Montrer que l'association de trois liaisons ponctuelles en parallèle au niveau d'un guidage (A, B, C ou D) est équivalente à une liaison sphère/cylindre dont on précisera les caractéristiques.

**Q4.** Simplifier alors le graphe des liaisons et montrer que l'association de deux liaisons sphère/cylindre de même axe est équivalente à une liaison pivot glissant.

**Q5.** Conclure sur la liaison équivalente entre la cabine et le rail compte-tenu des résultats précédents.

**Q6.** Pourquoi utilise-t-on cette solution pour guider la cabine de l'ascenseur ?

# TD 6 – Liaisons équivalentes

## Liaisons équivalentes

Pour les 9 études ci-dessous, déterminer les torseurs cinématiques de chaque liaison, poser les paramètres adaptés à l'étude, et déterminer le torseur cinématique de la liaison équivalente. Et en déduire la nature de la liaison équivalente ainsi que ses caractéristiques.

Pour les 3 premières études, le repère associé au bâti (couleur rouge) est :

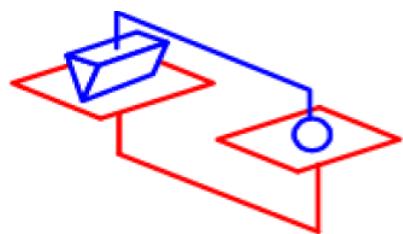
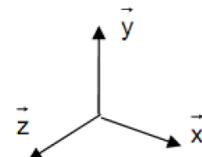


FIGURE 1 : Étude 1

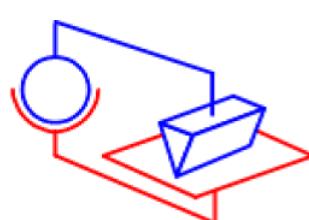


FIGURE 2 : Étude 2

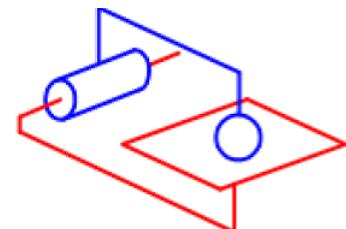


FIGURE 3 : Étude 3

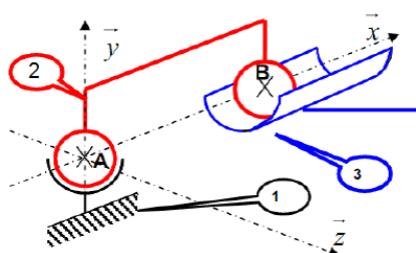


FIGURE 4 : Étude 4

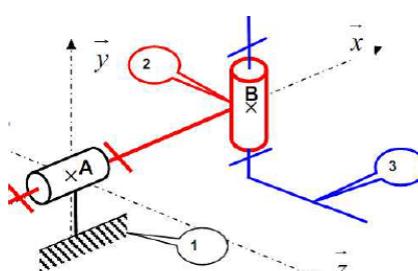


FIGURE 5 : Étude 5

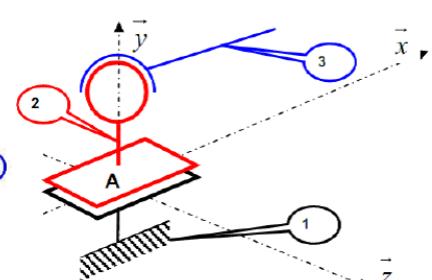


FIGURE 6 : Étude 6

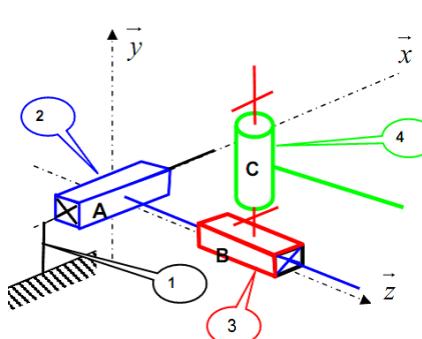


FIGURE 7 : Étude 7

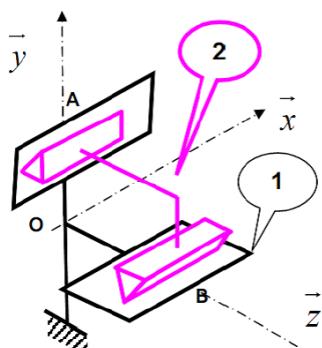


FIGURE 8 : Étude 8

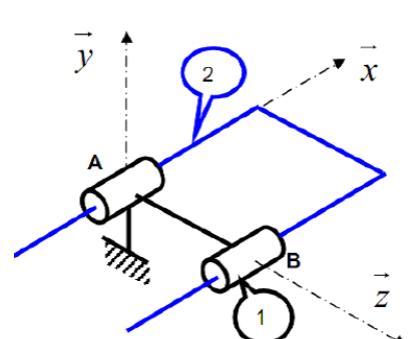
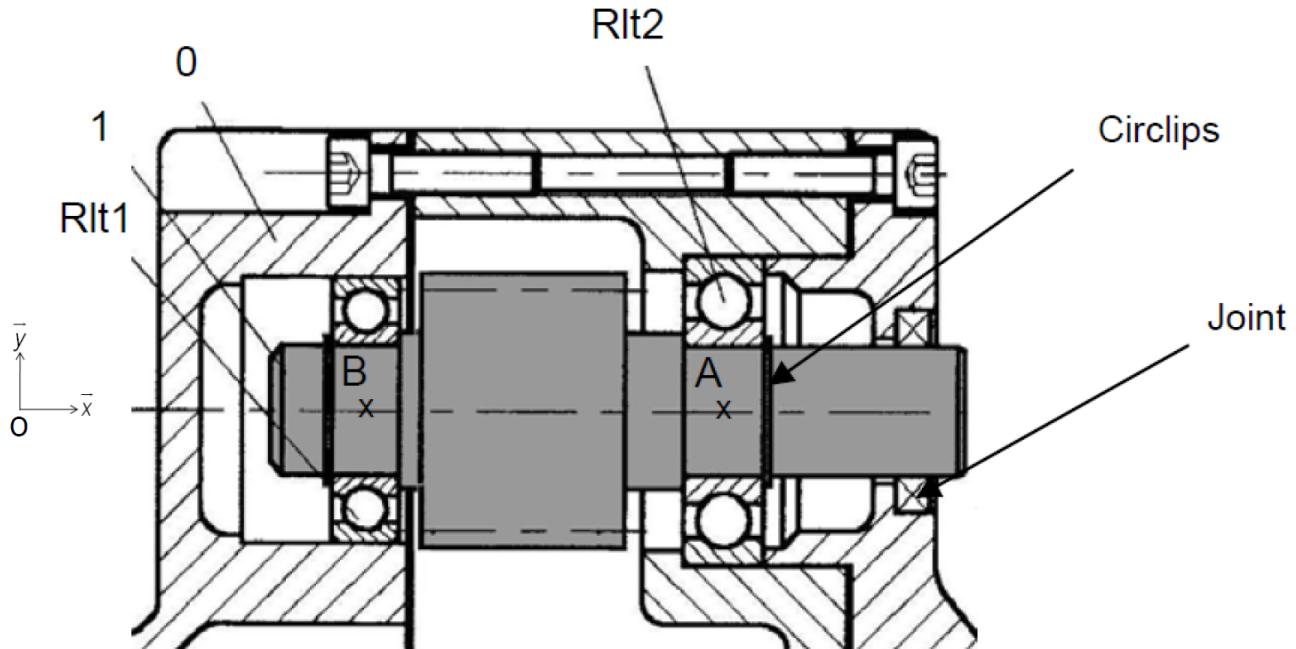


FIGURE 9 : Étude 9

## Guidage en rotation

On s'intéresse au guidage en rotation, par deux roulements à billes, de l'arbre d'entrée **1** d'un réducteur à engrenages par rapport au bâti **0**. Le constructeur des roulements à billes utilisés, indique un angle de rotulage maximal est  $> 5^\circ$ . Cela implique que les degrés de liberté de rotation autour des axes  $(\mathbf{B}, \vec{y})$  et  $(\mathbf{B}, \vec{z})$  (respectivement  $(\mathbf{A}, \vec{y})$  et  $(\mathbf{A}, \vec{z})$ ) ne sont pas supprimés entre la bague extérieure et la bague intérieure du roulement.



**Q1.** En tenant compte des indications du constructeur sur l'angle de rotulage et en observant la façon dont est monté le roulement  $Rlt1$ , choisir une liaison permettant de modéliser le comportement cinématique de l'arbre **1** par rapport au bâti **0** (uniquement pour ce roulement).

**Q2.** En tenant compte des indications du constructeur sur l'angle de rotulage et en observant la façon dont est monté le roulement  $Rlt2$ , choisir une liaison permettant de modéliser le comportement cinématique de l'arbre **1** par rapport au bâti **0** (uniquement pour ce roulement).

**Q3.** En déduire le graphe des liaisons correspondant à ce guidage en rotation. Préciser s'il s'agit de liaisons en parallèles ou en séries.

**Q4.** Dessiner, dans le plan  $(\mathbf{O}, \vec{x}, \vec{y})$ , le schéma cinématique correspondant.

**Q5.** Déterminer le torseur, au point **B**, de la liaison équivalente à ces deux liaisons. Donner le nom de cette liaison ainsi que ses caractéristiques. On donne  $AB = a$ .

**Q6.** En déduire et dessiner le schéma cinématique minimal correspondant à ce guidage en rotation.

## Pompe hydraulique

La pompe hydraulique à pistons axiaux du fabricant HYDRO-LEDUC est destinée à être installée sur les camions pour alimenter les différents actionneurs hydrauliques (vérins de bennes, hayons élévateurs, bras de manutention ...).



Il s'agit d'une pompe à pistons axiaux et bâillet fixe. Un arbre **1**, portant le plateau came **12**, tourne et provoque le mouvement alternatif des pistons **6** rappelés par les ressorts **7**.

L'entrée du fluide se fait par un sillon fraisé dans la plaque **4** maintenue lors de la rotation par l'intermédiaire d'un pion **11**. Le refoulement se fait par les clapets anti-retour **9**.

Chaque piston **6** s'appuie sur la plaque par l'intermédiaire d'un plot en bronze **5**.

Les efforts transmis à l'axe sont supportés par les roulements **2** et **3**.

Les pistons coulissent dans des coussinets en bronze **10** montés dans le corps **8**.

L'étanchéité au niveau de l'arbre est réalisée par deux joints à lèvres **15**.

Les classes d'équivalence cinématique ont été repérées sur le dessin d'ensemble de la pompe. Des points particuliers et des repères locaux ont été ajoutés.

Graphe des liaisons et schéma cinématique (pour un seul piston) :

**Q1.** Compléter, ci-dessus, le graphe de liaisons et le schéma cinématique de la pompe.

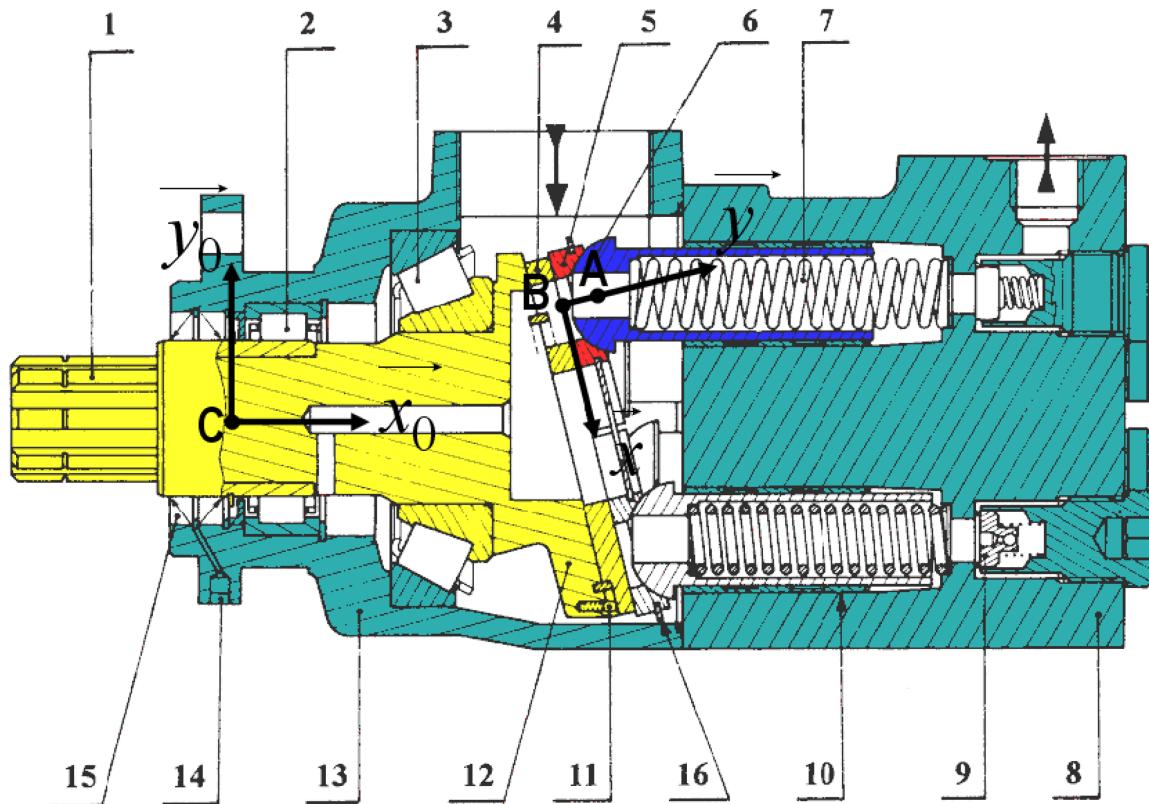
**Q2.** Donner, au point **B**, la forme du torseur cinématique de la liaison  $L_{2/1}$ .

**Q3.** Donner, au point **A**, la forme du torseur cinématique de la liaison  $L_{3/2}$ .

**Q4.** Déterminer le torseur cinématique, au point **A**, de la liaison équivalente  $L_{eq}$  entre **S3** et **S1**. Donner le nom de cette liaison ainsi que ses caractéristiques.

**Q5.** En déduire et dessiner le schéma cinématique minimal de la pompe hydraulique.

**Q6.** Indiquer pour quelles raisons le concepteur de la pompe a choisi d'utiliser les plots **5**.



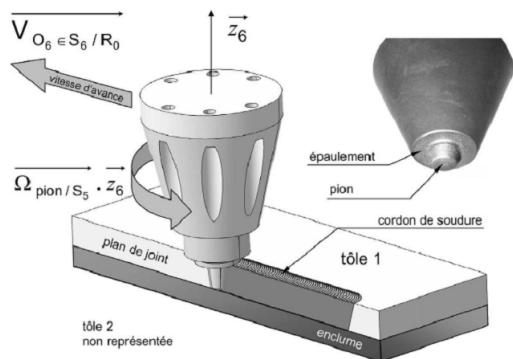
## Soudage par friction-malaxage

Les procédés d'assemblage permanent entrent dans la fabrication de 80% des produits manufacturés. Le soudage représente une grande majorité de ces procédés. Il permet l'obtention d'une liaison complète (encastrement) entre deux pièces. Les procédés de soudage les plus répandus utilisent l'arc électrique comme source de chaleur. Les matériaux sont localement mis en fusion par cette chaleur et après refroidissement la liaison entre les pièces à assembler est complète.

Une solution alternative est le soudage par friction-malaxage, le Friction Stir Welding (FSW), qui met en œuvre la dissipation énergétique par frottement comme source de chaleur.

Le schéma cinématique simplifié de la machine de soudage « FSW » est donné sur la figure 1.

On donne ci-dessous les figures géométriques de changement de bases.

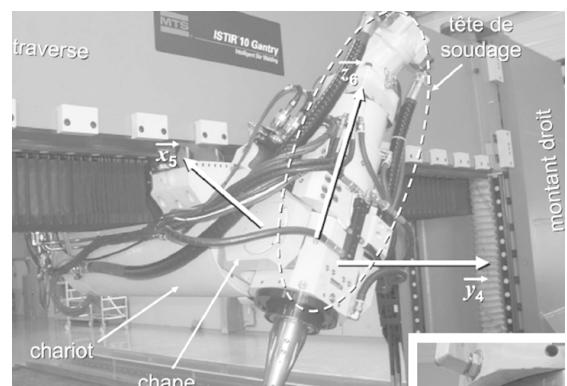
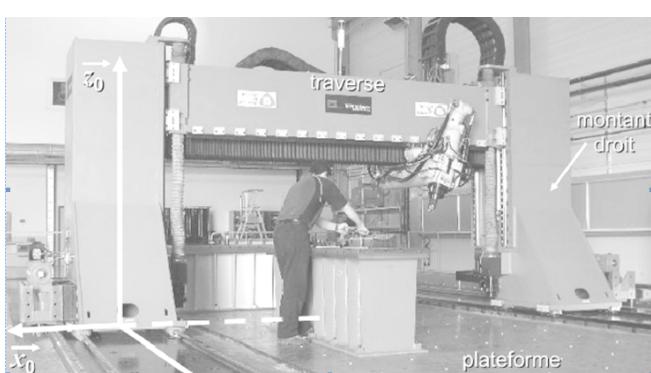
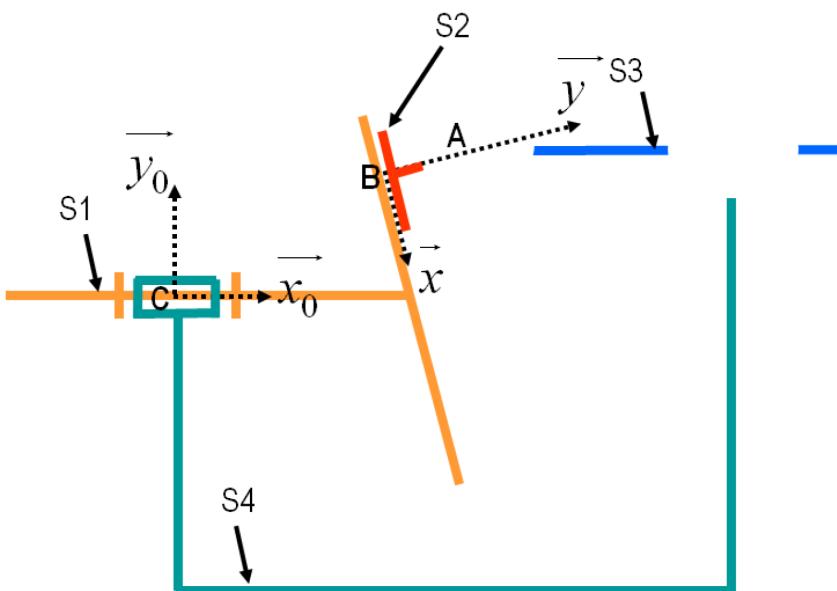
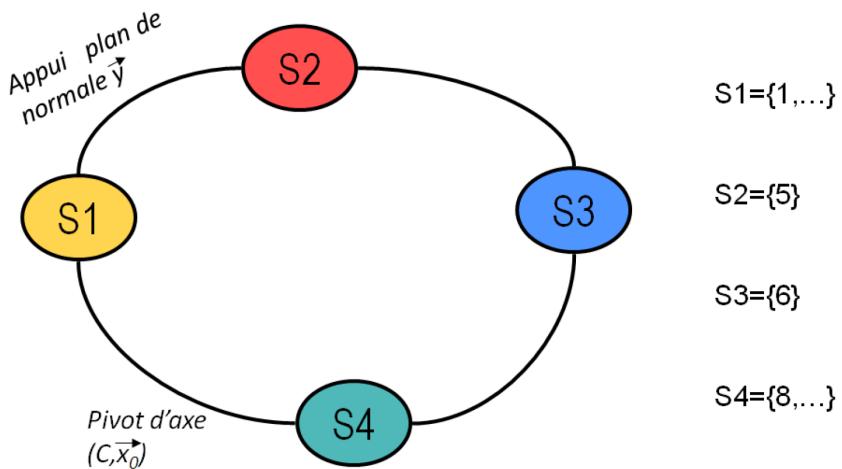


## Analyse du mécanisme

**Q1.** Dessiner le graphe de liaisons de ce mécanisme.

**Q2.** Donner dans la base  $(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  le torseur cinématique et le nom de la liaison équivalente aux 2 liaisons entre le chariot (**S3**) et la tête (**S5**).

**Q3.** Dans le cas où la distance  $\ell_z$  est constante, tracer le schéma cinématique dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{z}_0)$ .



## Analyse cinématique

**Q4.** Exprimer le vecteur position  $\overrightarrow{O_0O_6}$  le plus simplement possible.

**Q5.** Déterminer les vecteurs taux de rotation  $\overrightarrow{\Omega_{S_1/S_0}}$ ,  $\overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}}$ ,  $\overrightarrow{\Omega_{S_3/S_2}}$ ,  $\overrightarrow{\Omega_{S_4/S_3}}$ ,  $\overrightarrow{\Omega_{S_5/S_4}}$  et  $\overrightarrow{\Omega_{S_6/S_5}}$ .

**Q6.** Calculer la vitesse  $\overrightarrow{V_{O_6 \in S_6/S_0}}$  en fonction des paramètres géométrique et cinématique du modèle.

On souhaite réaliser un cordon de soudure de telle sorte que  $\overrightarrow{V_{O_6 \in S_6/S_0}} = V \cdot \overrightarrow{y_0}$ .

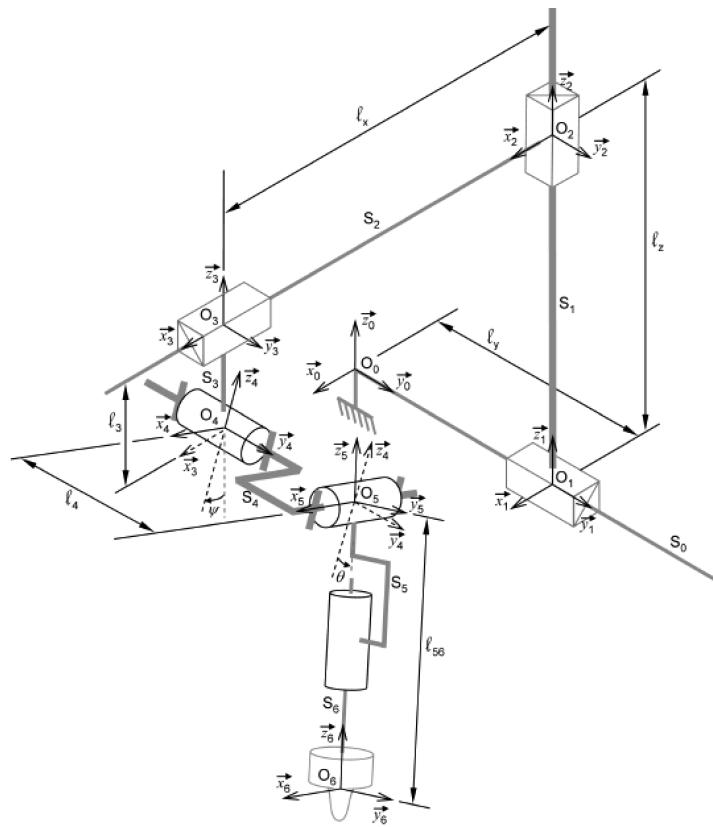
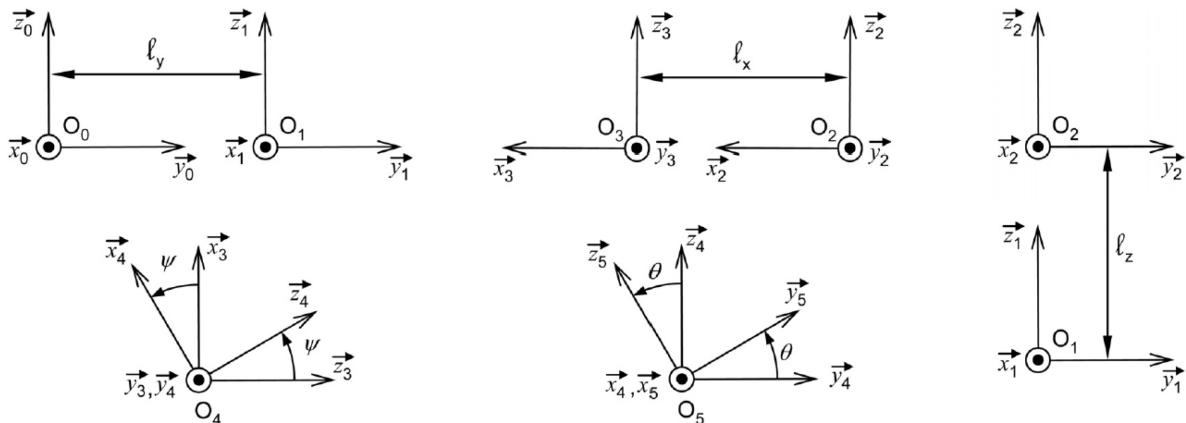


FIGURE 1 : Schéma cinématique simplifié du mécanisme de la machine de soudage « FSW ».



**Q7.** Déterminer les 3 équations que la partie commande doit vérifier pour s'assurer de la réalisation d'un tel cordon de soudure.

L'étude est maintenant menée dans le cas d'utilisation où les distances  $\ell_x$ ,  $\ell_y$  et  $\ell_z$  sont constantes.

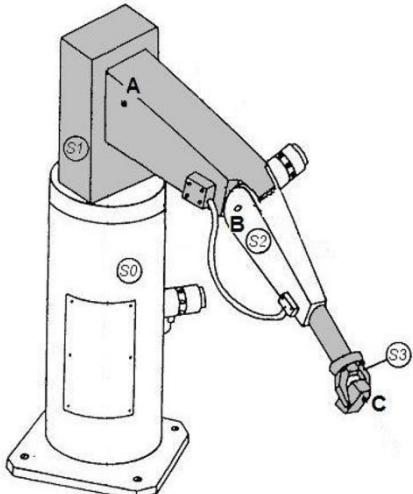
**Q8.** Déterminer la zone d'évolution (volume) du point  $O_6$  dans ce cas d'utilisation et préciser ses caractéristiques.

# Sujet Kholle 1 – Bras manipulateur

## Présentation

La figure ci-dessous représente un bras manipulateur permettant de déplacer des objets. Ce mécanisme est constitué de :

- un bâti  $S_0$  ;
- un solide  $S_1$  entraîné en rotation par un moteur  $M_1$  ;
- un solide  $S_2$  entraîné en rotation par un moteur  $M_2$  ;
- un solide  $S_3$  entraîné translation par un vérin  $V_1$  ;
- une pince située à l'extrémité du vérin permettant de saisir l'objet.



On précise que :

- 1/0 : rotation d'axe ( $A, \vec{z}_0$ ) ;
- 2/1 : rotation d'axe ( $B, \vec{x}_1$ ) ;
- 3/2 : translation rectiligne de direction  $\vec{z}_2$  ;
- $\overline{AB} = a \cdot \vec{y}_1$ .

### Objectif

On cherche à déterminer l'accélération d'un point de la pince en fonction des paramètres de la chaîne ouverte.

---

## Travail demandé

**Q1.** Proposer un paramétrage adapté du mécanisme.

**Q2.** Réaliser les figures planes de changement de bases. En déduire le vecteur rotation traduisant chaque figure.

**Q3.** Détermine les trajectoires :  $T_{C \in 3/2}$ ,  $T_{C \in 2/1}$  et  $T_{C \in 1/0}$ .

**Q4.** Déterminer les vecteurs vitesse suivants :  $\vec{V}_{C \in 3/2}$ ,  $\vec{V}_{C \in 2/1}$ ,  $\vec{V}_{C \in 1/02}$  et  $\vec{V}_{C \in 3/0}$  par dérivation vectorielle.

**Q5.** Retrouver  $\vec{V}_{C \in 3/0}$  en utilisant la relation de composition des mouvements puis la relation du champ des vecteurs vitesse d'un solide.

**Q6.** Déterminer l'accélération :  $\vec{\Gamma}_{C \in 3/0}$ .

# Sujet Kholle 2 – Camion benne

## Présentation

Soient :

- $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère associé au châssis d'un camion benne ;
- $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0)$  et  $\mathcal{R}_2 = (O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 = \vec{z}_1)$  deux repères liés respectivement aux corps 1 et à la tige 2 d'un des deux vérins hydrauliques.
- $\mathcal{R}_3 = (O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3 = \vec{z}_0)$  un repère lié à la benne.



On suppose que le vérin étudié (corps 1 et tige 2) se déplace dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ .

Le corps 1 a un mouvement de rotation d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  par rapport au bâti. On pose  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ .

La tige 2 a un mouvement de translation rectiligne de direction  $\vec{x}_1$  par rapport au corps 1. On pose  $\overrightarrow{OB} = \lambda \cdot \vec{x}_1$ .

Le benne 3 a un mouvement de rotation d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  par rapport au bâti. On pose  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$ .

---

### Objectif

---

*On souhaite étudier le mouvement de la benne par rapport au camion*

---

## Travail demandé

**Q1.** Établir le graphe des liaisons.

**Q2.** Réaliser le schéma cinématique de ce mécanisme.

**Q3.** Réaliser les figures planes de changement de bases. En déduire le vecteur rotation traduisant chaque figure.

**Q4.** Que dire de  $\vec{\Omega}_{2/1}$ .

**Q5.** Déterminer les trajectoires :  $T_{B \in 2/1}$ ,  $T_{B \in 1/0}$  et  $T_{B \in 2/0}$ .

**Q6.** Déterminer les vecteurs vitesse suivants :  $\vec{V}_{B \in 2/1}$ ,  $\vec{V}_{B \in 1/0}$  et  $\vec{V}_{B \in 2/0}$ , par dérivation vectorielle.

**Q7.** Retrouver  $\vec{V}_{B \in 2/0}$  en utilisant la relation de composition des mouvements puis la relation du champ des vecteurs vitesse d'un solide.

**Q8.** Calculer sa norme  $|\vec{V}_{B \in 2/0}|$ . En déduire l'évolution de  $\dot{\beta}$ .

**Q9.** Déterminer l'accélération :  $\vec{\Gamma}_{B \in 2/0}$ .

# Sujet Kholle 3 – Manège Spin Fly

## Présentation



On s'intéresse au manège Spin Fly présent dans de nombreuses fêtes foraines. Ce système est constitué de 4 solides :

- L'estrade 0 (plancher), de repère associé  $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , fixe par rapport à la terre, tel que l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  soit dirigé suivant la verticale ascendante ;
- Le plateau 1, de repère associé  $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0 = \vec{z}_1)$ , en mouvement de rotation d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  par rapport à l'estrade 0 tel que  $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \psi$  ;
- Le bras 2, de repère associé  $\mathcal{R}_2 = (O, \vec{x}_1 = \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , en mouvement de rotation d'axe  $(B, \vec{x}_1)$  par rapport au plateau 1 tel que  $\overrightarrow{OB} = b \cdot \vec{z}_0$  (avec  $b$  constant), et  $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \theta$  ;
- Le disque 3, de repère associé  $\mathcal{R}_3 = (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2 = \vec{z}_3)$ , en mouvement de rotation d'axe  $(B, \vec{z}_2)$  par rapport au bras 2 tel que  $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = \varphi$ . La position du point  $D$  du disque 3 est défini par :  $\overrightarrow{BD} = c \cdot \vec{x}_3$  (avec  $c$  constant).

### Objectif

*L'étude consiste à déterminer l'accélération subie par une personne, et de vérifier que la limite supportable (sans déconfort) par l'homme d'une valeur de  $2^\circ$  n'est pas dépassée ...*

## Travail demandé

**Q1.** Réaliser le schéma cinématique 3D de ce mécanisme.

**Q2.** Réaliser les figures planes de changement de bases. En déduire le vecteur rotation traduisant chaque figure.

**Q3.** En déduire le vecteur rotation :  $\vec{\Omega}_{3/0}$ .

**Q4.** Déterminer les trajectoires :  $T_{D,3/2}$ ,  $T_{D,2/1}$ ,  $T_{D,1/0}$  et  $T_{D,3/0}$ .

**Q5.** Déterminer les vecteurs vitesse suivants :  $\vec{V}_{D,3/2}$ ,  $\vec{V}_{D,2/1}$ ,  $\vec{V}_{D,1/0}$  et  $\vec{V}_{D,3/0}$  par dérivation et exprimer-les tous dans la base 3.

**Q6.** Retrouver  $\vec{V}_{D,3/0}$  en utilisant la relation de composition des mouvements puis la relation du champ des vecteurs vitesse d'un solide.

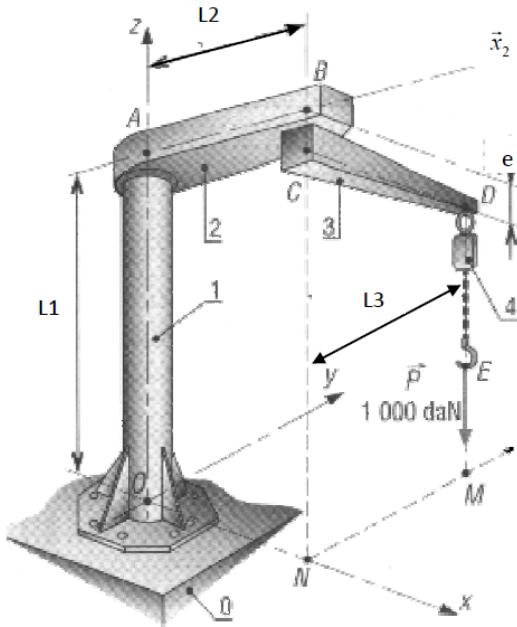
**Q7.** Déterminer l'accélération :  $\vec{\Gamma}_{D,3/0}$ .

**Q8.** Comment, à partir de la question précédente, pourrait-on valider l'objectif ? Aucun calcul n'est demandé.

# Sujet Kholle 4 – Potence articulée

## Présentation

On considère une potence de manutention représentée ci-dessous :



## Données

Soit  $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère lié au sol 0.

Le corps 1 de la potence est fixé au sol 0 par une liaison encastrement.

La tête 2 est en liaison pivot au point A d'axe  $\vec{z}$  par rapport au corps 1. Au point C, le bras 3 fait l'objet d'un guidage en rotation autour de l'axe  $\vec{z}$ .

Le palan 4 est accroché au point D  $\in (C, \vec{x}_3)$ , sur le bras 3 et peut se déplacer en translation suivant la direction  $\vec{z}_4$ .

On note :  $\overrightarrow{AB} = L_2 \cdot \vec{x}_2$ ,  $\overrightarrow{CD} = L_3 \cdot \vec{x}_3$  et  $\beta = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ .

### Objectif

On souhaite exprimer les grandeurs cinématiques du mouvement du crochet en fonction des caractéristiques géométriques du système.

## Travail demandé

**Q1.** Réaliser le schéma cinématique de ce mécanisme.

**Q2.** Proposer le paramétrage manquant de ce mécanisme.

**Q3.** Réaliser les figures planes de changement de bases. En déduire le vecteur rotation traduisant chaque figure.

**Q4.** En déduire le vecteur rotation :  $\vec{\Omega}_{3/1}$ .

**Q5.** Déterminer les trajectoires :  $T_{E,4/3}$ ,  $T_{E,3/2}$ ,  $T_{E,2/1}$  et  $T_{E,4/1}$ .

**Q6.** Déterminer les vecteurs vitesse suivants :  $\vec{V}_{E,4/3}$ ,  $\vec{V}_{E,3/2}$ ,  $\vec{V}_{E,2/1}$  et  $\vec{V}_{E,4/1}$ , par dérivation vectorielle.

**Q7.** Retrouver  $\vec{V}_{E,4/1}$  en utilisant la relation de composition des mouvements puis la relation du champ des vecteurs vitesse d'un solide.

**Q8.** Calculer  $\|\vec{V}_{E,4/1}\|$ .

**Q9.** Déterminer l'accélération :  $\vec{\Gamma}_{E,4/1}$ .

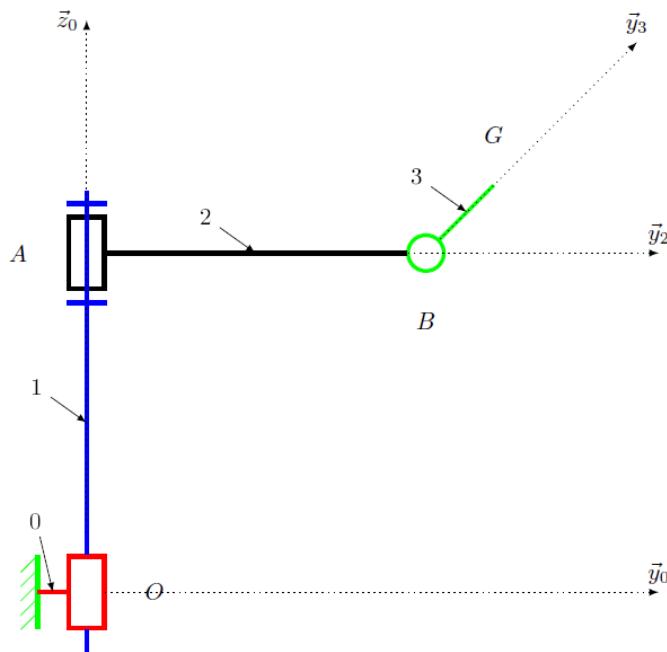
# Sujet Kholle 5 – Turbine Pelton

## Présentation

Des études vibratoires sont réalisées sur les turbines afin d'éviter les modes de résonance. En effet, si ceux-ci sont atteints, il y a risque d'endommagement de la turbine (cavité, propagation de fissures, voire ruptures ...), ce qui est bien entendu à proscrire.

Alors, afin d'étudier les vibrations d'une turbine, il faut se donner au préalable un modèle cinématique pour en déduire les vitesses et les accélérations qui seront utiles au dimensionnement de la turbine d'un point de vue dynamique.

Ce modèle vous est donné ci-dessous :



### Objectif

On souhaite connaître les vitesses et accélérations de différents points de la turbine en vue d'effectuer une étude vibratoire.



FIGURE 1 : \*  
Turbine Pelton

On donne également les différents paramètres géométriques.  
On posera :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= L_2 \cdot \vec{y}_2 \\ \overrightarrow{BG} &= L_3 \cdot \vec{y}_3 \end{aligned}$$

## Travail demandé

**Q1.** Justifier le modèle cinématique proposé (pensez au fait qu'une structure n'est pas, en réalité, indéformable).

**Q2.** Représenter les figures de changement de bases en proposant un paramétrage adapté du mécanisme.

**Q3.** En déduire les vecteurs rotation associés à chacune des figures. En déduire le vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{3/0}$  en fonction des différents paramètres.

**Q4.** Déterminer les trajectoires suivantes :  $T_{G,3/2}$ ,  $T_{G,2/1}$ ,  $T_{G,1/0}$  et  $T_{G,3/0}$ .

**Q5.** Déterminer, **par dérivation**, les vecteurs vitesse :  $\vec{V}_{G,3/2}$ ,  $\vec{V}_{G,2/1}$ ,  $\vec{V}_{G,1/0}$  et  $\vec{V}_{G,3/0}$ .

**Q6.** Retrouver l'expression de  $\vec{V}_{G,3/0}$ , **en utilisant la composition des vitesses puis le champ équiprojectif des vitesses**.

**Q7.** Déterminer l'expression de  $\vec{\Gamma}_{G,3/0}$ .

**Q8.** En quoi est-ce important de connaître ce vecteur accélération  $\vec{\Gamma}_{G,3/0}$ .