

Carnot



MPSI – PCSI

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Séquence 7

Modélisation des actions mécaniques

- A** Analyser
- A4** Caractériser des écarts
- A4-01** Extraire du cahier des charges les grandeurs pertinentes
- A4-09**
- A5** Apprécier la pertinence et la validité des résultats
- A5-01** Utiliser des symboles et des unités adéquates
- A5-02** Vérifier l'homogénéité des résultats
- B** Modéliser
- B2** Proposer un modèle de connaissance et de comportement
- B2-01** Choisir un modèle adapté à l'objectif
- B2-03** Définir les paramètres du modèle
- B2-16** Préciser et justifier les conditions et les limites de la modélisation plane
- B2-20** Associer un modèle à une action mécanique
- B2-21** Déterminer la relation entre le modèle local et le modèle global
- B2-25** Associer à chaque liaison son torseur d'actions mécaniques transmissibles

Table des matières

Cours	0
I Action mécanique sur un solide	1
I.1 Notion d'action mécanique	1
I.2 Classification des actions mécaniques	1
I.3 Représentation d'une action mécanique	1
II Modélisation locale	4
II.1 Action mécanique volumique ou massique	4
II.2 Action mécanique surfacique	5
II.3 Action mécanique linéïque	6
III Passage d'une formulation locale à une expression globale	6
IV Action mécanique à distance : cas de la pesanteur	7
IV.1 Cas du point	7
IV.2 Cas du solide	7
IV.3 Centre de gravité d'un solide	8
IV.4 Torseur associé à la pesanteur	9
V Action mécanique de contact	9
V.1 Torseur transmissible par un contact	9
V.2 Modèle du contact parfait	10
VI Actions mécaniques dans les liaisons parfaites	11
VI.1 Hypothèses	11
VI.2 Cas de la liaison ponctuelle	11
VI.3 Cas de la liaison appui-plan	11
VI.4 Cas de la liaison pivot glissant	12
VI.5 Généralisation	13
VI.6 Cas particuliers de la modélisation plane	13
VII Modélisation des actions de contact avec frottements	15
VII.1 Mise en évidence	15
VII.2 Modèle de Coulomb	15
VII.3 Contact ponctuel avec résistance au roulement ou au pivotement	17
 TDs	 19
TD 1	19
TD 2	21
TD 3	22
TD 4	25
TD 5	29

Kholles	33
Kholle 1	33
Kholle 2	34
Kholle 3	35

Objectif

La cinématique a permis l'étude des mouvements sans se préoccuper de la cause de ces mouvements. Ce chapitre introduit la notion d'actions mécaniques à l'origine des mouvements des solides.

L'objectif de ce chapitre est de montrer comment proposer un modèle d'action mécanique s'exerçant sur un solide.

I Action mécanique sur un solide

I.1 Notion d'action mécanique

Une action mécanique est un phénomène susceptible de provoquer ou de modifier le mouvement d'un solide, ou de le déformer.

Il existe une grande diversité d'action mécanique : action du pied sur un ballon, action du stator sur le rotor pour une machine électrique, action de l'air sur les pales d'un hélicoptère...

I.2 Classification des actions mécaniques

On classe les actions mécaniques selon la nature géométrique du domaine sur lequel elles s'appliquent (contact ou non, intérieurs ou extérieurs ...). On distingue ainsi :

- les actions mécaniques à distance exercées en chaque point d'un solide (pesanteur mis en évidence par le lâcher d'une balle, champ électromagnétique mis en évidence par l'action d'un aimant, champ électrostatique sur une particule ...);
- les actions mécaniques de contact entre différents milieux :
 - contact surfacique (pression de l'eau sur un barrage, liaison sphérique ...);
 - contact linéaire ou ponctuel si la zone de contact est petite (liaison sphère-plan, liaison cylindre-plan ...).



(a) Action à distance



(b) Action ponctuelle



(c) Action surfacique

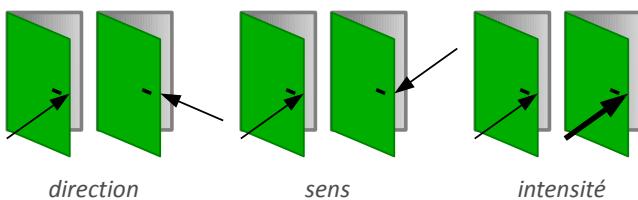
FIGURE 1 : Classification des actions mécaniques

I.3 Représentation d'une action mécanique

I.3.1 Notion de forces

Pour mettre en mouvement une porte, il est nécessaire d'appliquer une force caractérisée par :

- sa direction ;
- son sens ;
- son intensité.

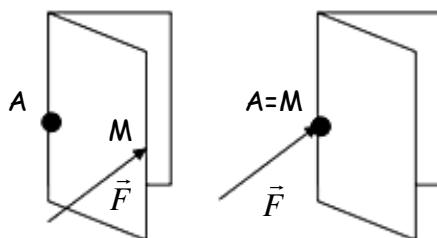


L'utilisation d'un vecteur \vec{F} pour modéliser une force semble donc adaptée. L'unité est le Newton [N].

Une force caractérise donc la tendance d'une action mécanique à mettre localement en translation un solide.

I.3.2 Notion de moment

Cette seule donnée d'une force n'est pas suffisante pour décrire une action mécanique. Pour une même force, les effets sont différents suivant le point d'application.



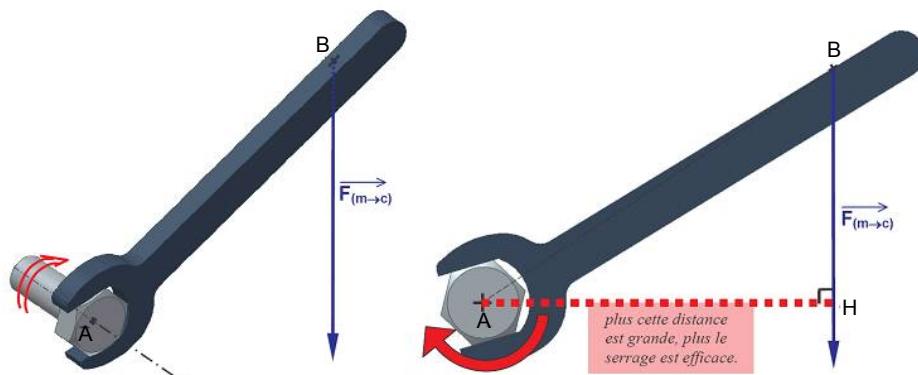
On introduit la notion de moment au point A de la force \vec{F} (appliquée localement en M) qui caractérise l'effet de la force en un point donné : $\vec{M}(A) = \vec{AM} \wedge \vec{F}$ (dont les composantes sont exprimées en N.m).

Remarque : : cette notion est indispensable car c'est parfois la seule manière de représenter simplement l'effet d'une action mécanique (exemple : action de la main sur une poignée de porte, action entre le stator et le rotor d'une machine électrique (machine à courant continu, asynchrone, synchrone...)).

Un moment caractérise ainsi la tendance d'une action mécanique à mettre en rotation un solide autour d'un axe donné.

L'expression du moment en un point prend en compte la distance de la force au point d'application et permet de représenter l'effet de la force (rotation possible autour d'un axe et selon un sens donné)

L'exemple suivant illustre les caractéristiques du moment.



On modélise l'action mécanique de la main sur la clé par une force appliquée au point B, représentée par le vecteur $\vec{F}_{m \rightarrow c}$. C'est cette force qui permet de serrer la vis en la faisant « tourner » autour du point A. On dit que la force appliquée en B crée un moment au point A.

On constate que $\vec{M}(A) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_{m \rightarrow c} = \overrightarrow{AH} \wedge \vec{F}_{m \rightarrow c}$ où H est le projeté orthogonal de B sur le support de la force $\vec{F}_{m \rightarrow c}$.

La distance AH est appelée **bras de levier** : distance la plus courte du support de la force au point d'application.

Cette notion est utilisée en pratique pour calculer rapidement le moment d'une force sans passer par le produit vectoriel.

Par définition du produit vectoriel, le vecteur moment est orthogonal au plan contenant le vecteur force \vec{F} et le vecteur \overrightarrow{AB} avec A le point où le moment est calculé.

I.3.3 Torseur d'action mécanique

Une action mécanique est donc représentée par :

- un vecteur \vec{F} ;
- un moment en A : $\vec{M}(A) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$.

Si on écrit l'effet de la force en B, on obtient :

On constate donc que le champ de moment est un champ antisymétrique, il est donc représentable par un torseur.

Ainsi toute action mécanique est caractérisée par un torseur

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{M}(A) \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} F_x & M_x(A) \\ F_y & M_y(A) \\ F_z & M_z(A) \end{matrix} \right\}_{A,b} \quad \text{avec } b \text{ une base quelconque.}$$

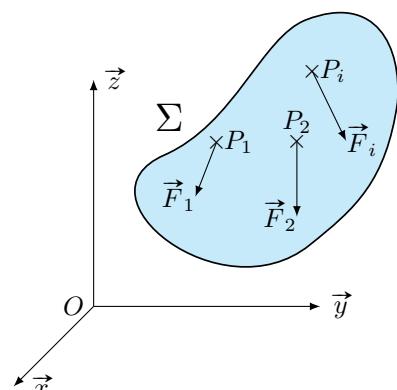
Vocabulaire : le vecteur force \vec{F} est appelé la **résultante**.

Remarque : pour exprimer l'action mécanique en un autre point, il suffit d'utiliser la relation de changement de point d'un torseur (formule de Varignon).

I.3.4 Effet de plusieurs actions mécaniques

Lorsqu'il y a plusieurs actions mécaniques sur un même solide, on additionne les torseurs (en écrivant les torseurs au même point) :

$$\sum \{\mathcal{T}_i\} = \sum_i \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_i \\ \vec{M}_i(A) \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \sum_i \vec{F}_i \\ \sum_i \vec{M}_i(A) \end{matrix} \right\}_A$$

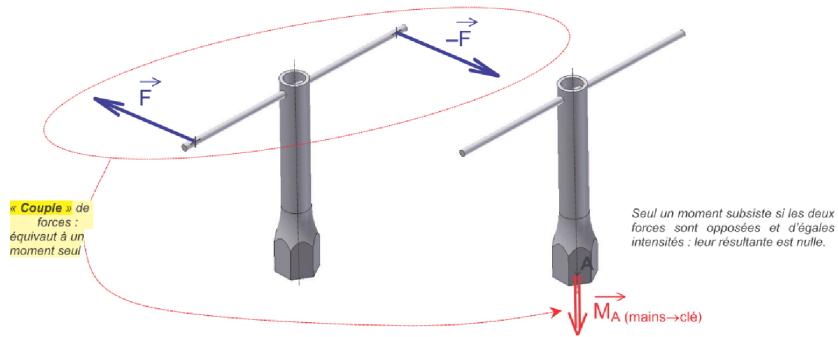


Remarque : On note $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} \end{matrix} \right\}_A$ l'action mécanique du solide 1 sur le solide 2.

I.3.5 Torseurs particuliers

Un **torseur couple** est de la forme $\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{C} \\ \vec{F} \end{matrix} \right\}_M$ et s'écrit de la même manière en tout point. Cette action mécanique correspond à l'action qui aurait tendance à faire tourner un solide.

Exemple : poignée de porte, tire-bouchon, stator→rotor...



Un **torseur glisseur** est de la forme $\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_M$ au point d'application de la force. Cette action mécanique correspond à l'action qui aurait tendance à faire déplacer en translation un solide. La droite (M, \vec{F}) est l'axe du glisseur.

En général, par abus de langage, on appelle **Force** l'action mécanique correspondant à un glisseur.

Exemple : action du pied sur un ballon

I.3.6 Compléments sur les torseurs

Un torseur quelconque $\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{M}(A) \end{matrix} \right\}_A$ est un glisseur si $\vec{F} \cdot \vec{M}(A) = 0$ avec $\vec{F} \neq \vec{0}$.

L'**axe central d'un torseur** est une droite constituée des points P tels que $\vec{F} \wedge \vec{M}(P) = \vec{0}$ (moment colinéaire à la résultante). On montre que cette droite a pour vecteur directeur \vec{F} .

Dans le cas d'un glisseur, l'axe central est l'ensemble des points où le moment est nul. **L'axe central est donc l'axe du glisseur.**

II Modélisation locale

La matière (liquide, solide ou gazeuse) est constituée d'atomes. Cependant, à l'échelle où la matière est considérée comme liquide, solide ou gazeuse, les atomes sont suffisamment proches pour modéliser la matière comme une répartition continue.

Les actions mécaniques s'appliquent sur cette matière continue. Ces actions peuvent se modéliser mathématiquement sous la forme d'un champ de vecteurs $\vec{f}(M)$ appelée densité d'effort qui peut être volumique, surfacique ou linéique selon le modèle employé.

II.1 Action mécanique volumique ou massique

Une action mécanique *volumique* $\vec{f}(M)$ est un champ de vecteurs associé à un élément de volume dV , qui à tout point M de Σ associe une action mécanique $\vec{f}(M)dV$ s'exerçant sur l'élément de volume dV au voisinage de M (FIGURE 2(a)).

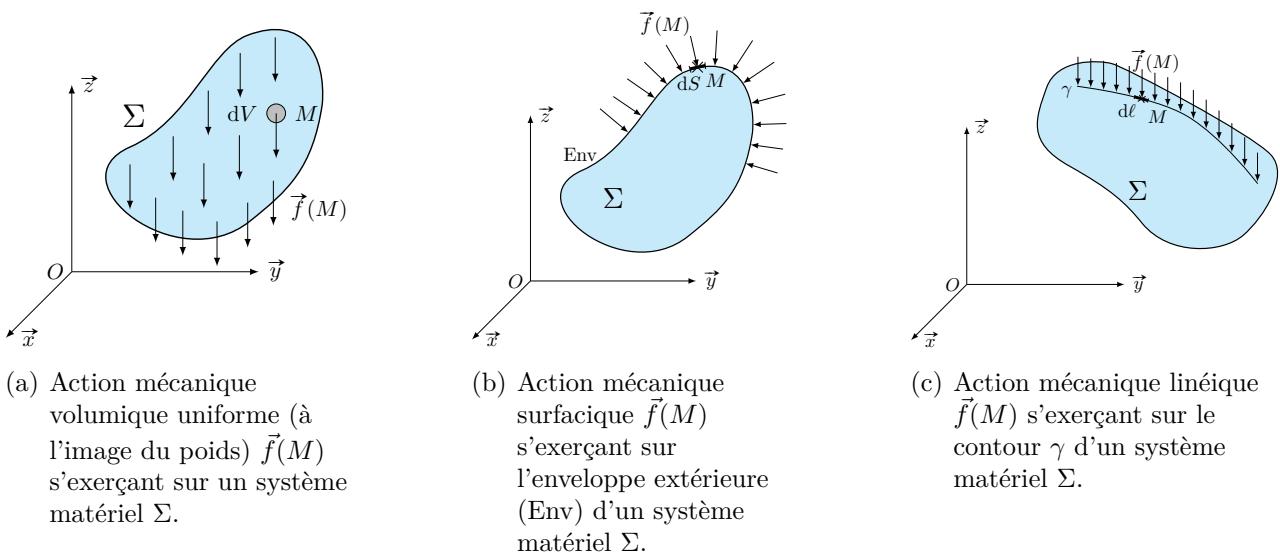


FIGURE 2 : Modélisation locale des actions mécaniques

Une action mécanique *massique* $\vec{f}(M)$ est un champ de vecteurs associé à un élément de masse dm , qui à tout point M de Σ associe une action mécanique $\vec{f}(M)dm$ s'exerçant sur l'élément de masse dm au voisinage de M .

Une action mécanique massique peut s'exprimer sous la forme d'une action volumique par l'intermédiaire de la masse volumique $\rho(M)$: $dm = \rho(M)dV$. La masse volumique étant une propriété du solide et non de l'action mécanique, il est parfois préférable d'exprimer l'action mécanique sous forme massique.

Exemple : la pesanteur

L'action mécanique massique s'écrit $\vec{f}_{\text{poids}} = \vec{g}$, associée à dm l'élément de masse. L'action mécanique élémentaire s'exerçant sur dm s'écrit $d\vec{P}_{\text{poids}} = dm\vec{g}$.

II.2 Action mécanique surfacique

Une action mécanique *surfacique* $\vec{f}(M)$ est un champ de vecteurs associé à un élément de surface dS , qui, à tout point M de l'enveloppe extérieure (Env) de Σ , associe une action mécanique $\vec{f}(M)dS$ s'exerçant sur l'élément de surface dS au voisinage de M (FIGURE 2(b)).

Exemple : pression d'un fluide parfait (ou au repos) sur un solide

L'action surfacique s'écrit $\vec{f}_{\text{pression}}(M) = -p(M)\vec{n}$, associée à l'élément de surface dS est la pression du fluide en M et \vec{n} la normale extérieure à la surface en M (FIGURE 2(b)).

L'effort de pression élémentaire est alors $d\vec{P}_{\text{pression}} = -p\vec{n}dS$ où \vec{n} est le vecteur normal à la surface dS .

Exemple : écoulement de l'air autour d'un profil d'aile

Lorsqu'une aile d'avion se déplace, les mouvements des masses d'air conduisent à des variations de pression qui créent une force de portance et une force de traînée sur l'aile.

L'action de l'air sur l'aile résulte d'une répartition surfacique d'efforts telle que le décrit la FIGURE 3 : une surpression apparaît sous l'aile et une forte dépression apparaît en partie supérieure.

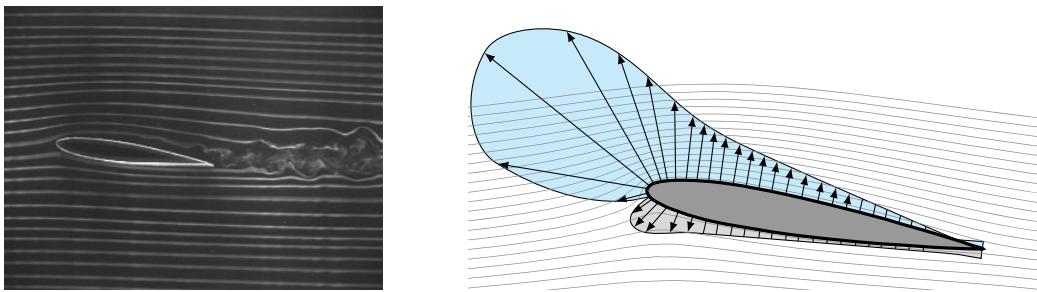


FIGURE 3 : Écoulement de l'air autour d'une aile et répartition de pression

II.3 Action mécanique linéïque

Une action mécanique *linéïque* $\vec{f}(M)$ le long d'une courbe γ sur Σ est un champ de vecteurs associé à un élément de longueur $d\ell$, qui à tout point M de la courbe γ associe une action mécanique $\vec{f}(M)d\ell$ s'exerçant sur l'élément de longueur $d\ell$ au voisinage de M (FIGURE 2(c)).

III Passage d'une formulation locale à une expression globale

Lorsqu'une action volumique, surfacique ou linéïque $\vec{f}(M)$ connue s'exerce sur un solide Σ , la première étape de l'étude consiste à déterminer le torseur d'action mécanique équivalent pour le solide. Chaque action élémentaire locale en chaque point M peut être considérée comme une action mécanique traduite par un torseur élémentaire :

$$\left\{ d\mathcal{T}_{\vec{f} \rightarrow \Sigma} \right\} = \left\{ \frac{\overrightarrow{dR}_{\vec{f} \rightarrow \Sigma}}{\overrightarrow{dM}_{\vec{f} \rightarrow \Sigma}(M)} = \vec{f}(M) d\mu \right\}_M$$

avec $d\mu$ une mesure de la zone au voisinage de M (figure 4). $d\mu$ est un élément de volume dV , un élément de masse dm , un élément de surface dS ou un élément de longueur $d\ell$.

Dans la plupart des cas, l'action locale est un champ de force donc $\overrightarrow{dM}_{\vec{f} \rightarrow \Sigma}(M) = \vec{0}$. Cette hypothèse est conservée pour la suite de l'étude, mais l'expression peut s'appliquer lorsqu'un moment local existe comme par exemple pour le cas d'un aimant dans un champ magnétique.

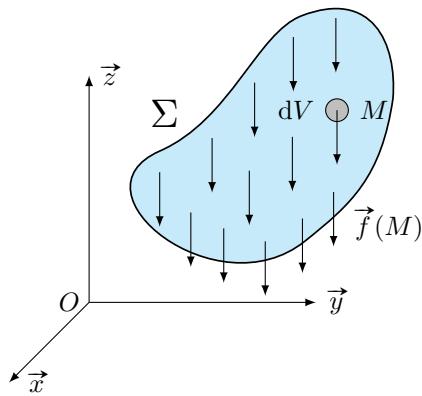


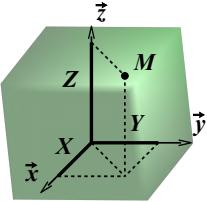
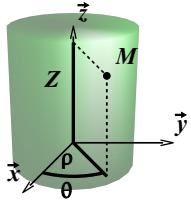
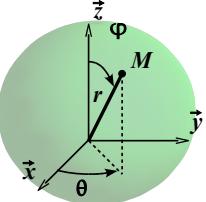
FIGURE 4 : Action mécanique volumique $\vec{f}(M)$ s'exerçant sur un système matériel Σ

Le torseur global des actions mécaniques est obtenu en faisant l'intégrale de l'ensemble des actions élémentaires en tout point du solide. Attention, il faut que les torseurs soient écrits au même point pour faire la somme !

On a donc :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \int dR_{\vec{f} \rightarrow \Sigma} \\ \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} = \int_{\Omega} \overrightarrow{AM} \wedge dR_{\vec{f} \rightarrow \Sigma} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{\Omega} f(M) \vec{u}(M) d\Omega \\ \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} = \int_{\Omega} \overrightarrow{AM} \wedge f(M) \vec{u}(M) d\Omega \end{array} \right\}_A$$

Ω peut être soit un volume, soit la surface de contact et l'on se retrouve alors à calculer soit une intégrale de volume, soit une intégrale de surface.

Coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques	Coordonnées sphériques
		

$dV = dx \cdot dy \cdot dz$ $dV = dr \cdot rd\theta \cdot dz$ $dV = dr \cdot rd\theta \cdot r \sin\phi \cdot d\phi$

Remarque : Le passage d'une action locale à une action globale est toujours possible. L'inverse nécessite des hypothèses sur le modèle local.

Bien que représentant un même phénomène réel, les deux représentations locale ou globale ne sont pas équivalentes. Le passage du local au global par intégration s'accompagne d'une perte d'information sur la « répartition spatiale » de l'action mécanique. En mécanique des structures déformables, par exemple, le modèle devra être choisi avec prudence.



IV Action mécanique à distance : cas de la pesanteur

IV.1 Cas du point

Dans le cas où l'on considère l'effort exercé par la pesanteur sur un point matériel de masse m , on sait que le poids s'écrit $\vec{P} = m \vec{g}$ avec \vec{g} le vecteur accélération de la pesanteur qui est vertical dirigé vers le bas, de norme $m \cdot g$ avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

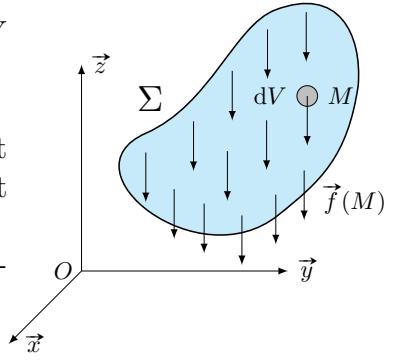
IV.2 Cas du solide

Dans le cas d'un solide de volume V , placé dans un champ de pesanteur, on a pour le modèle local : $d\vec{F}_{\text{pes} \rightarrow S}(M) = f(M)\vec{u}(M)dV$ où :

- $\vec{u}(M) = -\vec{z}$
- $f(M)$ est la densité volumique de force au voisinage du point M . Pour un matériau homogène, $f(M) = \rho g = \text{cste}$ où ρ est la masse volumique du solide.

On peut donc maintenant calculer le torseur des actions de pesanteur sur le solide en un point A :

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{pes} \rightarrow S} = \int_{\Omega} -\rho g \vec{z} dV \\ \vec{M}_{A,\text{pes} \rightarrow S} = \int_{\Omega} \overrightarrow{AM} \wedge -\rho g \vec{z} dV \end{array} \right\}_A$$



Cas d'une masse volumique constante :

- $\vec{F}_{\text{pes} \rightarrow S} = \int_{\Omega} -\rho g \vec{z} dV = -\rho g \vec{z} \int_{\Omega} dV = -\rho V g \vec{z} = -mg \vec{z}$
- $\vec{M}_{A,\text{pes} \rightarrow S} = \int_{\Omega} \overrightarrow{AM} \wedge -\rho g \vec{z} dV = -\rho g \left(\int_{\Omega} \overrightarrow{AM} dV \right) \wedge \vec{z}$

IV.3 Centre de gravité d'un solide

Le centre de gravité d'un solide est le barycentre des points matériels du solide affectés d'un coefficient proportionnel à leurs masses.

Le centre de gravité est déterminé par la relation $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \int_V \overrightarrow{AM} \rho dV = \frac{1}{m} \sum_i m_i \overrightarrow{AM}_i$

Remarque : G peut être en dehors du solide (sphère creuse...)

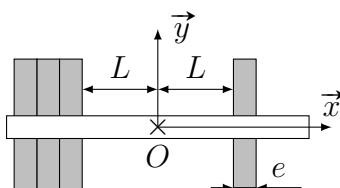
Dans le cas d'une masse volumique constante, on a :

- si S possède un plan de symétrie, G est sur le plan de symétrie ;
- si S possède un axe de symétrie, G est sur l'axe de symétrie ;
- si S possède un centre de symétrie, G est confondu avec ce centre.

Remarque : Si le solide n'est pas homogène (masse volumique différente dans plusieurs domaines), il suffit de calculer le centre de gravité de chaque partie et de trouver le centre de gravité global par la définition du centre de gravité d'un ensemble matériel $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \overrightarrow{AG}_i$ où les G_i sont les centres de gravité de chaque domaine homogène et m_i leurs masses respectives.

Exemple : Déterminer les centres de gravité des exemples suivants.

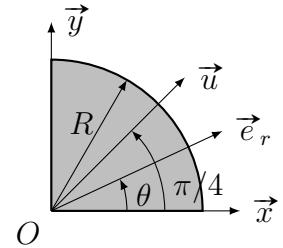
On note : $m_1 = 0,3 \text{ kg}$ la masse de la barre et O son centre de gravité. On note $m_2 = 1 \text{ kg}$ la masse des poids dont le centre de gravité est situé sur l'axe (O, \vec{x}) au centre du poids.



Q1. Déterminer la position du centre de gravité de l'ensemble.

On note la masse du 1/4 de disque : $m_d = \rho_s S$.

Q2. Déterminer les coordonnées du centre de gravité. Montrer qu'il est situé sur l'axe (O, \vec{u}) .



IV.4 Torseur associé à la pesanteur

Dans le cas particulier où les éléments de réduction du torseur sont écrits au centre de gravité G, on a $\vec{M}_{G,\text{pes} \rightarrow S} = \vec{0}$ car $\int_V \overrightarrow{GM} dV = \vec{0}$ par définition du centre de gravité dans le cas d'une masse volumique constante.

Aussi le torseur de la pesanteur est un torseur glisseur :

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{pes} \rightarrow S} = -mg \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

On définira toujours cette action mécanique de pesanteur en G pour simplifier les calculs.

V Action mécanique de contact

On considère deux solides 1 et 2 en contact selon une surface S .

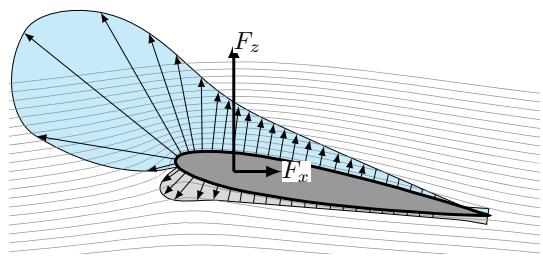
V.1 Torseur transmissible par un contact

Soit P un point de S et un élément de surface dS autour de P .

L'action mécanique élémentaire de 1 sur 2 au niveau de dS peut être modélisée par un effort élémentaire : $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(P) = f(P) \vec{u}(P) dS$

Le torseur des actions mécaniques du solide 1 sur 2 est déterminé par l'intégration sur la surface S de la densité d'effort en un point quelconque A .

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1 \rightarrow 2}(P) = \int_S d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} = \int_S \vec{AP} \wedge d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(P) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{\Omega} f(P) \vec{u}(P) dS \\ \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} = \int_S \vec{AP} \wedge f(P) \vec{u}(P) dS \end{array} \right\}_A$$

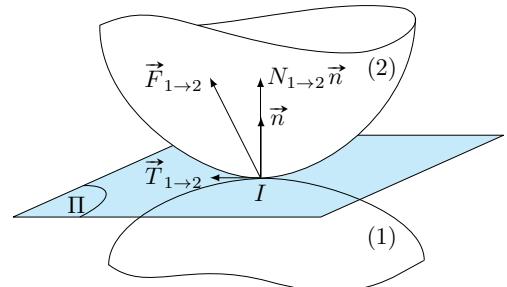


V.2 Modèle du contact parfait

Dans le cas d'un **contact parfait**, c'est-à-dire **sans frottement**, l'action mécanique élémentaire est portée par la normale à la surface de contact élémentaire.

Le vecteur $\vec{u}(P) = \vec{n}$ est la normale au point de contact considéré (si on considère l'action du solide 1 sur 2, la normale est celle qui va de 1 vers 2).

L'expression de la densité d'effort est dans le cas général inconnue mais seule la connaissance de la géométrie du contact peut permettre de remonter à la forme du torseur des actions transmissibles (voir paragraphe sur les liaisons).

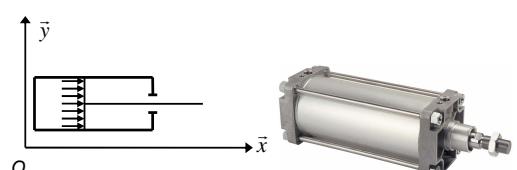


La densité d'effort est en revanche souvent connue dans le cas d'un contact d'un fluide sur un solide, on la nomme **pression**.

Cette pression est déterminée par les lois de la mécanique des fluides (voir cours de physique).

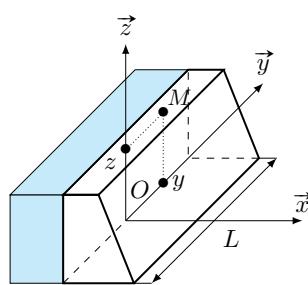
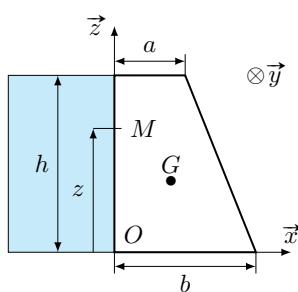
Exemple : Action dans un vérin

Dans un vérin, la pression est considérée comme constante en première approximation : $f(P) = p$ et $\vec{n} = \vec{x}$; on note le rayon du piston R . On montre que $F_{\text{fluide} \rightarrow \text{tige}} = pS = p\pi R^2$



Exemple : Action de l'eau sur un barrage

Dans un barrage électrique, la pression de l'eau sur le barrage dépend linéairement de la hauteur du fluide



$f(M) = p(z) = p_{\text{atm}} + \rho g(h - z)$; $\vec{n} = \vec{x}$; on note la largeur du barrage $L = 130 \text{ m}$, la hauteur du barrage $h = 20 \text{ m}$ et la masse volumique de l'eau $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; le point O est situé au milieu du barrage suivant l'axe \vec{y} .

$$\text{On montre que } \{\mathcal{T}_{\text{Eau} \rightarrow \text{Barrage}}\} = \left\{ \begin{array}{l} Lh \left(p_{\text{atm}} + \rho g \frac{h}{2} \right) \vec{x} \\ L \frac{h^2}{6} (3p_{\text{atm}} + \rho gh) \vec{y} \end{array} \right\}_O.$$

L'axe central est en A tel que $\overrightarrow{OA} = c \vec{z}$ avec $c = \frac{h}{3} \times \frac{3p_{\text{atm}} + \rho gh}{2p_{\text{atm}} + \rho gh}$. On a donc $\{\mathcal{T}_{\text{Eau} \rightarrow \text{Barrage}}\} = \left\{ \begin{array}{l} Lh \left(p_{\text{atm}} + \rho g \frac{h}{2} \right) \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$.

VI Actions mécaniques dans les liaisons parfaites

VI.1 Hypothèses

On suppose que toutes les liaisons sont parfaites :

- les pièces mécaniques sont des solides indéformables ;
- les surfaces sont géométriquement parfaites ;
- les jeux sont nuls ;
- le contact est sans frottement ni adhérence.

VI.2 Cas de la liaison ponctuelle

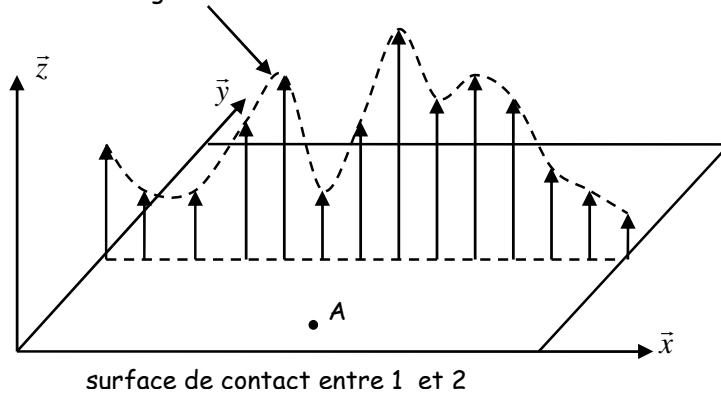
Dans le cas d'une zone de contact ponctuel, le moment est nécessairement nul et il n'y a plus de notion de densité d'effort. Le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison ponctuelle se limite à une seule composante sur la résultante portée par la normale au

$$\text{contact : } \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = Z_{12} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{array} \right\}_{O,(-,-,\vec{z})} \quad (\text{pour un contact de normale } \vec{z} \text{ au point O}).$$

VI.3 Cas de la liaison appui-plan

Dans le cas d'une liaison appui-plan, la surface de contact entre les deux solides est un plan. La densité d'effort élémentaire est portée par la normale extérieure au plan de contact et seule son intensité est inconnue.

densité d'effort sur une ligne de la surface de contact entre 1 et 2



On sait que la résultante du torseur des actions transmissibles par la liaison appui-plan est :
 $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_S f(M) \vec{u}(M) dS$. Ici $\vec{u}(M) = \vec{z}$.

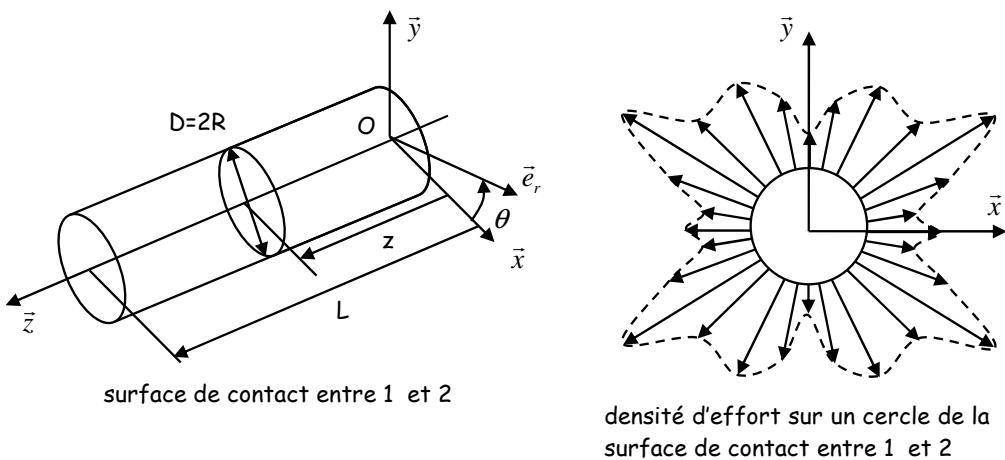
On en déduit que pour la résultante :

De même pour le moment :

On en déduit que la forme du torseur des actions transmissibles par la liaison appui-plan est :

VI.4 Cas de la liaison pivot glissant

Dans le cas d'une liaison pivot glissant, la surface de contact entre les deux solides est un cylindre. La densité d'effort élémentaire est portée par la normale extérieure au plan de contact et seule son intensité est inconnue.



Le point courant M est défini par : $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + z\vec{z}$ en coordonnées cylindriques. L'action mécanique élémentaire au point M est modélisée par un glisseur tel que : $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = f(M) \vec{e}_r dS$.

En coordonnée cylindrique l'élément de surface élémentaire s'écrit $dS = R d\theta dz$

La résultante s'écrit :

Le moment au point O s'écrit :

On en déduit que la forme du torseur des actions transmissibles par une liaison pivot glissant d'axe \vec{z} est :

VI.5 Généralisation

Sur les trois exemples précédents, on peut constater qu'à une composante nulle du vecteur taux de rotation correspond une composante non nulle sur le moment transmissible. De même à une composante nulle du vecteur vitesse correspond une composante non nulle de la résultante transmissible.

Remarque : si on compare le torseur d'action transmissible d'une liaison parfaite avec son torseur cinématique, on constate que $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{V}_{A,1 \rightarrow 2} + \vec{M}_{A,2/1} \cdot \vec{\Omega}_{2/1} = 0$. Cette équation traduit le fait que la puissance mutuelle des actions mécaniques de contact dans une liaison parfaite est nulle (cf. cours de deuxième année).

On en déduit le tableau récapitulatif des torseurs cinématique et d'action transmissible des liaisons normalisées donné en annexe.

Pour déterminer une action mécanique dans une liaison, on n'utilise pas le modèle local-global, on préfère utiliser cette dualité cinématique/action mécanique.

VI.6 Cas particuliers de la modélisation plane

Sous certaines conditions de mouvement plan, il est possible de simplifier les torseurs cinématiques associés aux modèles cinématiques des liaisons. Dans le cas d'un mouvement plan de normale \vec{x} , seules les vitesses selon \vec{y} et \vec{z} et la vitesse angulaire selon \vec{x} sont non nulles. Le torseur cinématique ne comporte alors que trois composantes « utiles » : $\{\mathcal{V}_{2/1}\} =$

$$\begin{Bmatrix} p_{12} & 0 \\ 0 & v_{12} \\ 0 & w_{12} \end{Bmatrix}_{M,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}.$$

Cette simplification est également possible pour les actions mécaniques transmissibles dans les liaisons. Seules trois composantes du torseur des actions mécaniques transmissibles par la

liaison seront « utiles » : $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} - & L_{12} \\ Y_{12} & - \\ Z_{12} & - \end{Bmatrix}_{M,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$.

Les composantes ignorées sont notées par un trait « - » ou par « / ». Elles ne sont pas obligatoirement nulles mais leurs valeurs n'influent pas sur la résolution du problème plan étudié.

Cette forme du torseur des actions transmissibles peut se justifier par deux approches :

- La première est liée aux mouvements. Il est possible d'analyser les actions mécaniques comme une entité qui va empêcher un mouvement possible du mécanisme étudié. Pour s'opposer à une rotation d'axe (A, \vec{x}), il faut appliquer un couple selon \vec{x} . Pour interdire les déplacements selon \vec{y} et \vec{z} , il faut appliquer des forces selon \vec{y} et \vec{z} . Cette approche n'est pas nécessairement intuitive lorsque rien ne bouge réellement...
- La seconde est liée aux actions mécaniques. Dans le cas particulier de symétrie de la géométrie et de symétrie des actions mécaniques par rapport à un plan, par exemple (O, \vec{y}, \vec{z}), il est possible de montrer que le torseur des actions transmissibles s'écrit sous la forme proposée (la FIGURE 5 illustre ces propos dans le cas d'actions mécaniques surfaciques).

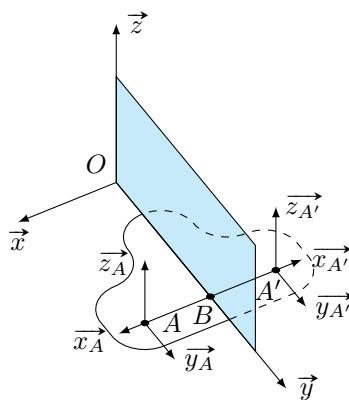


FIGURE 5 : Cas particulier d'une action mécanique surfacique possédant un plan de symétrie pour la géométrie et les actions mécaniques.

Dans ces conditions (symétrie de la géométrie et des actions mécaniques) le torseur des

$$\text{actions mécaniques est de la forme : } \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{M,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}.$$

Les termes habituellement marqués par un trait « - » sont rigoureusement nuls. La modélisation plane n'est donc pas une approximation dans ce cas particulier, mais juste une simplification de l'écriture du torseur des actions mécaniques transmissibles.

Lorsque la modélisation plane des actions mécaniques est invoquée en dehors des cas de symétrie énoncés précédemment, il s'agit alors d'une hypothèse. On suppose (ou par expérience, on sait) que les actions mécaniques non recherchées n'interviennent pas dans la résolution du problème étudié.

Le nombre d'inconnues est limité à trois au maximum par torseur d'actions mécaniques de liaison.

Exemple : Cas d'une liaison pivot

Le torseur d'action mécanique d'une liaison pivot d'axe (A, \vec{x}) dans le cadre d'une étude plane de normale \vec{x} (plan de symétrie (\vec{y}, \vec{z})) s'écrit :

$$\forall M \in (A, \vec{x}) \quad \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \underbrace{\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}}_{\text{modélisation spatiale}}_{M,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \underbrace{\begin{Bmatrix} - & 0 \\ Y_{12} & - \\ Z_{12} & - \end{Bmatrix}}_{\text{modélisation plane de normale } \vec{x}}_{M,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

La modélisation plane conduit à un torseur glisseur d'axe central (A, \vec{x}). L'action mécanique est donc modélisable par une force en tout point de cet axe. La trace de cet axe dans le plan d'étude est un point.

Exemple : Cas d'une liaison cylindre/plan

Le torseur d'action mécanique d'une liaison cylindre/plan de droite de contact (A, \vec{x}) et de normale \vec{z} dans le cadre d'une étude plane de normale \vec{x} s'écrit :

$$\forall M \in \text{plan}(A, \vec{x}, \vec{z}) \quad \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}}_{M, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ modelisation spatiale}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} - & 0 \\ 0 & - \\ Z_{12} & - \end{Bmatrix}}_{M, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ modelisation plane de normale } \vec{x}}$$

Avec l'hypothèse de modélisation plane des actions mécaniques, le torseur des actions mécaniques de la liaison cylindre/plan a la même forme que celui d'une liaison sphère-plan (ponctuelle).

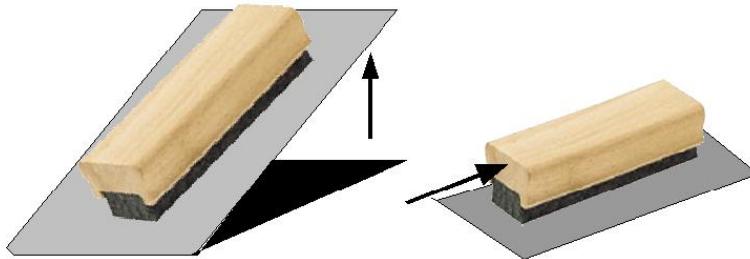
Remarque : Seules trois formes de torseurs d'actions mécaniques sont utilisées en modélisation plane.

Glissière direction \vec{y}	Articulation ou pivot plane (glisseur)	Ponctuelle plane de normale \vec{z}
$\begin{Bmatrix} - & L_{12} \\ 0 & - \\ Z_{12} & - \end{Bmatrix}_{M, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$\begin{Bmatrix} - & 0 \\ Y_{12} & - \\ Z_{12} & - \end{Bmatrix}_{M, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$\begin{Bmatrix} - & 0 \\ 0 & - \\ Z_{12} & - \end{Bmatrix}_{M, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

VII Modélisation des actions de contact avec frottements

VII.1 Mise en évidence

Dans la réalité, les liaisons sans frottement n'existent pas. Il est nécessaire d'imposer un effort pour déplacer une brosse qui est en appui-plan sur la table. De même, une brosse sur un plan incliné restera en position, jusqu'à un angle limite d'inclinaison.



VII.2 Modèle de Coulomb

Le modèle de Coulomb est basé sur des observations empiriques.

Cas de non glissement en I = adhérence ou roulement sans glissement (Figure 6(a)) : $\vec{V}_{2/1}(I) = \vec{0}$

— limite sur l'action tangentielle : $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq f.N_{1 \rightarrow 2}$ ($N_{1 \rightarrow 2} \geq 0$).

Cas du glissement en I (Figure 6(b)) : $\vec{V}_{2/1}(I) \in \Pi \neq \vec{0}$

— action tangentielle : $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = f.N_{1 \rightarrow 2}$ ($N_{1 \rightarrow 2} \geq 0$);

— sens de l'action tangentielle : $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ de même direction et de sens opposé à $\vec{V}_{2/1}(I)$.

Le coefficient¹ de frottement f (sans unité) est obtenu expérimentalement. Il dépend des matériaux en contact, de la qualité des surfaces et de la nature du contact.

Représentation graphique des lois de Coulomb : le cône de frottement

Les conditions de frottement peuvent se représenter graphiquement sous la forme d'une action tangentielle maximale proportionnelle à l'action normale, c'est-à-dire sous la forme d'une inclinaison maximale de la force transmise au contact par rapport à la normale. L'angle d'inclinaison maximal φ est tel que $f = \tan \varphi$.

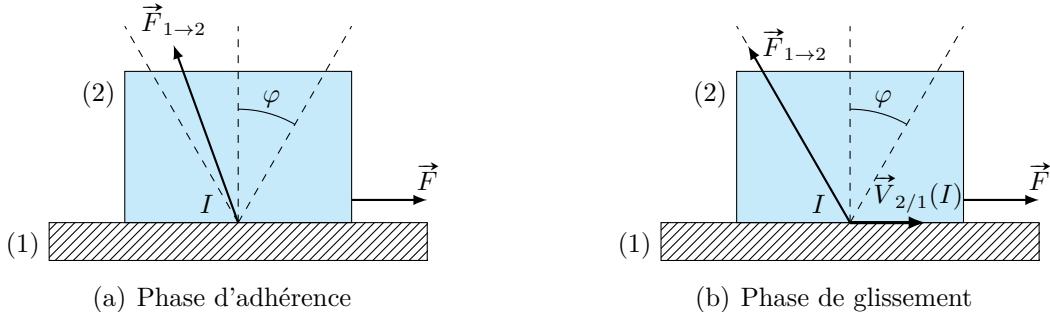


FIGURE 6 : Représentation graphique (plane) du cône de frottement.

En phase d'adhérence (figure 6(a)), la condition de Coulomb impose que l'action $\vec{F}_{1\rightarrow 2}$ soit « dans le cône de frottement » ou, à la limite du glissement, « sur le cône ».

En phase de glissement (figure 6(b)), la condition de Coulomb impose que l'action $\vec{F}_{1\rightarrow 2}$ soit « sur le cône » et la composante tangentielle $\vec{T}_{1\rightarrow 2}$ opposée à la vitesse de glissement.

Le modèle de Coulomb interdit à l'action $\vec{F}_{1\rightarrow 2}$ d'être hors du cône.

Ces représentations planes sont à interpréter en trois dimensions. Le secteur angulaire est alors effectivement un cône, de demi-angle au sommet φ (figure 7).

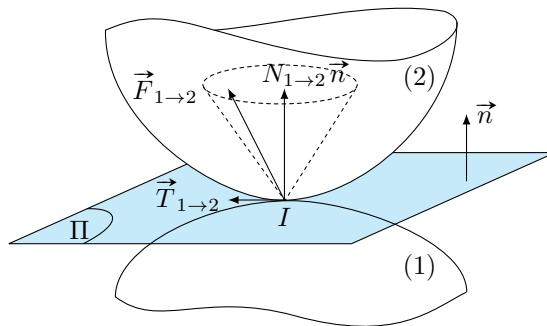


FIGURE 7 : Représentation 3D du cône de frottement.

Deux coefficients différents, selon qu'il y a adhérence ou glissement, sont parfois utilisés. Il s'agit du *coeffcient d'adhérence* et du *coeffcient de frottement*. Le coefficient d'adhérence est légèrement supérieur au coefficient de frottement.

Dans le cadre du modèle de Coulomb, la composante tangentielle n'est en aucun cas proportionnelle à la surface de contact. Les lois de Coulomb représentent le modèle le plus simple permettant de tenir compte du phénomène de frottement. Il est bien évident que la réalité est plus complexe. Ce coefficient dépend souvent de beaucoup d'autres paramètres tels que la température, la rugosité des surfaces, la vitesse de glissement . . .

Il est intéressant de connaître quelques valeurs usuelles de coefficient de frottement pour des contacts classiques en mécanique.

1. f est parfois appelé *facteur* de frottement

Matériaux en contact	Coefficients de frottement
Acier/acier (sec)	0,2
Acier/bronze ou laiton (sec)	0,2
Acier/bronze ou laiton (lubrifié)	0,08
Acier/téflon	0,05
Lubrification hydrodynamique	0,005
Pneu/bitume sec	0,8
Pneu/bitume humide	0,6

Le bronze est un alliage de cuivre et d'étain (et de plomb lorsqu'il est utilisé pour réduire le frottement). Le laiton est un alliage de cuivre et de zinc. Ils présentent de bonnes propriétés de frottement face à l'acier (en terme d'usure et de grippage) et conduisent (évacuent) très bien la chaleur.

Le Téflon PTFE (polytétrafluoroéthylène) est un polymère possédant de très bonnes propriétés de frottement (coefficients faibles).

VII.3 Contact ponctuel avec résistance au roulement ou au pivotement

Soient $\vec{\Omega}_{2/1} \neq \vec{0}$ et $\vec{M}_{1 \rightarrow 2}(I) = M_{N,1 \rightarrow 2}\vec{n} + \vec{M}_{T,1 \rightarrow 2}$ le moment transmis.

On note $\vec{\Omega}_{2/1} = \omega_P \vec{n} + \vec{\Omega}_R$ où ω_P est la composante de *pivotement* et $\vec{\Omega}_R$ la composante de *roulement* ($\vec{\Omega}_R \in \Pi$).

Par extension des lois de Coulomb sur le frottement, les résistances au pivotement ou au roulement peuvent se modéliser sous la forme :

- Si $\omega_P = 0$, $|M_{N,1 \rightarrow 2}| \leq \delta \cdot N_{1 \rightarrow 2}$;
- Si $\omega_P \neq 0$, $|M_{N,1 \rightarrow 2}| = \delta \cdot N_{1 \rightarrow 2}$ et $M_{N,1 \rightarrow 2}$ de signe opposé à ω_P ;
- Si $\vec{\Omega}_R = \vec{0}$, $\|\vec{M}_{T,1 \rightarrow 2}\| \leq \mu \cdot N_{1 \rightarrow 2}$;
- Si $\vec{\Omega}_R \neq \vec{0}$, $\|\vec{M}_{T,1 \rightarrow 2}\| = \mu \cdot N_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{M}_{T,1 \rightarrow 2}$ de signe opposé à $\vec{\Omega}_R$ et de même direction.

Les coefficients de résistances au pivotement δ et au roulement μ sont exprimés en m et sont obtenus expérimentalement.

Exemple de valeurs de coefficient de résistance au roulement :

- Acier sur acier (trains) : 10^{-5} m ;
- Pneu sur bitume (camions) 10^{-2} m.

Cas du pneu de voiture

À l'arrêt, la déformation symétrique du pneu conduit à une répartition de pression symétrique (figure 8(a)) et une résultante des forces passant par l'axe de rotation de la roue.

Lorsque le véhicule est en mouvement, la déformation élastique du pneu présente un hystérésis qui conduit à une répartition de pression non symétrique (figure 8(c)) : la pression est plus forte à l'avant du pneu qu'à l'arrière. La résultante des forces passe à une distance μ de l'axe de rotation, ce qui crée une résistance au roulement.

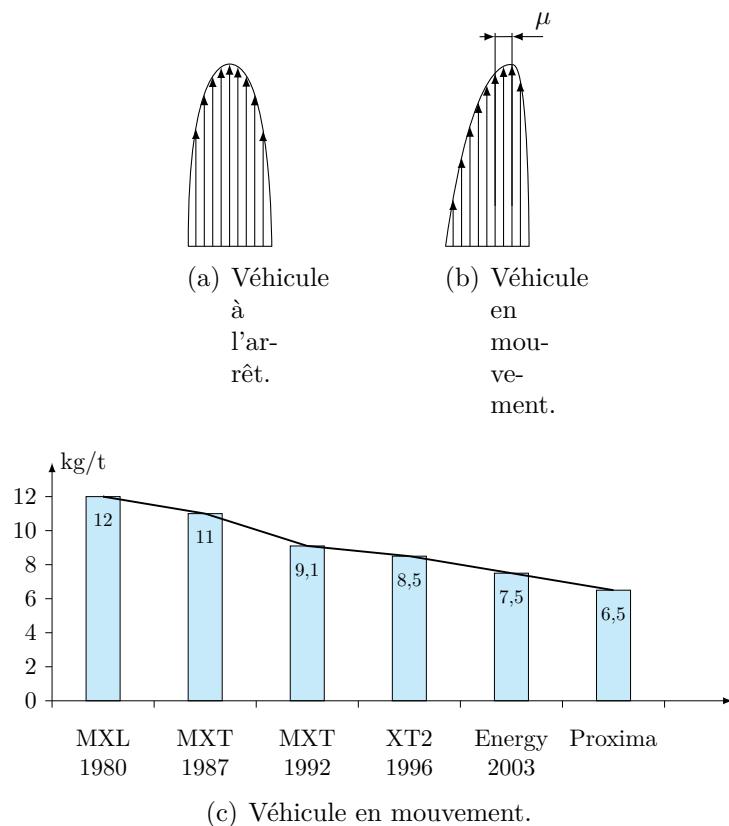


FIGURE 8 : (a) et (b) Répartition de pression pour une roue de voiture. (c) Évolution de la résistance au roulement au fil des améliorations technologiques, exprimé en kg (d'action tangentielle) par tonne (d'action normale) – source Michelin.

TD 1 – Embrayage de véhicule thermique

Un embrayage de voiture est un organe du bloc moteur permettant de désolidariser l'arbre de sortie du moteur (appelé vilebrequin) de l'arbre d'entrée de la boîte de vitesses (appelé arbre primaire) afin de changer les vitesses.

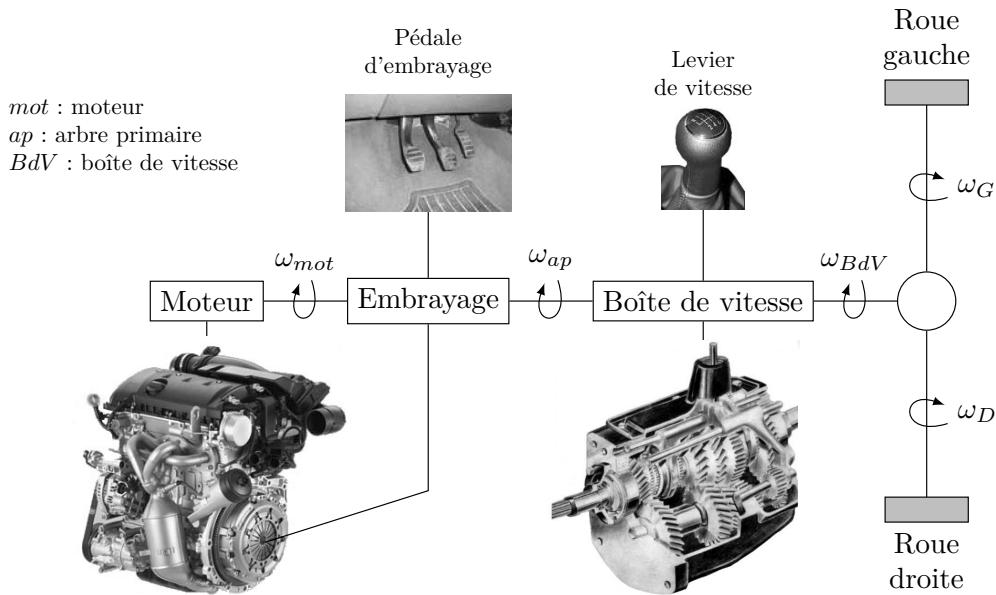


FIGURE 1 : Illustration du système étudié

Le cahier des charges fonctionnel définit la fonction « Transmettre ou non la rotation du vilebrequin à l'arbre primaire », dont le critère « couple transmissible » possède un niveau $C_{maxi} = 130 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Objectif

L'objectif de cet exercice est de vérifier le niveau du critère de couple transmissible de la fonction « Transmettre ou non la rotation du vilebrequin à l'arbre primaire ».

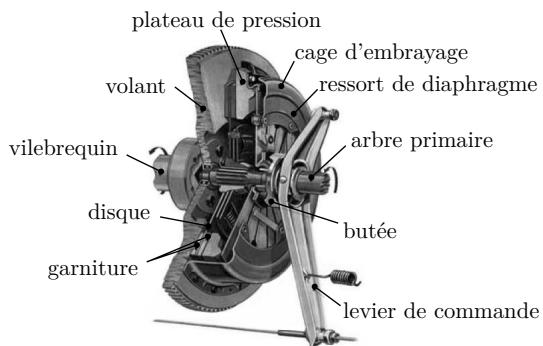
L'embrayage est composé de (Figure 2) :

- un boîtier d'embrayage (1) relié au vilebrequin du moteur ;
- un disque d'embrayage (2) (en liaison glissière avec (3)) ;
- un arbre primaire (3), lié à la boîte de vitesse ;
- un disque « flottant » (4) (en liaison glissière avec (1)) ;
- un ressort à diaphragme placé entre (1) et (4).

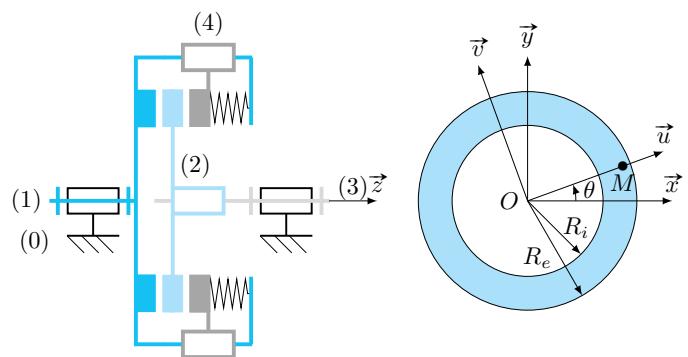
En position normale (embrayée), sous l'action du ressort à diaphragme, le disque « flottant » (4) est plaqué sur le disque (2) qui est lui-même plaqué contre le boîtier d'embrayage (1).

L'effort du ressort doit être suffisant pour transmettre le couple moteur par frottement.

Le mouvement d'entrée est donné sur la pièce (1) : il s'agit d'un mouvement de rotation d'axe (O, \vec{z}_0) par rapport au bâti (0). Ce mouvement est transmis (ou non) à la pièce (2) (donc à la pièce (3)) suivant l'adhérence (ou non) dans les liaisons appui plan de normale \vec{z} entre (2) et (1) et entre (2) et (4).



(a) Vue écorchée de l'embrayage.



(b) Représentation plane de l'embrayage.

FIGURE 2 : Description de l'embrayage.

L'adhérence entre (1) et (2) et entre (2) et (4) est obtenue par :

- un fort coefficient de frottement f entre les disques (1) et (2) et entre les disques (2) et (4) ;
- l'action du ressort sur le disque (4).

Hypothèses simplificatrices :

- Les surfaces de contact entre (1) et (2) et entre (2) et (4) sont des anneaux de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e .
- L'action de la pesanteur est négligée par rapport aux autres actions mécaniques.
- Les frottements sont négligés sauf entre (1) et (2) et entre (2) et (4).
- La pression p de contact entre (1) et (2) est uniforme. Il en est de même pour la pression de contact entre (2) et (4).

Les dimensions de l'embrayage sont les suivantes :

- diamètre extérieur de la garniture : 240 mm ;
- diamètre intérieur de la garniture : 180 mm ;
- coefficient de frottement : 0,34 ;
- effort presseur du diaphragme : 2000 N.

La détermination du couple de frottement se fait à la limite du glissement entre les disques, avec $\omega_{1/0} > \omega_{2/0} = \omega_{3/0} > 0$.

Soit M un point quelconque de la surface de contact entre (2) et (4) (FIGURE 2) repéré par ses coordonnées polaires r et θ .

Q1. Déterminer la direction et le sens de la vitesse de glissement entre (2) et (1) au point M : $\vec{V}_{2/1}(M)$.

Q2. En déduire en fonction de p et f , le torseur d'action mécanique élémentaire en M de (1) sur (2), toujours à la limite du glissement.

Q3. Déterminer le torseur d'action mécanique de (1) sur (2) en O .

Q4. Montrer, en isolant le disque d'embrayage (2), que la pression de contact est identique entre (1) et (2) et entre (2) et (4).

Q5. Soit N l'effort presseur du ressort à diaphragme. Déterminer la relation entre la pression p de contact à l'interface des disques (2) et (4), N et la géométrie.

Q6. Donner l'expression du couple transmissible par l'embrayage en fonction de f , N et des grandeurs géométriques.

Q7. Déterminer le niveau du critère de couple transmissible de la fonction « Transmettre ou non la rotation du vise-brequin à l'arbre primaire ».

TD 2 – Dimensionnement des ailes d'un avion de ligne

Le cahier des charges d'un avion de ligne impose des critères de résistance de la voilure en vol, et en particulier le niveau des actions mécaniques maximales transmissibles dans la liaison enca斯特rement entre l'aile et le fuselage tel que :

$$F_{\max} = 2 \times 10^7 \text{ N} \text{ et } M_{\max} = 8 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

L'aile et le fuselage de l'avion étant fabriqués séparément, l'objectif est de vérifier la résistance de la liaison entre ces deux éléments.

L'action de l'air sur l'une des ailes est modélisée par un torseur glisseur au point A de coordonnées $\overrightarrow{OA} = R_A \vec{y} - L_A \vec{x}$ (figure 1) de résultante $\vec{F} = -F_x \vec{x} + F_z \vec{z}$.

L'action de la gravité s'appliquant sur l'aile est modélisée par la force $\vec{P} = -P \vec{z}$ qui s'applique au centre de gravité de l'aile G de coordonnées $\overrightarrow{OG} = R_G \vec{y} - L_G \vec{x}$.

On donne :

- $F_x = 3 \times 10^5 \text{ N}; \quad F_z = 2 \times 10^6 \text{ N}; \quad P = 1 \times 10^5 \text{ N}.$
- $R_A = 15 \text{ m}; \quad L_A = 1,3 \text{ m}; \quad R_G = 11 \text{ m}; \quad L_G = 0,9 \text{ m}.$

Q1. Donner les torseurs d'actions mécaniques de l'air sur l'aile au point A et de la pesanteur sur l'aile au point G.

Q2. Déterminer le torseur équivalent aux actions mécaniques de l'air et de la pesanteur au point O, noté $\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow \text{aile}}\}$.

L'action mécanique du fuselage sur l'aile est l'opposée de l'action mécanique extérieure sur l'aile.

Q3. En déduire le torseur de l'action mécanique du fuselage sur l'aile au point O.

Q4. Déterminer la norme de la résultante de l'action mécanique du fuselage sur l'aile et la norme du moment de l'action mécanique du fuselage sur l'aile en O. Conclure quant à la résistance ou non de la liaison mécanique entre l'aile et le fuselage.

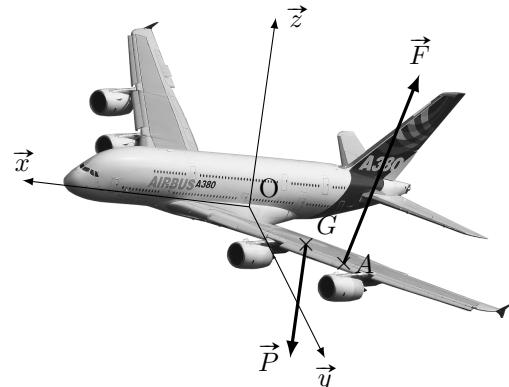


FIGURE 1 : Avion de ligne.

TD 3 – Machine d'essai de traction – torsion

Pour mesurer les propriétés mécaniques des métaux et alliages, l'essai de traction est le procédé expérimental le plus largement utilisé. Il consiste à appliquer à un échantillon standardisé, un effort de traction et à mesurer l'allongement correspondant ou inversement. Un essai de traction produit essentiellement des répartitions de contraintes monoaxiales. Or, dans leurs applications industrielles, les sollicitations que subissent les structures sont souvent plus complexes : torsion, flexion ... Aussi a-t-on développé des essais qui se rapprochent davantage des sollicitations réelles, comme les essais de traction, de torsion ou de traction - torsion réalisables sur la machine d'essais, sujet de cette étude (voir FIGURE 1).

Lors d'un essai de torsion, l'éprouvette de forme cylindrique est saisie d'un côté, dans une tête d'amarrage fixe qui mesure le couple appliqué, de l'autre dans une tête d'amarrage animée d'un mouvement de rotation. La différence de rotation des deux têtes d'amarrage fournit la torsion de l'échantillon. La machine d'essais étudiée est une machine électro-hydraulique asservie bi-axiale. Celle-ci permet d'effectuer sur une éprouvette tubulaire (de diamètre maximal 25 mm), des sollicitations de traction et de torsion, indépendantes ou liées. Chacun des axes de la machine peut être asservi, soit en force soit en position. Les chaînes d'actions sont constituées d'un vérin linéaire et d'un vérin rotatif, montés en série.

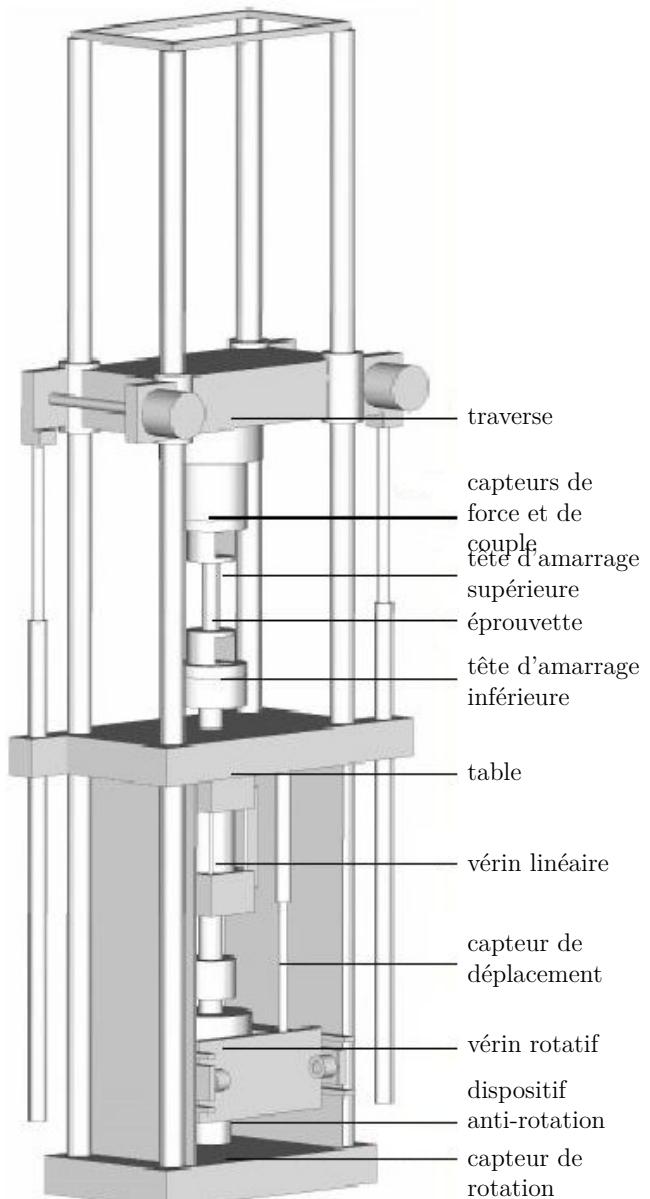


FIGURE 1 : Vue d'ensemble de la machine d'essai

Objectif

L'objectif est de vérifier les performances annoncées par le constructeur.

Le cahier des charges partiel spécifie les performances suivantes de la machine.

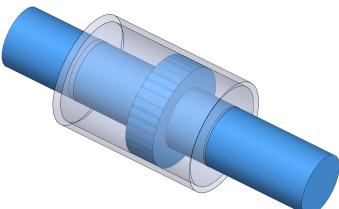
Fonctions de service	Critère	Valeur
Exercer un effort de traction-compression	Effort maximal	100 kN
Exercer un moment de torsion	Couple maximal	1,2 kN · m
Être alimentée en énergie hydraulique	Pression maximale P_{max}	220 bar

Étude du vérin linéaire - Vérification du critère d'effort maximal

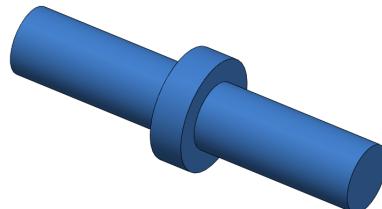
Le vérin linéaire, permettant de piloter les essais en traction-compression, est schématisé sur la figure ci-contre (cylindre de révolution). Son corps est fixé à la table **0** et la tête d'amarrage est directement montée en bout de sa tige **2**. C'est un vérin hydraulique double effet à tige traversante dont les chambres supérieures et inférieures sont respectivement alimentées à la pression $P_H = P_{max}$ et $P_B = 1$ bar.

Q1. Modéliser l'action mécanique F_z due à la pression sur la tige **2**, en fonction de P_H , P_B , d et D .

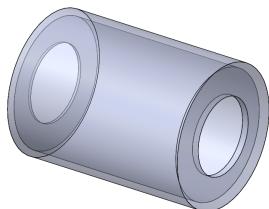
Q2. Sachant que les dimensions du vérin sont $D = 10$ cm et $d = 6$ cm, vérifier que la pression maximale spécifiée dans le cahier des charges permet d'atteindre la valeur d'effort indiquée.



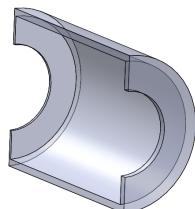
Vérin linéaire assemblé



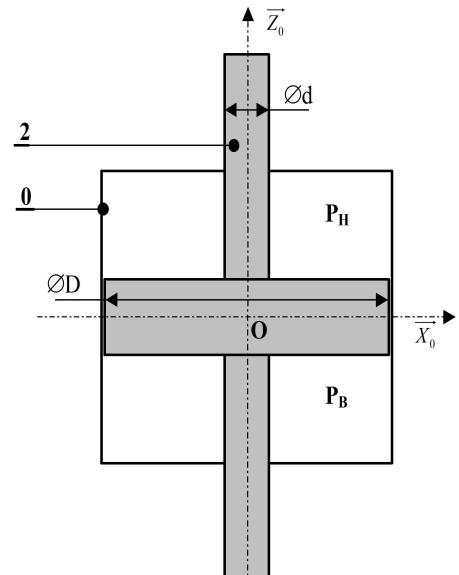
Tige du vérin



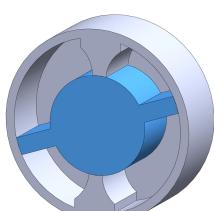
Corps du vérin



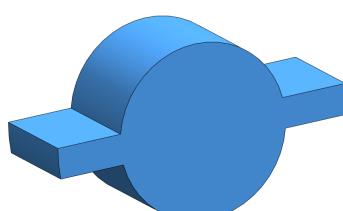
Corps en coupe



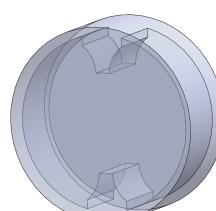
Étude du vérin rotatif - Vérification du critère de couple maximal



Vérin rotatif assemblé



Tige du vérin



Corps du vérin



Photographie

Le vérin rotatif permettant de piloter les essais de torsion est schématisé sur la figure ci-contre. Son corps **1** est fixe et sa tige est directement montée sur la tige **2** du vérin linéaire. C'est un vérin quart de tour « OLAER SS-40 : Montage en bout » dont les 4 chambres hydrauliques, couplées 2 à 2, sont alimentées aux pressions $P_1 = P_{max}$ et $P_0 = 1$ bar comme indiqué sur la figure. Les palettes ont une hauteur H . R et r sont les rayons du cylindre extérieur et de la tige.

Remarque : G est la projection orthogonale de F sur (B, \vec{X}_2) , et D la projection orthogonale de E sur (B, \vec{X}_2) .

Q3. On pose r^* la distance BD et R^* la distance BG . Calculez r^* et R^* en fonction de R , r et e .

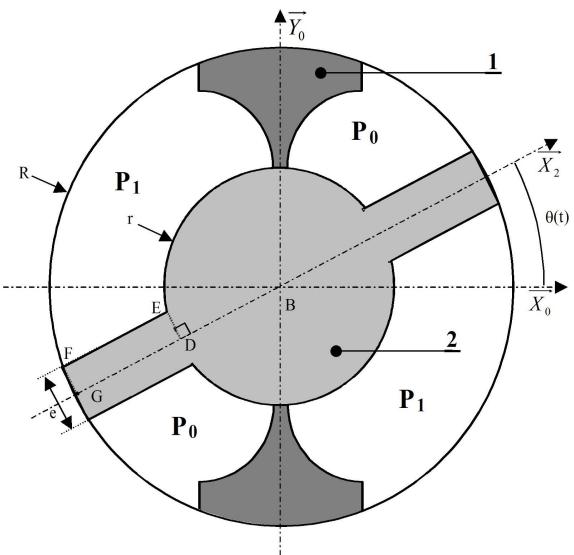
Q4. Représenter les forces élémentaires de pression sur le schéma ci-contre. Compte-tenu de la géométrie et des symétries, montrer que l'action du fluide est modélisable par un torseur couple en précisant les surfaces à prendre en compte pour le calcul de celui-ci.

Le couple hydraulique des actions de la pression sur la tige **2** du vérin est noté C_v (moment autour de l'axe (B, \vec{Z}_0)).

Q5. Calculez C_v en fonction de R^* , r^* , H et des pressions P_0 et P_1 , puis en fonction de R , r , H et des pressions P_0 et P_1 .

Les dimensions du vérin rotatif utilisé sont $r = 28,5$ mm, $R = 50$ mm, $H = 36$ mm, $e = 10$ mm.

Q6. Vérifier le critère de couple maximal pour une pression d'utilisation maximale.



TD 4 – Vol d'un drone miniature¹

Présentation : L'apparition des premiers drones, véhicules volants sans pilote humain à bord, date de la fin de la seconde guerre mondiale. Tout d'abord principalement utilisés comme cibles militaires pour l'entraînement au combat, ensuite employés pour des missions de reconnaissance dans les années 1960, leur utilisation pour des missions de surveillance s'est ensuite répandue lors de nombreux conflits. Depuis, de nombreux drones ont été développés. Les applications sont multiples : localisation de victimes lors de catastrophes naturelles, supervision du trafic routier, prises de vues de bâtiments ou d'ouvrages d'art pour la maintenance, inspection de lignes électriques ou de voies ferrées ... Le drone est alors principalement utilisé dans sa fonction d'œil déporté, grâce à son vol stationnaire dans des missions difficiles d'accès pour l'homme.

L'objet de cette étude est la modélisation, l'analyse et la commande du drone miniature MUNIN développé par la Sagem, à rotor caréné à pas fixe et quatre gouvernes dans une application de surveillance de bâtiment (FIGURE 1). Le drone considéré est équipé d'un rotor principal à pas fixe assurant la sustentation. Des gouvernes sont disposées dans le flux d'air afin de réaliser la commande d'orientation.

Objectif

L'objectif du travail proposé est de justifier l'utilisation des gouvernes pour maintenir le drone en vol stationnaire et l'orienter.



FIGURE 1 : Drone Munin de la Sagem

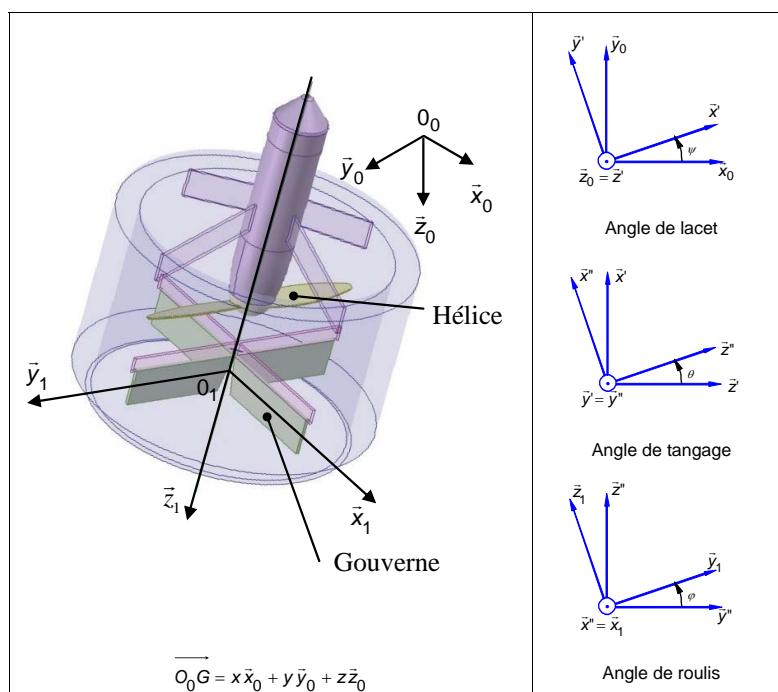
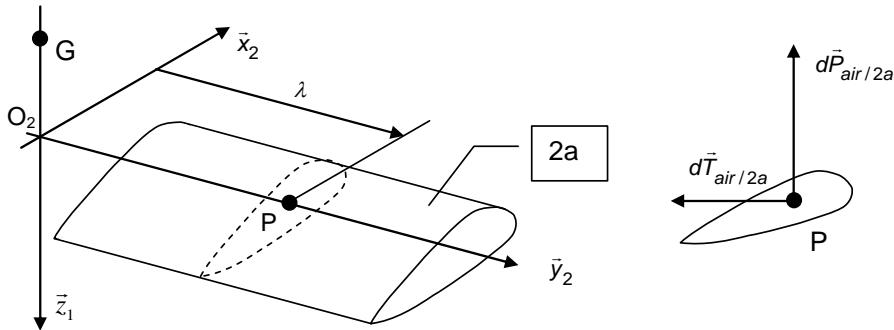


FIGURE 2 : Paramétrage du drone

1. adapté du concours Mines Ponts 2010

On modélise dans un premier temps l'action de l'air sur l'hélice.

L'hélice (2) est composée de 2 pales (2a) et (2b) et possède un axe de symétrie (O_2, \vec{z}_1). On définit pour une section de pale (au niveau du point P), deux vecteurs infinitésimaux $d\vec{P} = d\vec{P}_{air \rightarrow 2a}$ et $d\vec{T} = d\vec{T}_{air \rightarrow 2a}$ qui représentent respectivement la portance et la traînée, issues de la décomposition de la résultante de l'action mécanique de l'air sur la section. Les conditions aérodynamiques permettent d'écrire la vitesse d'un point P de l'hélice (2) dans son mouvement par rapport à l'air : $\vec{V}(P, 2/air) = V\vec{x}_2$ avec $V = -\lambda(r + \omega) > 0$ où $(r + \omega)$ est la vitesse angulaire de l'hélice par rapport à 0 (ω vitesse angulaire de 2/1 et r vitesse angulaire de 1/0).



Ces actions infinitésimales sont définies par :

- $d\vec{P}(\lambda) = -K_z V^2 d\lambda \vec{z}_1$ avec $K_z = 0,024 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$ (coefficient de portance supposé constant) ;
- $d\vec{T}(\lambda) = -K_x V^2 d\lambda \vec{x}_2$ avec $K_x = 0,006 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$ (coefficient de trainée supposé constant).

On pose $\overrightarrow{O_2 P} = \lambda \vec{y}_2$ où $r_2 < \lambda < R_2$ avec $r_2 = 2 \text{ cm}$ et $R_2 = 12 \text{ cm}$.

Q1. Donner le torseur d'action mécanique locale de l'air sur une section de la pale (2a). En déduire le torseur global d'action mécanique de l'air sur la pale (2a) au point O_2 .

Q2. Par des considérations graphiques, montrer que le torseur d'action mécanique global de l'air sur l'hélice (pales (2a) et (2b)) est de la forme : $\{\mathcal{T}_{air \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} R_{air \rightarrow 2} \vec{z}_1 \\ C_{air \rightarrow 2} \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_2}$.

Le centre de gravité du corps (1) est noté G_1 tel que $\overrightarrow{O_1 G_1} = \ell_1 \vec{z}_1$, m_1 est la masse de (1) (voir FIGURE 2). Le centre de gravité de l'hélice (2) est noté G_2 tel que $\overrightarrow{O_1 G_2} = \ell_2 \vec{z}_1$, m_2 est la masse de (2). On néglige la masse des gouvernes devant les masses des autres composants du drone. On note G le centre de gravité du drone supposé constitué du corps (1) et de l'hélice (2). On pose $\overrightarrow{O_1 G} = \ell_G \vec{z}_1$.

Q3. Justifier que le centre de gravité du drone complet doit n'avoir qu'une composante selon \vec{z}_1 . Déterminer ℓ_G en fonction des caractéristiques des solides (1) et (2). En déduire le torseur d'action mécanique de l'air sur l'hélice (2) au point G (on suppose que $O_2 = G_2 = G$).

On note ω la vitesse angulaire de l'hélice (2) par rapport au corps (1). Le mouvement du drone (corps (1)) par rapport au sol (0) est défini par le torseur cinématique suivant :

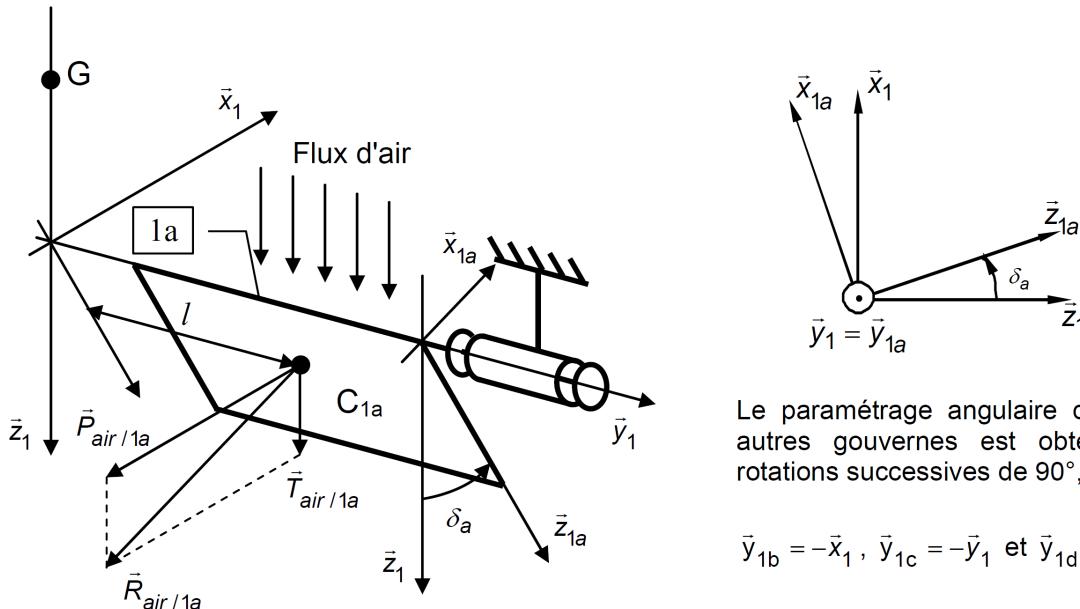
$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} p_{1/0} \vec{x}_1 + q_{1/0} \vec{y}_1 + r_{1/0} \vec{z}_1 \\ u_{1/0} \vec{x}_0 + v_{1/0} \vec{y}_0 + w_{1/0} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_G$$

Le vol stationnaire est défini lorsque le torseur cinématique est nul. Le drone est alors fixe à une altitude donnée définie par la vitesse $\omega_{2/1}$.

Q4. Justifier pourquoi il n'est pas possible d'avoir une position fixe s'il n'y a pas de gouverne(s).

Le drone est équipé de 4 gouvernes (1a), (1b), (1c), (1d). En utilisant le même type de calcul que précédemment, on peut montrer que sur chacune de ces gouvernes, le flux d'air génère une

action mécanique modélisée par un glisseur passant par le centre de la gouverne et porté par la perpendiculaire à la surface : $\vec{R}_{air \rightarrow 1a} = -K_\delta(r + \omega)^2\delta_a \vec{x}_{1a}$. Cette résultante se décompose en une portance verticale et une traînée. L'intensité dépend de la vitesse du flux d'air et donc de la vitesse angulaire de l'hélice ($r + \omega$) ainsi que de l'angle d'inclinaison δ_a de la gouverne par rapport à la direction \vec{z}_1 . K_δ est un coefficient dynamique constant. L'expression est similaire pour chaque gouverne (cf. FIGURE 3).



Le paramétrage angulaire des trois autres gouvernes est obtenu par rotations successives de 90° , soit :

$$\vec{y}_{1b} = -\vec{x}_1, \quad \vec{y}_{1c} = -\vec{y}_1 \text{ et } \vec{y}_{1d} = \vec{x}_1$$

FIGURE 3 : Action de l'air sur une gouverne

On considère différentes situations d'inclinaison des gouvernes et on cherche les configurations permettant d'obtenir un vol stationnaire.

Q5. Préciser sur une des figures de la FIGURE 4 le sens de rotation de l'hélice qui implique les portances et traînées indiquées. Vérifier que le sens du flux d'air généré est celui de la FIGURE 3.

Q6. Représenter, pour les cas 1 à 4 de la FIGURE 4, les portances et traînées sur chaque gouverne compte-tenu des inclinaisons données et du sens du flux d'air. Indiquer alors pour chaque cas si un vol stationnaire (position d'équilibre) est possible ou non.

Q7. Sur la FIGURE 4, et pour les cas n°5 et 6, proposer deux configurations possibles des gouvernes qui permettraient également d'obtenir un vol stationnaire.

Q8. Certains drones adoptent une configuration à deux hélices contrarotatives de même axe. Quels peuvent être les avantages et les inconvénients d'un tel choix technologique ?

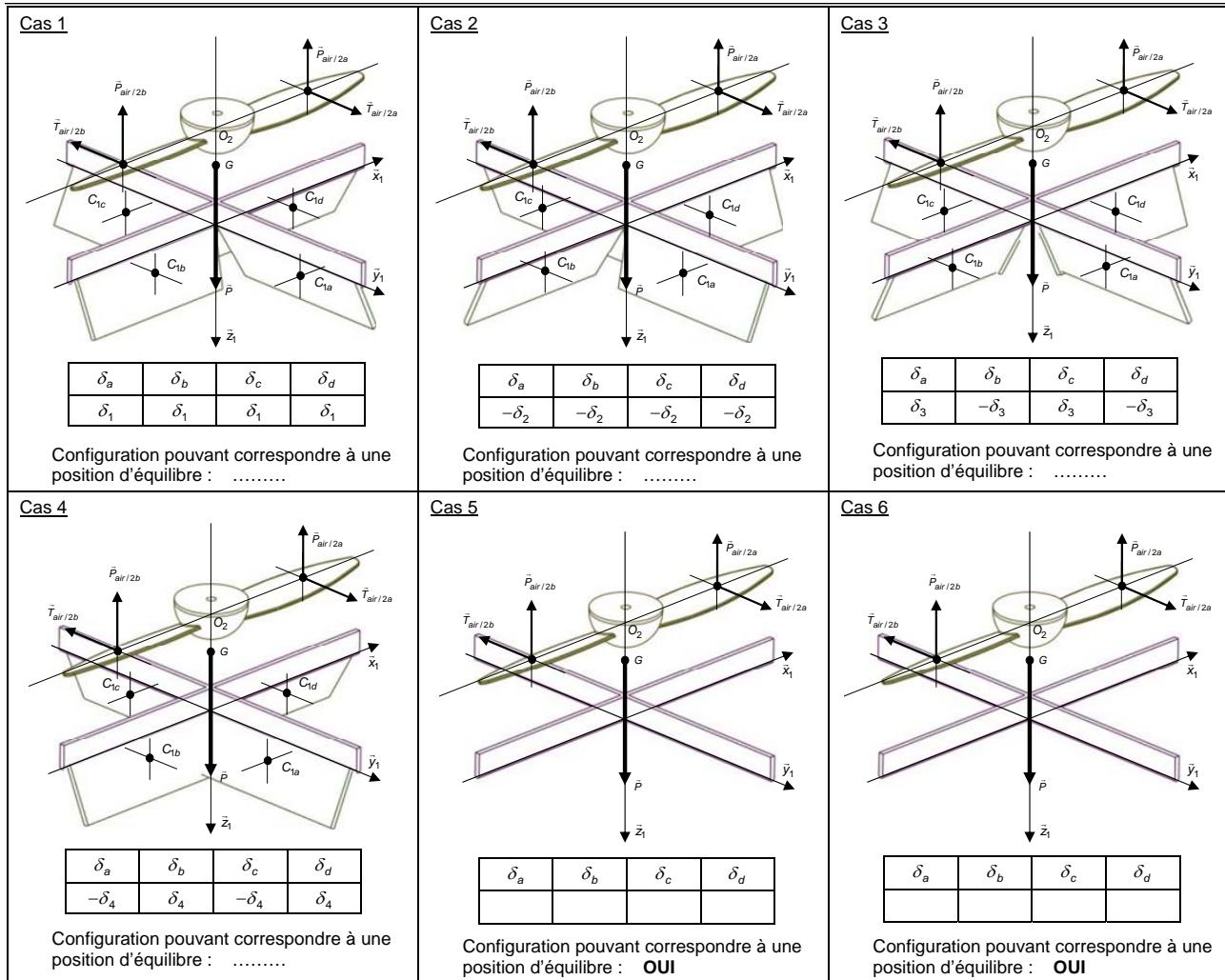


FIGURE 4 : Tableau des configurations

TD 5 – Étude d'un frein de train TGV¹



FIGURE 1 : Rame de TGV Duplex

Pour satisfaire la croissance de la demande de ses usagers, la SNCF a besoin d'augmenter le nombre des passagers transportés sur les lignes TGV existantes. Pour y répondre, les constructeurs ont réalisé des voitures à deux étages, les TGV duplex (voir FIGURE 1), qui permettent d'accueillir plus de passagers par rame. Parallèlement, ils souhaitent en augmenter la vitesse et la fréquence d'utilisation. Mais ces solutions sont limitées par la distance d'arrêt car il ne faut pas percuter la rame précédente, brutalement immobilisée. Cette évidente condition de sécurité place les dispositifs de freinage au cœur des travaux d'innovation des ingénieurs.

L'objet de cette étude est l'analyse du système de freinage mécanique à énergie pneumatique, installé sur les TGV Duplex dans le cas d'utilisation suivant « le conducteur actionne le système de freinage pour ne pas percuter une autre rame ».

Critère	Valeur
Distance d'arrêt de la rame	$D_a < 2\ 500\ m$

Une rame de TGV (FIGURE 1) est composée de deux motrices et de huit voitures. La liaison avec les rails est assurée par 13 bogies. Quatre d'entre eux, implantés sous les motrices, sont moteurs, les neuf autres, qualifiés de porteurs, sont positionnés entre deux voitures (FIGURE 2).

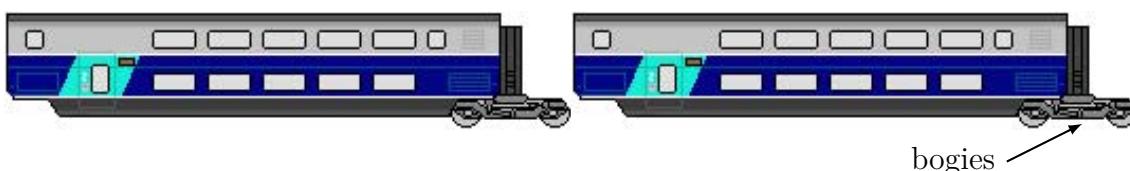


FIGURE 2 : Implantation des bogies

Pour l'étude proposée tous les bogies ont le même comportement.

1. adapté du concours Centrale PSI 2006

Un bogie porteur, dont une photo est donnée FIGURE 3, est un chariot à deux essieux et quatre roues. Il supporte en sa partie supérieure l'une des extrémités de la voiture et permet de suivre les courbes de la voie. Chacune des roues est équipée d'un système de freinage à disques et contribue à l'arrêt de la voiture. Dans cette étude, la masse de la rame, estimée à 424 000 kg, est supposée également répartie sur chacune des roues. **Cette hypothèse permet de limiter l'étude à une roue, ses deux disques et les composants associés.**



FIGURE 3 : Bogie porteur

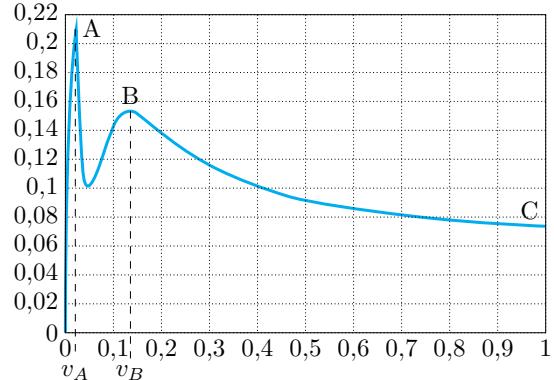


FIGURE 4 : Évolution du coefficient de frottement en fonction du glissement relatif

Le blocage des roues du train, appelé enrayage, n'est pas souhaitable. Il déforme les roues et les rails, il conduit presque inévitablement au déraillement. De plus, de nombreuses études du comportement de la liaison « roue-rail » ont mis en évidence que le rapport du module de la composante horizontale sur le module de la composante verticale de l'action du rail sur la roue, appelé facteur de freinage et noté ν , est fonction du glissement au contact. Ce résultat, spécifique aux phases d'accélération et de freinage, s'explique par la déformation élastique de la matière au contact roue/rail et à son échauffement. La FIGURE 4 donne l'évolution de ν en fonction du glissement relatif au contact.

La modélisation des actions mécaniques sur une roue est donnée sur la FIGURE 5. Le rayon de la roue est noté r .

La roue est soumise à trois actions mécaniques :

- l'action mécanique du bogie sur la roue en G_1 due à la liaison pivot est de la forme : $\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = X \vec{x}_0 + Y \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1}$ avec $Y = -Mg$ et M la masse freinée par une roue.
- l'action mécanique du frein sur la roue modélisation par un couple sur l'axe de rotation de la roue en G_1 : $\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{0} \\ C_{ft} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{G_1}$
- l'action mécanique du rail sur la roue de contact est modélisée par un glisseur en I_1 . On suppose que le contact suit les lois de Coulomb.

Le poids de la roue est négligé devant les autres actions mécaniques. On utilise les valeurs numériques suivantes : $M=8\ 200$ kg, $g = 10\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $r = 0,45$ m.

Q1. En supposant que la roue est en équilibre, c'est-à-dire que la somme des 3 actions mécaniques en G_1 est nulle, déterminer le moment transmissible maximum de l'action du rail sur

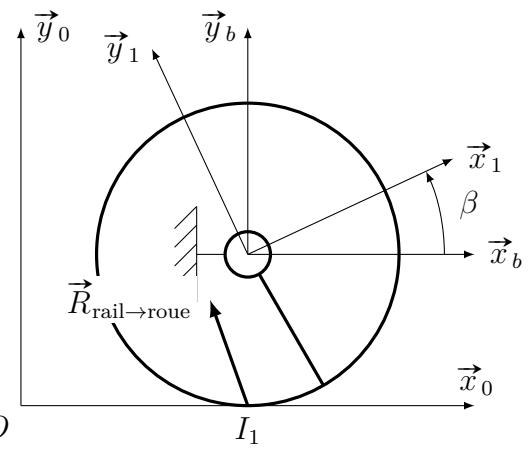


FIGURE 5 : Modélisation des actions mécaniques

la roue sur l'axe (G_1, \vec{z}). Faire l'application numériques lorsque le point de fonctionnement se situe au point B de la caractéristique de la FIGURE 4.

Chaque roue est freinée par 2 disques sur lesquels sont appliquées des garnitures (ou plaquettes de frein) pour ralentir la rotation de la roue (voir FIGURE 6).

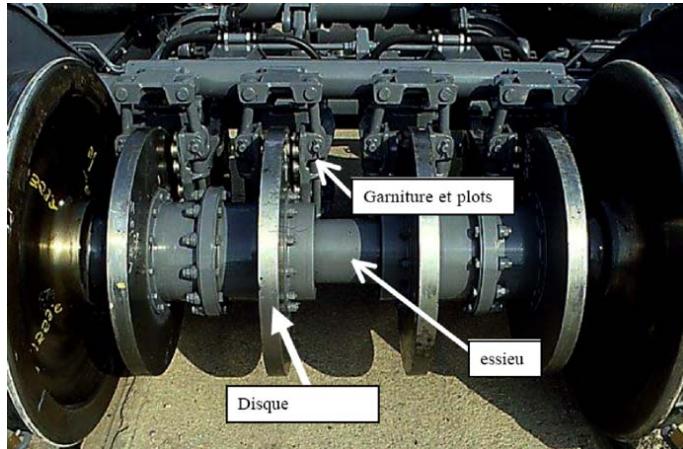


FIGURE 6 : Implantation du système de freinage

Q2. En déduire, l'action mécanique des garnitures sur un seul disque.

Les 4 disques de frein qui équipent chaque essieu du TGV duplex sont conçus sous forme de galettes de 45 mm d'épaisseur, en acier allié. Leur diamètre extérieur est de 640 mm. En cours de freinage, chaque surface du disque reçoit un flux de chaleur égal, uniformément réparti entre les diamètres 310 mm et 610 mm. Chaque disque est en contact avec deux garnitures modélisées chacune par un secteur, de longueur radiale $R_2 - R_1 = 150$ mm et d'angle $\alpha = \theta_2 - \theta_1 = 50^\circ$.

Le cahier des charges indique que la force maximale produite par le vérin pour chaque disque est de 29 kN.

Le modèle retenu est donné sur la FIGURE 7. Le facteur de frottement de la garniture sur le disque est noté f_2 égal à 0,282 et la pression de contact entre la garniture et le disque p . Pour que l'usure de la garniture soit régulière sur la surface de contact, il faut que pour chaque élément de surface ds le produit $p\rho$ reste constant. ρ est la distance radiale de l'élément ds .

On considère que le disque tourne dans le sens horaire, afin d'obtenir un couple de freinage positif.

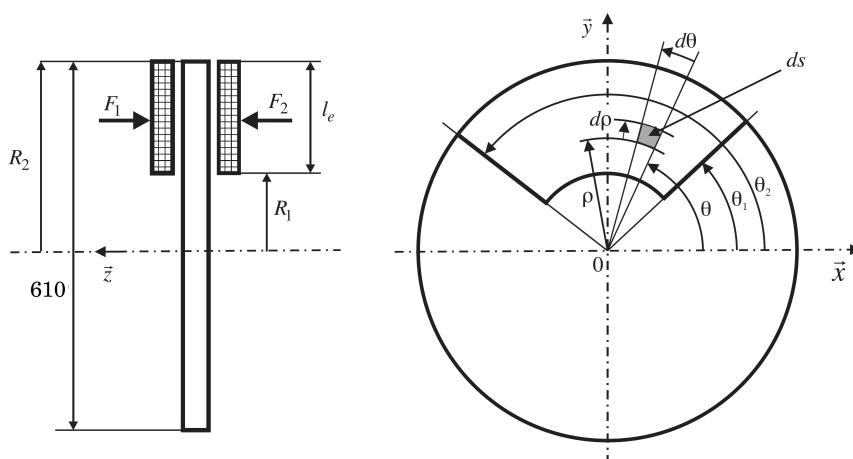


FIGURE 7 : Paramétrage de la zone de contact

Q3. Donner le torseur d'action mécanique local sur l'élément de surface ds des garnitures sur le disque. En déduire le torseur d'action mécanique local en O .

Q4. En déduire l'expression du couple de freinage C_f sur chaque disque en fonction de f_2 , $p\rho$, α , R_1 et R_2 (attention $p\rho$ est constant dans le calcul d'intégrale !)

À partir de cette expression et de la valeur obtenue pour le couple transmissible de la question 2, il est possible de déterminer la valeur de $p\rho = 1,63 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Q5. Calculer la valeur de F_1 ou F_2 (l'expression de la force qui doit être appliquée sur la garniture pour obtenir C_f) en fonction de $p\rho$, α , R_1 et R_2 .

Q6. Sachant que F_1 est égale à l'effort dans le vérin, le cahier des charges est-il respecté ?

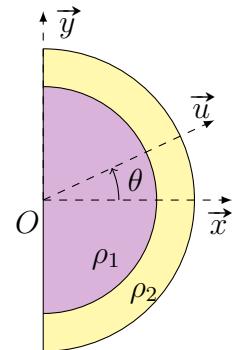
Remarque : Il existe sur le TGV d'autres dispositifs de freinage, notamment :

- le frein rhéostatique qui consiste à faire fonctionner les moteurs en générateurs, et à charger le générateur en lui faisant fournir de l'énergie à un récepteur (réseau ou résistances) ;
- le frein à courants de Foucault, en utilisant les courants induits sur un disque ou sur le rail.

Sujet Kholle 1 – Demi-disque

Solide homogène

Soit un demi-disque de rayon R_1 et rayon R_2 extérieur, de centre O et de masse surfacique ρ_1 pour le disque intérieur et ρ_2 pour la couronne extérieure. On pose $\vec{g} = -g\vec{y}$ l'accélération de pesanteur.



Q1. Déterminer en O le torseur des actions mécaniques exercées par la pesanteur sur le demi-disque intérieur 1.

Q2. Déterminer en O le torseur des actions mécaniques exercées par la pesanteur sur la demi-couronne 2.

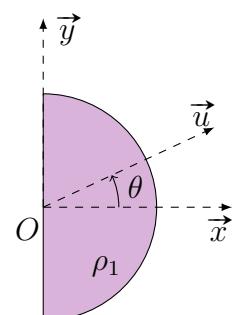
Q3. En déduire le torseur en O des actions mécaniques exercées par la pesanteur sur l'ensemble $\Sigma = \{1, 2\}$.

Q4. Déterminer la position du centre de gravité de Σ .

Solide non homogène

On ne considère maintenant que le demi-disque intérieur 1. La masse surfacique est désormais variable, d'après l'équation suivante :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 + \frac{r}{R_1}\right)$$



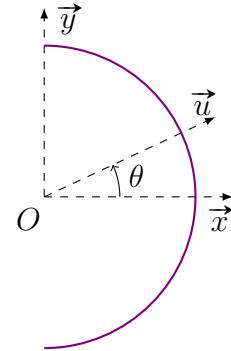
Q5. Déterminer en O le torseur des actions mécaniques exercées par la pesanteur sur le demi-disque intérieur 1.

Q6. Déterminer la position du centre de gravité.

Sujet Kholle 2 – Demi-circonférence

Solide homogène

Soit une demi-circonférence de rayon R , de centre O et de masse linéique ρ . On pose $\vec{g} = -g\vec{y}$ l'accélération de pesanteur.



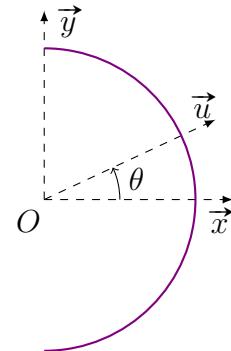
Q1. Déterminer en O le torseur des actions mécaniques exercées par la pesanteur sur la demi-circonférence.

Q2. Déterminer la position du centre de gravité.

Solide non homogène

On considère maintenant que la masse linéique de la demi-circonférence n'est plus constante. On donne l'expression suivante :

$$\rho(\theta) = \rho_0 (1 + \cos \theta)$$



Q3. Déterminer en O le torseur des actions mécaniques exercées par la pesanteur sur la demi-circonférence.

Q4. Déterminer la position du centre de gravité.

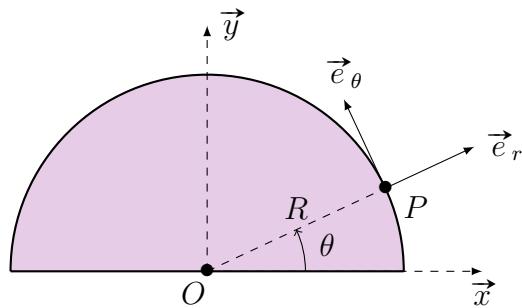
Sujet Kholle 3 – Clapet anti-retour

Présentation

Un clapet anti-retour est un dispositif installé sur une tuyauterie qui permet de contrôler le sens de circulation d'un fluide quelconque. Le liquide, le gaz, l'air comprimé, ... peut passer dans un sens mais le flux est bloqué si celui-ci vient à s'inverser.



Modélisation



Travail demandé

Q1. Déterminer la résultante \vec{R}_p de l'action de la pression sur le demi-disque en fonction de R et p .

Q2. Déterminer les coordonnées du point G où le moment de l'action de la pression est nulle en fonction de R

Q3. En déduire le torseur $\{\mathcal{T}_{f \rightarrow c}\}$ de l'action de la pression sur le clapet en G .

Q4. En déduire le torseur $\{\mathcal{T}_{f \rightarrow c}\}$ de l'action de la pression sur le clapet en O .

Un ressort de torsion génère un couple résistant C autour de l'axe (O, \vec{x}) .

Q5. Donner l'expression du couple C maximum pour que l'ouverture du clapet soit possible, en fonction de la pression du fluide p et de R .

On donne les valeurs suivantes, issues du cahier des charges : $p = 1 \text{ bar}$ et $R = 50 \text{ mm}$.

Q6. Déterminer le couple C à appliquer sur les plaques afin respecter le cahier des charges