

*Carnot*



MPSI – PCSI

# Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Séquence 8

**Statique – Principe Fondamental de la Statique**

- A** Analyser
- A2** Définir les frontières de l'analyse
- A2-01** Isoler un système et justifier l'isolement
- A2-02** Définir les éléments influents du milieu extérieur
- A4** Caractériser des écarts
- A4-09** Vérifier la cohérence du modèle choisi avec les valeurs souhaitées du cahier des charges
- A5** Apprécier la pertinence et la validité des résultats
- A5-01** Utiliser des symboles et des unités adéquates
- A5-02** Vérifier l'homogénéité des résultats
- C** Résoudre
- C1** Proposer une démarche de résolution
- C1-02** Proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison
- C2** Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique
- C2-15** Déterminer le calcul complet des inconnues de liaison
- C2-16** Déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre (par exemple l'arc-boutement)
- F** Communiquer
- F1** Rechercher et traiter des informations
- F1-06** Lire et décoder un schéma

# Table des matières

<b>Cours</b>	<b>0</b>	
I	Équilibre des systèmes de solides . . . . .	1
I.1	Équilibre d'un système matériel . . . . .	1
I.2	Référentiel galiléen . . . . .	1
I.3	Isolement d'un système matériel . . . . .	2
I.4	Principe fondamental de la statique (PFS) . . . . .	3
I.5	Théorème des actions réciproques . . . . .	4
II	Quelques isolements particuliers . . . . .	5
II.1	Système soumis à deux forces . . . . .	5
II.2	Système soumis à trois forces . . . . .	6
III	Méthodes de résolution . . . . .	6
III.1	Méthode systématique . . . . .	6
III.2	Méthode intuitive – Stratégie de résolution . . . . .	7
 <b>TDs</b>	 <b>9</b>	
TD 1	9	
TD 2	12	
TD 3	14	
TD 4	16	
TD 5	19	
 <b>Kholles</b>	 <b>21</b>	
Kholle 1	21	
Kholle 2	23	
Kholle 3	25	
Kholle 4	26	

## Objectif

*L'objectif de ce chapitre est de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons et celles générées par les actionneurs en vue de leur dimensionnement.*

# I Équilibre des systèmes de solides

La statique est l'étude des actions mécaniques sur des systèmes matériels en équilibre par rapport à un référentiel galiléen. Il convient donc de définir ces deux notions.

## I.1 Équilibre d'un système matériel

Un système matériel  $\Sigma$  est en équilibre par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}_f$  (référentiel = repère + notion de temps), si chaque point de ce système matériel  $\Sigma$  conserve une position fixe par rapport à ce référentiel  $\mathcal{R}_f$  à tout instant.

Dans le cas particulier d'un seul solide  $S$ , celui-ci est en équilibre par rapport à ce référentiel  $\mathcal{R}_f$ , s'il reste immobile par rapport à ce référentiel  $\mathcal{R}_f$  à tout instant.

Remarque : Les notions d'équilibres stable, instable ou indifférent seront précisées dans le cours de deuxième année. La figure 1 permet déjà d'illustrer cette notion.

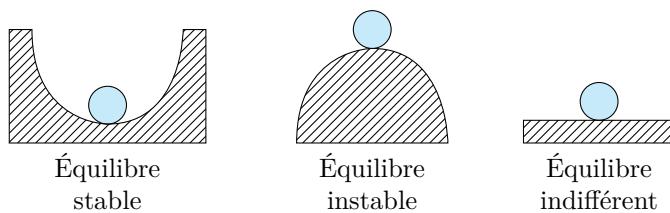


FIGURE 1 : Différents cas d'équilibre

Lorsque le système matériel  $\Sigma$  est constitué de plusieurs solides indéformables, ce système est dit en équilibre par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_f$  si tout solide reste fixe par rapport à ce repère  $\mathcal{R}_f$ . Cette condition est vérifiée si les paramètres qui définissent la position des solides par rapport à  $\mathcal{R}_f$  sont constants au cours du temps.

## I.2 Référentiel galiléen

### Rappel : vu en Sciences Physiques en Terminale

Soit  $M$  une particule isolée, sur laquelle ne s'applique aucune action mécanique, de masse  $m$  et dont le vecteur vitesse par rapport à un repère  $\mathcal{R}$  est noté  $\vec{V}$ .

La quantité de mouvement de cette particule par rapport à ce repère  $\mathcal{R}$  est définie par le produit de ces deux grandeurs :  $m \cdot \vec{V}$ .

Galilée a postulé l'existence d'un référentiel  $\mathcal{R}_g$  pour lequel la quantité de mouvement par rapport à ce repère  $\mathcal{R}_g$  est constante quels que soient sa position, sa vitesse et le temps. Un tel référentiel est dit Galiléen.

Cette relation prend le nom de Principe Fondamental de la Dynamique. Elle s'écrit :

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} = m \vec{a}_M.$$

**Référentiel galiléen** : un référentiel, dans lequel un système isolé ne subissant aucune action mécanique est immobile ou animé d'un mouvement de translation uniforme au cours du temps, est dit « galiléen ».

Remarque : Un référentiel galiléen n'existe pas. Il n'en existe que des approximations plus ou moins exactes dans lesquelles le principe fondamental donne des résultats satisfaisants.

Remarque : Pour des applications industrielles, la Terre est un bon référentiel galiléen.

## I.3 Isolement d'un système matériel

### I.3.1 Frontière d'isolation

On considère un ensemble matériel  $\Sigma$  quelconque (ensemble de solides, solide seul...). On délimite l'ensemble  $\Sigma$  par une frontière. Tout ce qui est en dehors de cette frontière est appelé « milieu extérieur de  $\Sigma$  » et est noté  $\bar{\Sigma}$ .

La définition de la frontière d'isolation est indispensable avant toute étude, elle permet d'identifier les actions mécaniques s'exerçant sur le système considéré.

**On n'isole jamais le bâti!!!!**

En effet, le bâti étant le référentiel galiléen, à l'échelle du système industriel étudié, il est très difficile de connaître les actions qui s'exercent sur celui-ci.

### I.3.2 Inventaire des actions mécaniques

Le milieu extérieur  $\bar{\Sigma}$  agit sur l'ensemble  $\Sigma$  (ensemble isolé par une frontière) : action de contact ou à distance...

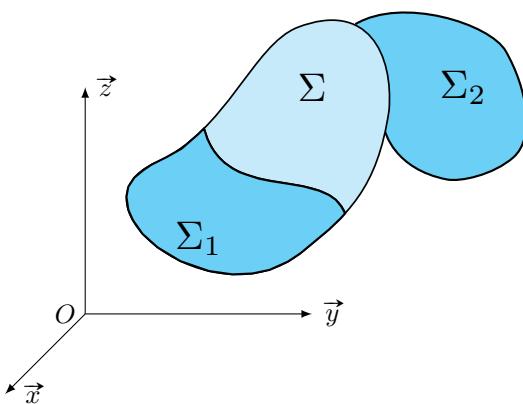
On note  $\{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\}$  l'ensemble des actions mécaniques extérieures agissant sur  $\Sigma$ . Plusieurs cas peuvent alors se présenter :

- Si deux milieux  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  disjoints agissent sur  $\Sigma$  ( $\bar{\Sigma} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ), alors (FIGURE 2(a)) :

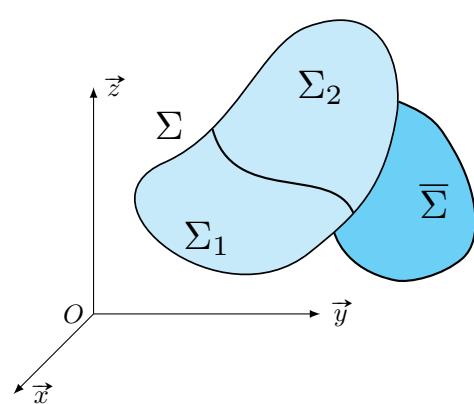
$$\{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \{\mathcal{T}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma}\} + \{\mathcal{T}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma}\}.$$

- Si  $\Sigma$  est constitué de deux éléments  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  ( $\Sigma$  est partitionné) alors (FIGURE 2(b)) :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma_1}\} + \{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma_2}\}.$$



(a) Deux systèmes matériels  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  agissent sur  $\Sigma$ .



(b) Deux systèmes matériels  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  agissent sur  $\bar{\Sigma}$ .

FIGURE 2 : Isolements

Pour déterminer les actions mécaniques extérieures, on extrait l'ensemble isolé et on recense pour chaque solide :

- les actions mécaniques de contact **avec l'extérieur** ;
- les actions mécaniques à distance exercées **par l'extérieur**.

On parle d'**inventaire des actions mécaniques extérieures** (IAME).

Remarque : Les actions mécaniques intérieures à un système matériel  $\Sigma$  sont l'ensemble des actions mécaniques mutuelles entre les différents sous ensembles de  $\Sigma$ . Elles n'interviennent pas dans ce bilan.

Les propriétés précédentes sont utilisées pour sommer les torseurs d'actions mécaniques une fois l'inventaire des actions mécaniques extérieures réalisé.

### I.3.3 Du graphe des liaisons au graphe de structure

Le graphe de liaisons permet de visualiser le ou les isolement(s) à réaliser et permet de rendre systématique la recherche des actions mécaniques extérieures.

Le graphe de structure correspond au graphe des liaisons auquel on ajoute les actions mécaniques à distance qui s'applique sur chaque solide, les actions des ressorts, des moteurs, etc ... (1 trait pour les forces, deux traits pour les couples).

Le bâti (pièce de référence) est toujours bien repéré pour ne pas l'isoler (voir FIGURE 3).

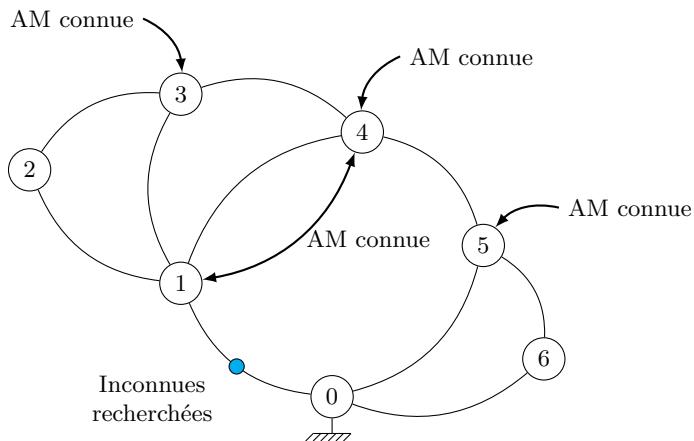


FIGURE 3 : Graphe de structure type d'un système dont certaines inconnues d'actions mécaniques dans les liaisons sont recherchées

Remarque : Il est important de repérer si l'action mécanique est interne à un mécanisme.

- un ressort exerce une action mécanique entre deux solides ;
- un fluide exerce une action entre deux solides ;
- dans un moteur constitué d'un rotor et d'un stator, l'effet magnétique génère un couple sur le rotor et le couple opposé sur le stator, on a donc bien une action mécanique entre deux solides.

Par contre, la pesanteur est bien une action extérieure à chaque solide.

## I.4 Principe fondamental de la statique (PFS)

### I.4.1 Énoncé

**Principe fondamental de la statique (PFS) :**

Si un système mécanique  $\Sigma$  est en équilibre dans un référentiel galiléen, alors, la somme des actions mécaniques de l'extérieur sur  $\Sigma$  est nulle :  $\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}\} = \{0\}$ .

Il est important de bien voir que le PFS est une implication (Si ... alors ...). Les deux exemples suivants correspondent à des cas où le PFS n'est pas vrai.

- Pour un moteur électrique en régime permanent, la vitesse angulaire de l'arbre du moteur par rapport au châssis est non nulle et pourtant les actions mécaniques sur le rotor se compensent (le couple moteur compense exactement le couple résistant. Si ce n'était pas le cas, la vitesse angulaire du moteur évoluerait). La somme des actions mécaniques est nulle, mais le système n'étant pas initialement au repos, il ne peut être en équilibre.
- Dans le cas d'une paire de ciseaux dont les deux lames sont en position ouverte, en appliquant deux forces colinéaires, de même amplitude mais de sens opposés sur chaque branche, celles-ci se ferment. La somme des actions mécaniques vaut bien zéro mais le système n'est pas en équilibre !

#### I.4.2 Et le principe fondamental de la dynamique alors ?

Le PFS est un cas particulier du principe fondamental de la dynamique PFD (cf. deuxième année). Celui-ci s'énonce de la manière suivante : il existe au moins un référentiel, appelé référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , tel que pour tout système matériel  $\Sigma$  :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}\} = \{\mathcal{D}_{\Sigma / \mathcal{R}_g}\}.$$

Le torseur de droite est appelé torseur dynamique et fait intervenir les quantités cinématiques, vitesses linéaires et angulaires, ainsi que les quantités de masse (cinétique).

#### I.4.3 Résolution d'un problème de statique

Il n'est pas toujours nécessaire, pour résoudre un problème de statique, de vérifier l'ensemble du PFS. En effet, l'écriture torsorielle revient à poser deux équations vectorielles :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma} \\ \vec{M}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}(A) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

- l'équation de résultante statique :  $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma} = \vec{0}$ ;
- l'équation du moment statique en un point :  $\vec{M}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}(A) = \vec{0}$ .

On parle de **théorème de la résultante statique** et de **théorème du moment statique en un point donné**.

On obtient ainsi 6 équations scalaires.

### I.5 Théorème des actions réciproques

#### Théorème des actions réciproques :

Si un système matériel  $\Sigma_2$  applique une action mécanique sur  $\Sigma_1$ , notée  $\{\mathcal{T}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1}\}$ , alors réciproquement,  $\Sigma_1$  applique l'action opposée sur  $\Sigma_2$ .

$$\{\mathcal{T}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1}\} = -\{\mathcal{T}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2}\}.$$

Démonstration :

Soit  $\Sigma$  l'union de deux systèmes matériels  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .

En appliquant le PFS à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  :

$$\left\{ \mathcal{T}_{\bar{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma_1} \right\} = \{0\} \quad \text{et} \quad \left\{ \mathcal{T}_{\bar{\Sigma}_2 \rightarrow \Sigma_2} \right\} = \{0\}$$

En additionnant les deux équations :

$$\left( \left\{ \mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma_1} \right\} + \left\{ \mathcal{T}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1} \right\} \right) + \left( \left\{ \mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma_2} \right\} + \left\{ \mathcal{T}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2} \right\} \right) = \{0\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma} \right\} + \left\{ \mathcal{T}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1} \right\} + \left\{ \mathcal{T}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2} \right\} = \{0\}$$

Sachant que le PFS appliqué à  $\Sigma$  conduit à :

$$\left\{ \mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma} \right\} = \{0\} \Rightarrow \left\{ \mathcal{T}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1} \right\} = - \left\{ \mathcal{T}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2} \right\}$$

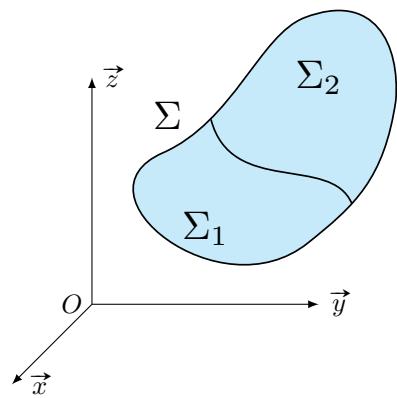


FIGURE 4 : Deux systèmes matériels  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  à l'équilibre

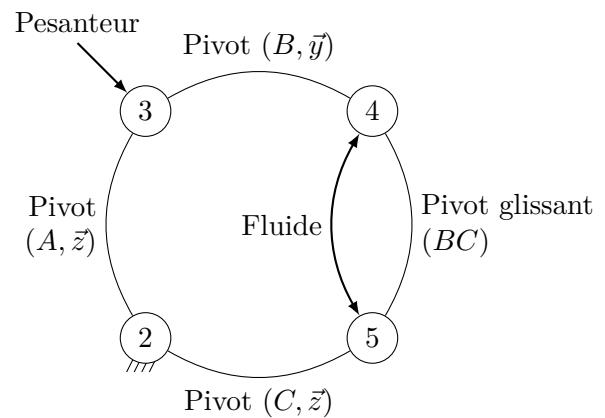
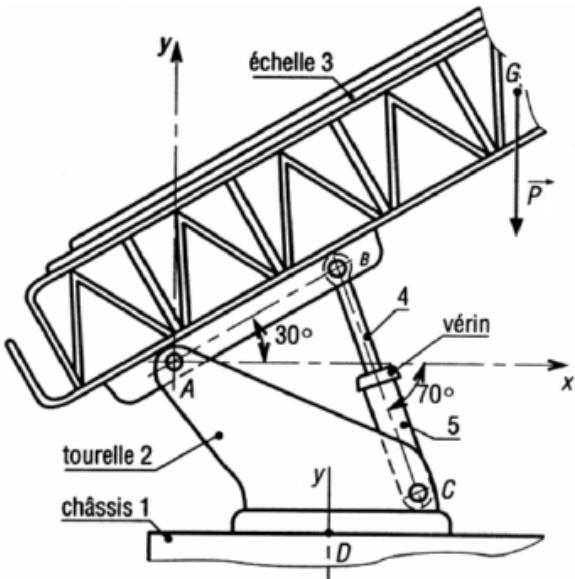
## II Quelques isolements particuliers

Il s'agit d'étudier l'équilibre de système soumis à deux ou trois forces (glisseurs).

Dans de nombreuses situations, une étude plane des actions mécaniques peut être menée.

Dans ces conditions, les actions mécaniques dans les liaisons ponctuelles ou pivot sont des glisseurs.

**Exemple sur une échelle de pompier :**



### II.1 Système soumis à deux forces

Si un système matériel est en équilibre sous l'action de deux forces  $\vec{F}_B$  en  $B$  et  $\vec{F}_C$  en  $C$ , les deux forces sont opposées et ont pour droite support la droite  $(BC)$ .

*Exemple : en isolant l'ensemble  $\{4 + 5\}$  en modélisation plane (de normale  $\vec{z}$ ).*

Démonstration :

L'application du principe fondamental de la statique conduit à :

— équation de résultante :  $\vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0}$  ;

— équation de moment en A :  $\vec{0} + \vec{BC} \wedge \vec{F}_C = \vec{0}$ .

Le support de  $\vec{F}_C$  est la droite  $(BC)$  et  $\vec{F}_B = -\vec{F}_C$ .

Remarque : Il peut être intéressant de commencer par isoler les ensembles de solides soumis à deux forces car le support de ces forces peut alors être immédiatement identifié.

## II.2 Système soumis à trois forces

Si un système matériel est en équilibre sous l'action de trois forces  $\vec{F}_A$  en  $A$ ,  $\vec{F}_B$  en  $B$  et  $\vec{F}_G$  en  $G$ , ces forces sont coplanaires, concourantes ou parallèles et leur somme vectorielle nulle.

Exemple : en isolant l'ensemble {3} en modélisation plane.

### Démonstration :

L'application du principe fondamental de la statique conduit à :

- équation de résultante :  $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_G = \vec{0}$ .
- équation de moment en  $G$  :  $\vec{GA} \wedge \vec{F}_A + \vec{GB} \wedge \vec{F}_B + \vec{GG} \wedge \vec{F}_G = \vec{0}$ .
- Ce qui s'écrit :  $\underbrace{\vec{GA} \wedge \vec{F}_A}_{\vec{V}} + \underbrace{\vec{GB} \wedge \vec{F}_B}_{\vec{W}} = \vec{0}$ . Donc :  $\vec{V} = -\vec{W}$ .

Par propriété du produit vectoriel,  $\vec{V}$  est  $\perp$  au plan  $(\vec{F}_A, A, G)$  mais également au plan  $(\vec{F}_B, B, G)$  (car  $\vec{V} = -\vec{W}$ ). Les deux plans  $(\vec{F}_A, A, G)$  et  $(\vec{F}_B, B, G)$  sont donc parallèles et, comme ils possèdent un point commun  $C$ , ils sont confondus. Les forces  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  appartiennent donc au plan  $(A, B, G)$  et comme  $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_G = \vec{0}$ , les trois forces sont coplanaires au plan  $(A, B, G)$ .

Deux cas sont à étudiés :

- Deux de ces forces ( $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$ ) sont sécantes en un point  $I$ , cela conduit à l'équation :  $\underbrace{\vec{IA} \wedge \vec{F}_A}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{IB} \wedge \vec{F}_B}_{\vec{0}} + \vec{IG} \wedge \vec{F}_G = \vec{0}$   
Le support de  $\vec{F}_G$  passe donc également par le point  $I$ . Les trois forces sont concourantes et leur somme vectorielle est nulle.
- Deux de ces forces ( $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$ ) sont parallèles, alors la troisième force  $\vec{F}_G$  est parallèle aux deux premières car :  $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_G = \vec{0}$ . Elles doivent encore vérifier que la somme des moments est nulle.

## III Méthodes de résolution

Soit un système constitué de plusieurs solides en liaison et soumis à des actions mécaniques extérieures. L'objectif d'une étude de statique des solides est de déterminer les équations liant les actions mécaniques s'exerçant sur chaque solide. Plusieurs types de problèmes peuvent alors être posés :

- dimensionner le mécanisme, c'est-à-dire déterminer si les liaisons vont résister. On souhaite donc connaître toutes les actions mécanique dans les liaisons ainsi que les actions mécaniques extérieures inconnues ;
- seules les actions mécaniques extérieures sont recherchées en fonction d'actions mécaniques connues.

### III.1 Méthode systématique

La méthode systématique consiste à isoler chaque solide individuellement de façon à écrire la totalité des équations disponibles. Cette méthode est celle qui a été employée dans l'exemple précédent du micro-compresseur : toutes les équations ont été écrites. C'est aussi la méthode

utilisée dans les logiciels de simulation numérique. Pour chaque isolement, la démarche est la même :

- ① Isoler chaque solide sauf le bâti ;
- ② Établir l'inventaire des actions mécaniques extérieures (IAME) : ce point est particulièrement attendu dans la rédaction d'un isolement (et donc obligatoire) ;
- ③ Écrire le PFS pour chaque solide ;
- ④ Réduire en un point quelconque (mais bien choisi) les torseurs d'actions mécaniques ;
- ⑤ Projeter sur une base quelconque (mais bien choisie) pour obtenir un système d'équations scalaires à résoudre.

**Attention** : Cette méthode est systématique mais très longue puisqu'il faut tout écrire pour résoudre. Elle n'est à utiliser que si l'énoncé demande explicitement de tout trouver !

Avant même de commencer la résolution, il est possible d'établir un premier bilan du nombre d'équations et d'inconnues du système :

- $6 \times N_S$  équations scalaires ( $N_S$  : nombre de solides qu'il est possible d'isoler) en 3 dimensions ou  $3 \times N_S$  en modélisation plane ;
- $I_s$  inconnues ( $I_s$  : nombre d'inconnues dans les torseurs d'actions mécaniques).

Si  $I_s \leq 6 \times N_S$  (ou  $3 \times N_S$ ) alors peut être que le problème possède une solution. En classe de PSI, l'étude de la théorie des mécanismes permettra de savoir à coup sur si la résolution est possible.

*Exemple : Micro-compresseur :*

*Le micro-compresseur comporte 4 solides dont le bâti, soit 3 solides « isolables ». L'isolement des 3 solides conduit à 3 équations torsorielles (PFS), soit 6 équations vectorielles et 18 équations scalaires (2 équations vectorielles qui donnent 6 équations scalaires par PFS).*

*Parmi les 18 équations, la résolution montre deux équations non utilisables (aboutissant à  $0 = 0$ ). Une dans l'isolement de la bielle (2) (équation de moment suivant  $(A, \vec{y}_2)$ ) et une dans l'isolement du piston (3) (équation de moment suivant  $(B, \vec{y}_0)$ ). Ces deux équations non utilisables correspondent aux mobilités internes : une rotation de la bielle sur elle-même suivant  $(A, \vec{y}_2)$  et une rotation du piston sur lui-même suivant  $(B, \vec{y}_0)$ .*

*Le bilan des équations disponibles est donc de  $18 - 2 = 16$ .*

*Le bilan des inconnues des torseurs d'actions mécaniques s'établit à  $I_s = 16$  inconnues ( $5 + 4 + 3 + 3 + 1$ ).*

*Il y a autant d'inconnues que d'équations donc le système peut être résolu (on dit que le modèle est isostatique).*

## III.2 Méthode intuitive – Stratégie de résolution

Une méthode plus intuitive peut être très efficace pour celui qui possède une vision plus fine du système, car bien souvent, il n'est pas nécessaire de déterminer la totalité des inconnues.

Lorsque seules quelques inconnues d'actions mécaniques sont recherchées, il faut écrire le minimum d'équations permettant de relier ces inconnues aux données, autant que possible sans faire intervenir les inconnues non recherchées.

Il s'agit alors d'analyser les actions mécaniques dans le mécanisme à partir des mouvements permis par les liaisons (mobilités qui annulent certaines composantes d'efforts dans les liaisons) et d'identifier les efforts qui *travaillent*.

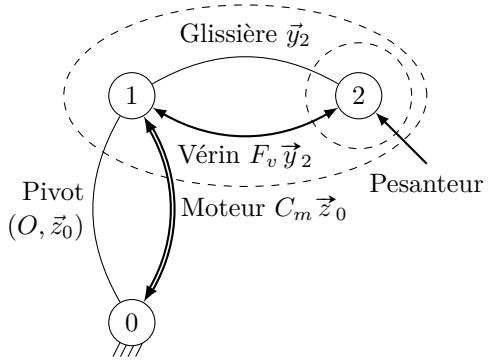


FIGURE 5 : Exemple d'une chaîne ouverte

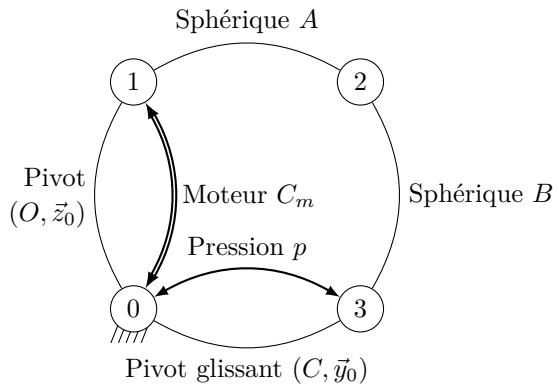


FIGURE 6 : Chaîne fermée du micro-compresseur

Il n'y a rien de systématique par cette méthode mais deux points sont à retenir pour élaborer une stratégie de résolution :

- repérer rapidement les solides soumis à deux forces : leur isolement doit pouvoir conduire à des simplifications utiles sur les actions mécaniques, identifiables sans même écrire le PFS (voir II.1) ;
- suivant le type de chaîne
  - pour une chaîne fermée, dans le cas des liaisons avec le bâti, écrire les équations de PFS sur les mobilités de ces liaisons permet de déterminer comment les efforts se transmettent dans le mécanisme ;
  - pour une chaîne ouverte, l'isolement de l'ensemble des solides allant de la partie ouverte du mécanisme jusqu'à l'actionneur que l'on souhaite dimensionner, permettra de déterminer le résultat en une seule équation.

*Exemple : pour la chaîne ouverte de la FIGURE 5,*

- l'isolement de {1+2} permet de déterminer le couple moteur  $C_m$  par utilisation de l'équation du moment statique statique au point  $O$  en projection sur l'axe  $\vec{z}_0$  ;
- l'isolement de {2} permet de déterminer la force dans le vérin  $F_v$  par utilisation de l'équation de la résultante statique en projection sur l'axe  $\vec{y}_2$ .

*Exemple : pour la chaîne fermée du micro-compresseur*

*Dans le cas du micro-compresseur, si l'unique inconnue recherchée est le couple moteur permettant de comprimer le fluide à 8 bar dans la chambre supérieure, il n'est pas nécessaire d'écrire toutes les équations.*

- La bielle (2) étant soumise à deux forces, il est possible de déduire sans calcul que ces forces sont égales en norme et colinéaires à  $\vec{y}_2$  (voir II.1). Elles s'expriment donc toutes les deux en fonction d'une unique variable  $T$  (qui correspond à la norme de chacune des forces) ;
- Le piston (3) étant en liaison pivot glissant d'axe  $(B, \vec{y}_0)$  avec le bâti, seules les équations de moment et résultante suivant  $\vec{y}_0$  ne font pas intervenir d'inconnue de liaison de (0) sur (3). La force  $T$  et la pression  $p$  travaillent uniquement dans le mouvement de translation suivant  $\vec{y}_0$  (et pas dans le mouvement de rotation d'axe vertical  $(B, \vec{y}_0)$ ), il faut donc isoler le piston (3) et écrire l'équation de la résultante statique projetée sur  $\vec{y}_0$  pour déterminer  $T$  en fonction de la pression  $p$  ;
- Pour trouver la relation entre le couple moteur  $C_m$  qui s'applique sur l'arbre (1) et la norme  $T$  de l'action mécanique de (2) sur (1), il faut donc isoler l'arbre (1) et utiliser l'équation du moment statique (car on cherche une relation sur le couple  $C_m$ ). On utilise alors la mobilité de la liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$ , soit donc le théorème du moment statique écrit au point  $O$  en projection sur  $\vec{z}_0$  qui donnera la relation entre  $C_m$  et  $T$ .

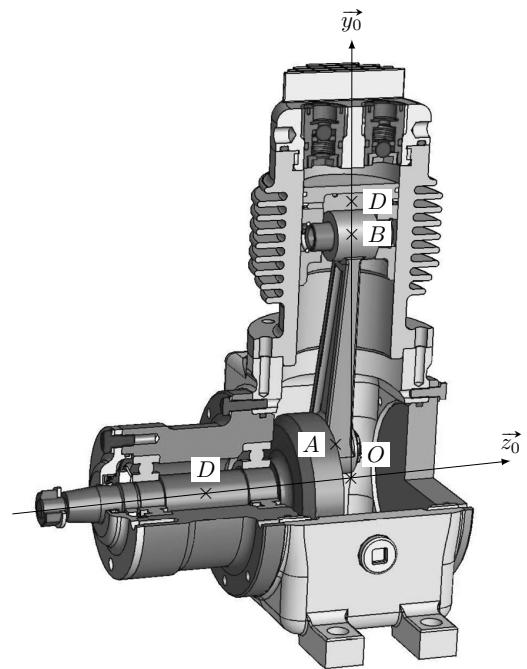
# TD 1 – Compresseur

## Présentation

Certaines machines utilisent de l'énergie pneumatique pour actionneurs. Un micro-compresseur permet de fournir de l'air sous pression (de 5 à 10 bar). Il fonctionne généralement de façon intermittente. L'air sous pression est stocké dans un réservoir. Le compresseur est lui-même entraîné par un moteur électrique.



(a) Vue extérieure du compresseur.



(b) Vue en écorché de l'intérieur du compresseur.

FIGURE 1 : Modélisation volumique d'un compresseur

La figure 1(a) présente une vue extérieure du compresseur. On distingue l'arbre moteur, lié au moteur électrique et les orifices d'admission et de refoulement d'air.

Le principe de fonctionnement est basé sur celui d'un système bielle-manivelle. Le mouvement d'aller-retour du piston (3) permet d'augmenter puis de diminuer alternativement le volume d'une chambre. Deux clapets anti-retour assurent la distribution du gaz. Un clapet autorise l'air extérieur à rentrer dans la chambre lorsque le piston descend et l'empêche de ressortir. Le second clapet autorise l'air à sortir vers la bombarde lorsque sa pression est suffisante pour ouvrir le clapet.

La compression d'un gaz s'accompagnant d'une élévation de sa température, des ailettes de refroidissement sont disposées autour de la chambre de compression.

Le dimensionnement du moteur électrique et des liaisons nécessite de déterminer le couple moteur nécessaire pour atteindre 10 bar, ainsi que les efforts dans les liaisons entre solides et en particulier les efforts dans les deux roulements guidant l'arbre moteur en rotation. Les effets

dynamiques sont supposés négligeables devant les efforts dus à la pression de l'air, ce qui permet de considérer les pièces en équilibre quasi-statique.

Pour répondre à cet objectif, il faut successivement :

- modéliser le système pour faire apparaître ses propriétés en termes d'efforts ;
- modéliser les efforts extérieurs et ceux entre solides ;
- traduire l'équilibre des solides afin de trouver les lois liant les forces s'exerçant dans le système.

## Modélisation

Le mécanisme est constitué d'un assemblage de solides indéformables (la géométrie des pièces peut être considérée comme invariante). La modélisation statique reprend le graphe de liaisons et le schéma cinématique pour modéliser le système. Attention toutefois car il s'agit cette fois de *modéliser les actions mécaniques transmissibles* : le choix des liaisons peut être différent de celui envisagé pour l'étude des mouvements.

Le schéma cinématique (paramétré) est donné sur la figure 2.

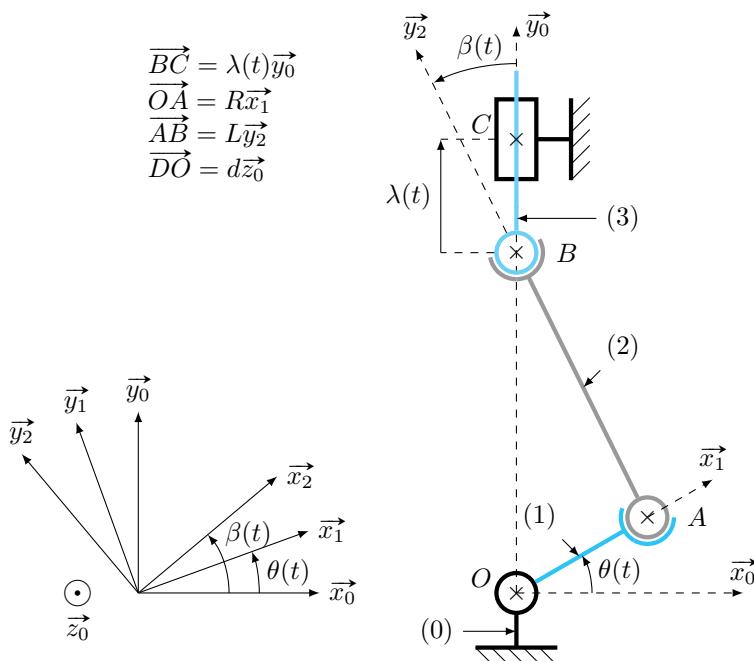


FIGURE 2 : Schéma cinématique et paramétrage du compresseur

La liaison entre le piston (3) et le bâti (0) est réalisée par un contact cylindre-cylindre et se modélise naturellement par une liaison pivot glissant d'axe ( $C, \vec{y}_0$ ).

Les deux liaisons de part et d'autre de la bielle (2) sont réalisées par des contacts cylindre-cylindre relativement courts par rapport au diamètre, ce qui conduit à les modéliser par des liaisons sphériques de centres  $A$  et  $B$ .

Pour le guidage de l'arbre (1) par rapport au bâti (0), sans rentrer dans le détail, l'ensemble des deux roulements est modélisé par une liaison pivot d'axe ( $D, \vec{z}_0$ ), bloquant tous les mouvements hormis la rotation suivant la direction  $\vec{z}_0$ .

### Objectif

Déterminer le couple moteur  $C_m$  en fonction de la position angulaire du moteur  $\theta$  et de la pression  $p$ .

## Travail demandé

**Q1.** Tracer le graphe de structure de ce mécanisme.

Pour résoudre ce problème, on va appliquer le PFS dans un premier temps à la bielle 2, puis à l'arbre 1 et enfin au piston 3.

### Isolement de la bielle 2

**Q2.** Écrire le torseur de l'action mécanique du piston 3 sur la bielle 2, noté  $\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 2}\}$ .

**Q3.** Écrire le torseur de l'action mécanique de l'arbre 1 sur la bielle 2, noté  $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}$ .

**Q4.** Écrire les 6 équations du PFS appliqué à la bielle 2.

### Isolement de l'arbre 1

**Q5.** Écrire le torseur de l'action mécanique de la bielle 2 sur l'arbre 1, noté  $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\}$ .

**Q6.** Écrire le torseur de l'action mécanique du bâti 0 sur l'arbre 1 noté  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\}$ .

**Q7.** Écrire le torseur de l'action extérieure du moteur sur l'arbre 1, noté  $\{\mathcal{T}_{\text{mot} \rightarrow 1}\}$ .

**Q8.** Écrire les 6 équations du PFS appliqué à l'arbre 1.

### Isolement du piston 3

**Q9.** Écrire le torseur de l'action mécanique de la bielle 2 sur le piston 3, noté  $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\}$ .

**Q10.** Écrire le torseur de l'action mécanique du bâti 0 sur le piston 3, noté  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}\}$ .

**Q11.** Écrire le torseur de l'action mécanique de l'air sur le piston 3, noté  $\{\mathcal{T}_{\text{air} \rightarrow 3}\}$ .

**Q12.** Écrire les 6 équations du PFS appliqué au piston 3.

## Conclusion

**Q13.** En conclure l'expression de  $C_m$  en fonction de  $\theta$ ,  $p$  et des caractéristiques géométriques du mécanisme.

## TD 2 – Mammographe<sup>1</sup>



La radiologie est utilisée pour rechercher la présence d'une tumeur dans un sein. La machine utilisée est un mammographe. Le développement technologique et l'intégration de l'informatique rendent de plus en plus performant ce type d'appareil. Un mammographe est constitué de différents éléments génériques. Dans le cadre de cette étude, nous nous limitons à l'ascenseur en liaison glissière de direction verticale par rapport à la partie fixe du mammographe (bâti). Cette mobilité permet d'adapter le mammographe à la taille de la patiente.

### Objectif

*L'objectif de ce TD est de valider la capacité de l'actionneur électrique à maintenir fixe l'ascenseur.*

La caractéristique de l'actionneur électrique est la suivante :

Fonction technique	Critère	Niveau	Flexibilité
Faire monter ou descendre l'ascenseur	Couple maximal délivré	2 N · m	±5%

Le mécanisme de transformation de mouvement représenté FIGURE 2) comporte le bâti **2**, l'ascenseur **5** et la vis liée au rotor de l'actionneur électrique **4**. On précise les éléments de modélisation suivants :

- la liaison  $L_{25}$  est une liaison pivot glissant d'axe ( $N_5, \vec{z}_2$ ) ;
- la liaison  $L_{24}$  est une liaison pivot d'axe ( $O_4, \vec{z}_2$ ) ;
- la liaison  $L_{45}$  est une liaison hélicoïdale d'axe ( $O_5, \vec{z}_2$ ) et de pas à droite  $p_4 = 6$  mm.

**Hypothèses** : le repère  $R_2$  est considéré comme un repère galiléen. La gravité est telle que  $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}_2$  avec  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

**Paramétrage** :  $\vec{Q}N_5 = \lambda \vec{z}_2$ ;  $\vec{N_5O_5} = a_5 \vec{x}_2$ ;  $\vec{O_5A} = b \vec{x}_2 + c \vec{y}_2$

**Modélisation des actions mécaniques extérieures** :

L'ascenseur **5** est soumis à son poids, modélisé par un glisseur en  $A$ . Sa masse est  $M = 130 \text{ kg}$ .

On néglige le poids de toutes les autres pièces devant celui-ci.

La vis **4** est soumise à l'action du stator sur le rotor, modélisée par un torseur couple de moment  $C\vec{z}_2$ .

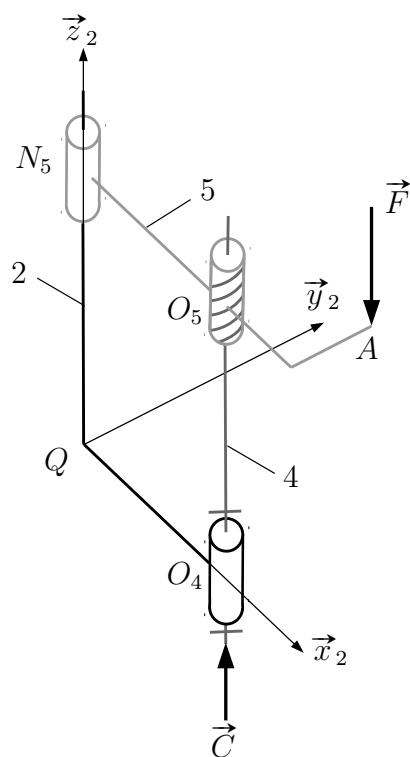
**Notations** : le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison  $L_{ij}$  du solide  $S_i$  sur

$$\text{le solide } S_j \text{ sera noté : } \{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{C, R_2}$$

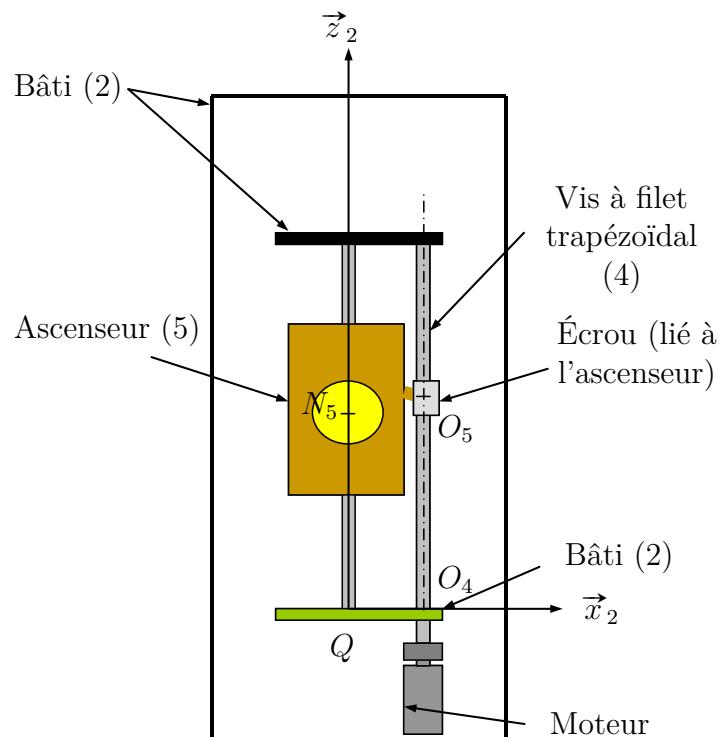
**Q1.** Tracer le graphe de structure du mécanisme et préciser le torseur d'actions mécaniques transmissibles pour chaque liaison ainsi que les torseurs associés aux actions mécaniques extérieures.

**Q2.** Identifier le nombre  $N_s$  de solides que l'on peut isoler, et le nombre d'inconnues statiques  $I_s$ . Toutes les inconnues de liaisons sont-elles déterminables ?

1. adapté du concours Centrale MP 2004



(a) Paramétrage



(b) Représentation de l'ascenseur

FIGURE 1 : Modélisation de l'ascenseur

**Q3.** Isoler le solide 4 et donner les 6 équations traduisant l'équilibre du solide 4, puis faire de même avec le solide 5.

**Q4.** Déterminer la relation liant la masse  $M$  au couple développé par l'actionneur électrique  $C$  en choisissant judicieusement les équations à utiliser.

**Q5.** Aurait-on pu deviner les isolements et les équations utiles à écrire sans avoir à déterminer les 6 équations pour les 2 isolements ?

**Q6.** Conclure quant au choix de l'actionneur électrique.

# TD 3 – Camion grue<sup>1</sup>

Le système étudié est un camion grue dont le cahier des charges fonctionnel définit la fonction de service « permettre au conducteur de soulever la charge », dont le critère « masse de la charge » possède un niveau  $M_{maxi} < 10\,000\text{ kg}$ . Le vérin utilisé peut développer un effort maximal de  $10^6\text{ N}$ .

## — Objectif —

*L'objectif de ce TD est de vérifier que le dimensionnement du vérin retenu par les ingénieurs est satisfaisant.*

La modélisation du système est présentée sur la figure FIGURE 1 :

- la liaison pivot entre  $\mathcal{S}_0$  et  $\mathcal{S}_1$ , la liaison pivot-glissant entre  $\mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{S}_3$  et les liaisons sphériques entre  $\mathcal{S}_0$  et  $\mathcal{S}_3$  et entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont supposées parfaites ;
- les actions de la pesanteur sur les pièces de la grue sont négligées devant l'action de pesanteur,  $\vec{F} = -Mg\vec{y}$  de la charge qui est soulevée ;
- l'action du fluide (dans le vérin hydraulique) sur la tige du vérin  $\mathcal{S}_2$  est modélisée par un glisseur  $F_{huile \rightarrow \mathcal{S}_2}$  dirigé suivant  $\vec{x}_2$ .

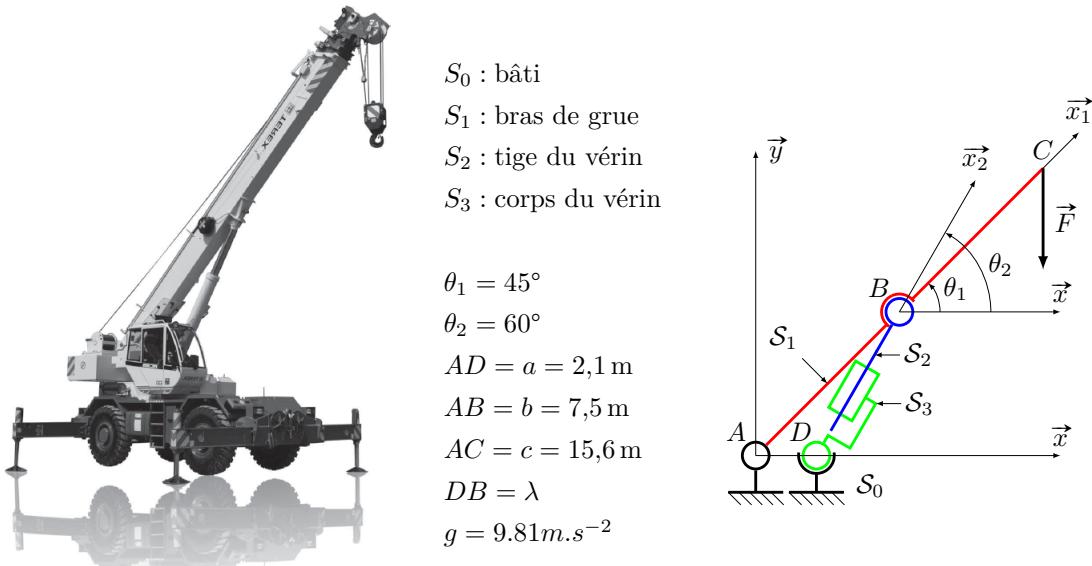


FIGURE 1 : Camion grue et modélisation adaptée

**Q1.** Réaliser le graphe de liaisons et le compléter en mentionnant les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur ce système ainsi que l'action du fluide sur la tige et le corps du vérin. Vous préciserez les actions mécaniques connues et celles recherchées.

**Q2.** Montrer que les torseurs des actions mécaniques dans les liaisons sphériques entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont des glisseurs de direction  $\vec{x}_2$ .

**Q3.** Déterminer l'action mécanique dans la liaison sphérique en  $B$  en fonction de  $F$  et de la géométrie des solides constitutants le mécanisme.

1. adapté du concours Centrale MP 2004

**Q4.** Montrer que l'on peut obtenir le résultat précédent graphiquement en utilisant la notion de bras de levier.

**Q5.** Conclure quant à la capacité du camion grue à satisfaire le critère de masse de la charge dans la configuration géométrique retenue.

# TD 4 – Frein mécanique d'une éolienne

## Présentation

On se propose d'étudier la transmission des efforts du vent dans les différents organes qui constituent une éolienne et plus principalement, de vérifier le dimensionnement du frein qui permet de maintenir les pales à l'arrêt lorsque l'éolienne n'est pas dirigée dans la direction des vents dominants, afin de ne pas déteriorer son fonctionnement.

Outre la fonction principale de récupération d'énergie, l'extrait du cahier des charges suivant spécifie certaines performances pour deux autres fonctions.



Fonctions	Critère	Valeur
Assurer l'arrêt en rotation des pales	Vitesse du vent maximale (km/h)	100
Être alimentée en énergie hydraulique	Pression maximale (bar)	8

### Objectif

*Vérifier les performances annoncées par le constructeur.*

## Modélisation

L'éolienne est composée (voir FIGURE 1) d'un axe **1** en liaison rotule de centre *A* par rapport au bâti **0** et d'une liaison linéaire annulaire d'axe  $(B, \vec{x})$  par rapport à **0**. Sur l'axe **1** sont fixées deux pales. Le vent pousse sur les pales et entraîne donc en rotation l'axe **1** qui transmet la puissance à l'axe **2** par le biais d'un engrenage conique. Le contact entre **1** et **2** sera modélisé par une liaison ponctuelle de centre *I* et de normale  $\vec{u}$  fixe par rapport au bâti. L'arbre **2**, en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z})$  par rapport au bâti, transmet le mouvement à une génératrice électrique **3**. D'autre part, l'arbre **2** (et donc l'arbre **1**) peut être arrêté en rotation au moyen d'un frein constitué des pièces **4** et **5** (voir FIGURE 3 pour le détail des liaisons).

### Caractéristiques géométriques :

Caractéristiques géométriques de l'axe **1** :  $AB = L = 200 \text{ mm}$  ;  $BO = \ell = 30 \text{ mm}$  ;  $\vec{AI} = \frac{L}{2} \vec{x} - \frac{D_1}{2} \vec{z}$  ;

Longueur des pales :  $\lambda = 3 \text{ m}$  ;

Caractéristiques de l'engrenage conique :

$D_1 = 200 \text{ mm}$  ;  $D_2 = 50 \text{ mm}$  ;  $\vec{u} = \cos \alpha \vec{y} + \sin \alpha (\cos \delta \vec{x} + \sin \delta \vec{z})$  ;  $\alpha = 20^\circ$  ;  $\delta = 45^\circ$ .

$$\vec{JI} = H \vec{z} + \frac{D_2}{2} \vec{x} \text{ avec } H = 150 \text{ mm} ; JC = h = 100 \text{ mm} ;$$

Caractéristiques géométriques du frein :  $DE = e \ll r$  ;  $\vec{JD} = r \vec{x}$  avec  $r = 150 \text{ mm}$ .

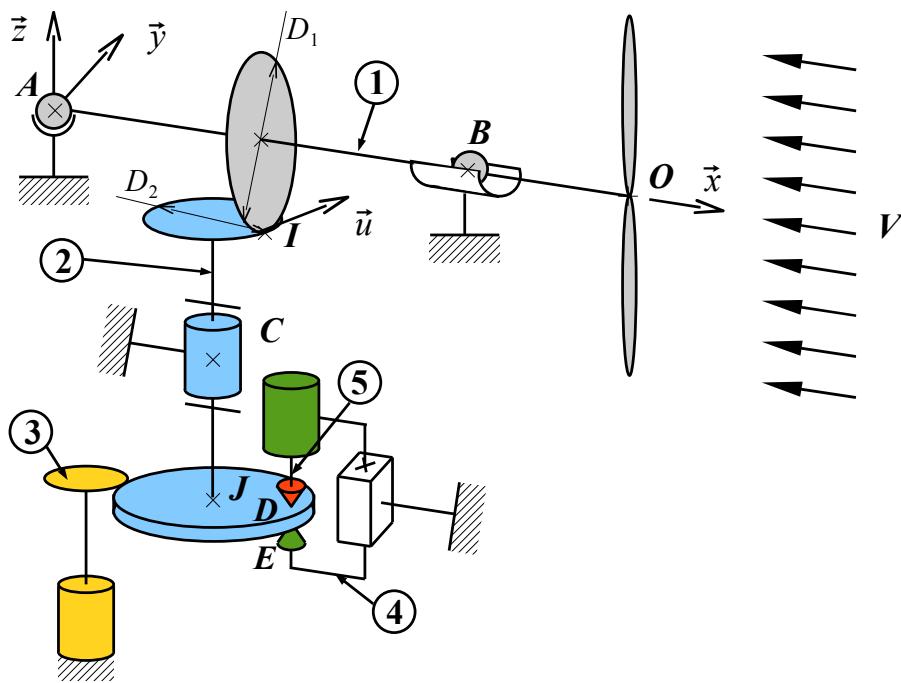


FIGURE 1 : Schéma structurel de l'ensemble de transmission

L'action du vent sur une pale est modélisée par une répartition linéaire uniforme de forces (voir FIGURE 2). Dans le cadre de cette étude, on supposera les pales immobiles (phase d'arrêt) et en position verticale. L'action élémentaire du vent sur un tronçon élémentaire  $dz$  en  $M$  et  $M'$  respectivement des pales supérieure et inférieure s'écrit  $d\vec{F} = -[C_x \vec{x} - C_y \vec{y}]V^2 dz$  et  $d\vec{F}' = -[C_x \vec{x} + C_y \vec{y}]V^2 dz$  où  $V$  correspond à la vitesse du vent et  $C_x = C_y = 0,1 \text{ N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$  sont deux coefficients caractéristiques de l'écoulement de l'air sur les pales profilées.

## Travail demandé

### Action mécanique de l'air sur les pales

**Q1.** Déterminer le torseur des actions mécaniques de l'air sur la pale supérieure au point  $O$ .

**Q2.** En s'aidant d'un schéma des 2 pales dans les plans  $(\vec{x}, O, \vec{z})$  et  $(\vec{y}, O, \vec{z})$  (cf. FIGURE 2), déduire le torseur des actions mécaniques de l'air sur la pale inférieure au point  $O$  à partir de celui de l'air sur la pale supérieure sans faire de calcul.

**Q3.** Montrer que le torseur global des actions mécaniques de l'air sur les deux pales peut se mettre sous la forme  $\{\mathcal{T}_{\text{air} \rightarrow \text{pales}}\} = \left\{ \begin{matrix} R_{\text{air } 1} \cdot \vec{x} \\ C_{\text{air } 1} \cdot \vec{x} \end{matrix} \right\}_O$  où l'on précisera les expressions de  $R_{\text{air } 1}$  et  $C_{\text{air } 1}$ . (On utilisera ce torseur dans la suite de l'étude).

### Action mécanique transmise au niveau de l'engrenage conique

L'effort transmis par la roue 2 sur la roue 1 au point  $I$  est modélisé par un glisseur dont la résultante est  $\vec{F}_I = F_I \vec{u}$ .

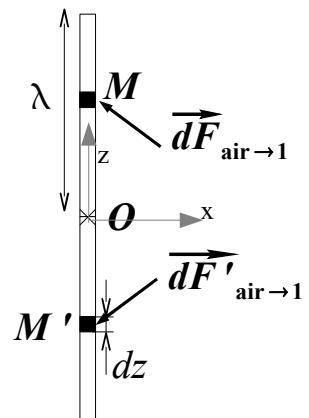


FIGURE 2 : Effort de l'air sur les pales

**Q4.** Réaliser un graphe de structure du système **{0,1,2,4,5}**. On ne prendra pas en compte la génératrice **3**.

**Q5.** En isolant l'ensemble **1** (axe+pales), déterminer l'expression de l'effort  $F_I$  en fonction du couple  $C_{\text{air}1}$  et des données géométriques, en précisant bien l'équation retenue.

## Étude du frein

Les contacts entre les pièces **4** et **5** et la pièce **2** sont modélisés par des contacts ponctuels avec frottement aux points **D** et **E** de normale  $\pm \vec{z}$ . On notera  $f$  le coefficient de frottement ( $f = 0,5$ ).

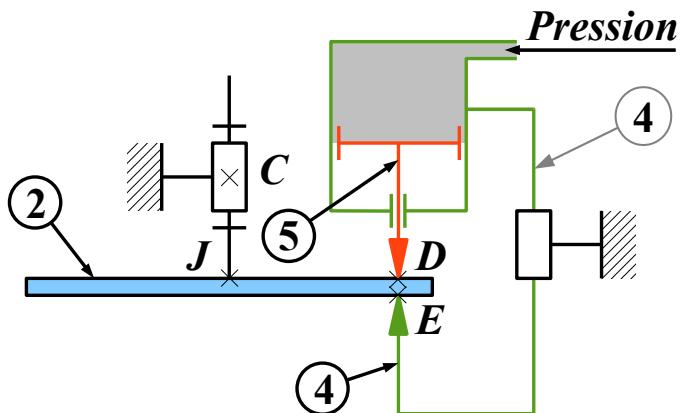


FIGURE 3 : Étrier de freinage

**Q6.** Donner les torseurs des actions mécaniques transmissibles pour chacune des liaisons ponctuelles avec frottement aux points **D** et **E**. On suppose que la composante tangentielle de frottement est parallèle à  $\vec{y}$ .

**Q7.** Quelle condition portant sur le coefficient de frottement et les composantes des torseurs doit être respectée pour que l'éolienne soit à l'arrêt ?

**Q8.** Déterminer l'effort  $\vec{F}_{p \rightarrow 5}$  de l'air sous pression sur le piston **5** (penser à prendre la pression atmosphérique en compte). On précise que le piston est cylindrique de diamètre  $d = 50$  mm, que la chambre inférieure du piston est reliée à l'air libre et on néglige le diamètre de la tige **5** par rapport à celui du piston (cf. FIGURE 3).

**Q9.** En isolant le piston **5**, indiquer l'équation issue du PFS à appliquer pour déterminer la composante normale de l'effort en **D** de **2** sur **5**. Donner l'expression en fonction de  $p$  et  $d$ .

**Q10.** En isolant l'ensemble **{4+5+fluide}**, déterminer la composante de l'effort normal en **E** de **2** sur **4**.

## Vérification du cahier des charges

**Q11.** En isolant l'arbre **2** et en utilisant une équation à préciser issue du PFS, déterminer les actions tangentielles de frottement en **D** et **E** en fonction de  $F_I$ . On supposera que les deux composantes tangentielles sont égales et que l'action de **3** sur **2** est nulle.

**Q12.** En déduire la vitesse limite du vent à partir de laquelle le frein n'assure plus sa fonction.

**Q13.** Le cahier des charges est-il vérifié ?

## TD 5 – Palan – arc-boutement

Le phénomène d'arc-boutement est très utilisé en mécanique. Il permet, suivant les configurations, d'assurer ou d'éviter le déplacement des pièces même sous des chargements importants. De nombreux dispositifs sont basés et fonctionnent grâce aux propriétés de l'arc-boutement (échelle, serre-joint, roue libre, chevalet de menuisier, cric d'automobile, tête réglable de lit ...). Par contre, sur certains mécanismes, il est nuisible (machines avec coulisseaux, tiroir ...).

Ce phénomène est illustré sur la figure 1.

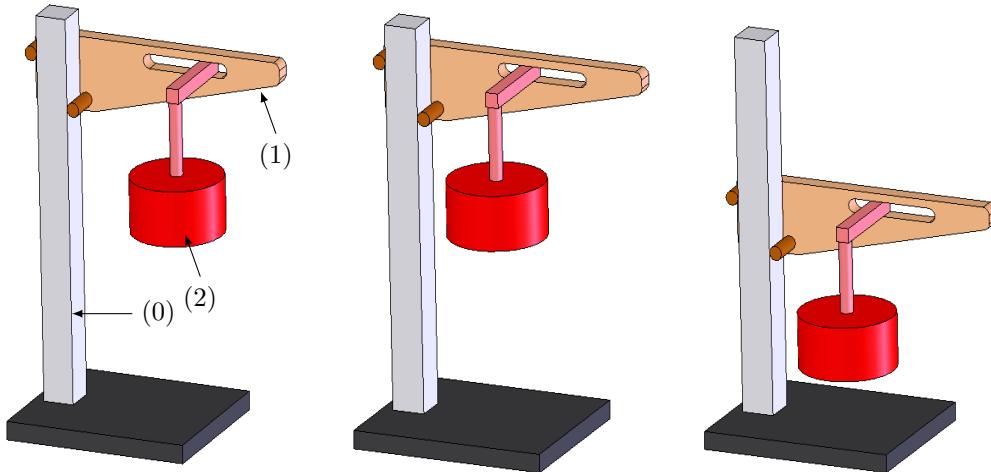


FIGURE 1 : Lorsque la charge est suffisamment éloignée, l'action de frottement bloque la chute. Lorsque la charge est approchée de l'axe, il survient une distance limite en deçà de laquelle l'équilibre n'est plus possible et l'ensemble chute

L'ensemble (1) est constitué de deux cylindres qui lui permettent de glisser le long de la colonne du bâti (0). La masse (2) peut glisser le long de la gorge creusée dans (1) (la cote  $X$  varie). La figure 2 montre le paramétrage adopté.

**Hypothèses :**

- l'étude est considérée dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  ;
- le poids de (1) est négligeable devant le poids de la masse (2) ;
- les liaisons en  $A$  et en  $B$  sont assimilables à des liaisons sphère-plan de normale  $\vec{x}$  avec frottement. Le coefficient de frottement est  $f = \tan \varphi = 10^\circ$ .

L'ensemble  $\{(1), (2)\}$  est soumis à trois forces :

- action mécanique de (0) sur (1) en  $A$  ;
- action mécanique de (0) sur (1) en  $B$  ;
- action mécanique de la pesanteur sur (2) en  $G$ .

**Q1.** Dessiner le graphe de structure du mécanisme.

**Q2.** Écrire le torseur des actions mécaniques transmissibles de chacune des liaisons.

**Q3.** Montrer que l'étude n'a pas de sens si on considère que toutes les liaisons sont parfaites.

**Q4.** Écrire le PFS appliqué sur l'ensemble  $\{1 + 2\}$  et déterminer les 3 équations traduisant l'équilibre statique de l'ensemble  $\{1 + 2 + 3 + 4 + 6\}$ .

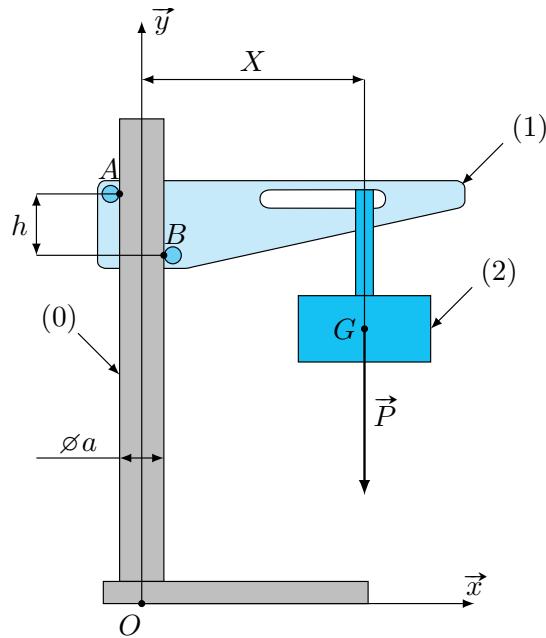


FIGURE 2 : Paramétrage retenu

**Q5.** Résoudre le système d'équations et en déduire la condition géométrique d'équilibre du système, c'est-à-dire la valeur  $X_{lim}$  en deçà de laquelle le système se mettra à glisser.

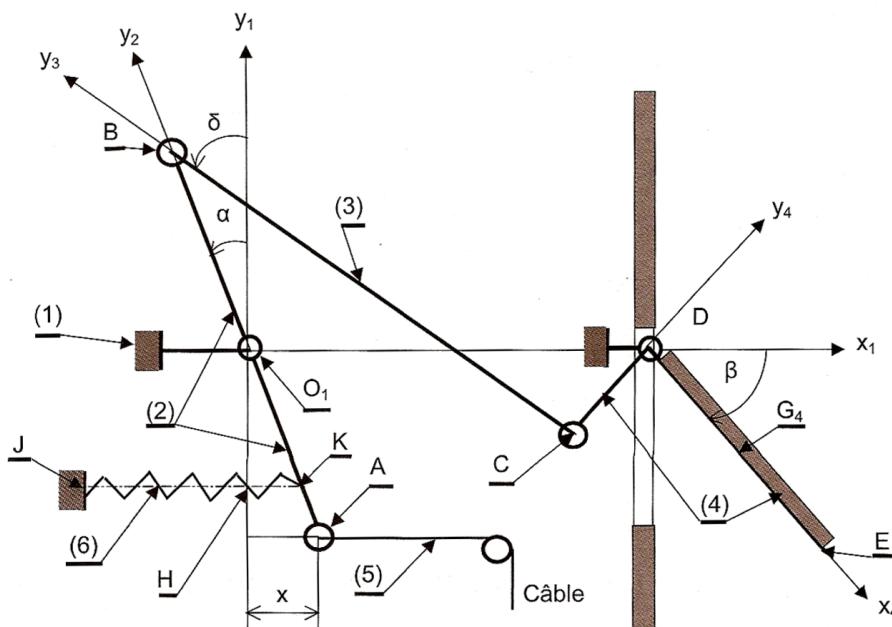
# Sujet Kholle 1 – Clapet d'aération

## Présentation

Le dispositif représenté ci-dessous est une commande de l'ouverture du clapet 4 à partir du câble 5 lié en *A* au levier 2. Ce levier est relié à une biellette 3 qui agit en *C* sur le clapet 4 coudé. Un ressort 6 doit assurer au volet 4 la position d'équilibre  $\beta = 0$  sans action sur le câble 5.

### Objectif

Évaluer la tension de pose du ressort pour répondre à cette exigence.



On note :

- $O_1A = a$ ,  $O_1B = b$ ,  $O_1K = h$ ,  $BC = l$ ,  $CD = c$ ,  $DG_4 = q$ ;
- $CD \perp DE$ ,  $\alpha = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ ,  $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_4)$ ,  $\delta = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$ ;

Les dimensions des diverses pièces sont telles que  $\beta = 0$  lorsque  $\alpha = 0$ . Elles seront précisées dans les applications numériques. Toutes les masses sont négligées hormis celle du volet 4 notée  $m_4$ , son centre de gravité se trouve en  $G_4$ . Les liaisons sont supposées parfaites.

## Travail demandé

### Étude préalable

Le ressort de traction 6 a une raideur  $k$ . Sa tension de pose  $T_0$  correspond à la situation d'équilibre  $\alpha = 0$ .

**Q1.** Déterminer l'expression de l'intensité  $F_r$  de  $\vec{R}_{6 \rightarrow 2}$  en fonction de  $T_0$ ,  $k$ ,  $h$  et  $\alpha$ .

## Graphe de structure

**Q2.** Réaliser le graphe de structure de ce mécanisme. Préciser les actions mécaniques extérieures à prendre en compte.

**Q3.** Préciser le nombre d'inconnues de chacune des liaisons dans le plan.

## Stratégie d'isolement

Afin de diminuer le nombre d'inconnues, on souhaite procéder à une rapide analyse.

**Q4.** Quel isolement réaliser pour diminuer ce nombre d'inconnues ?

**Q5.** Le réaliser et en déduire par application du PFS une expression de  $\vec{R}_{2 \rightarrow 3}$ . Penser à actualiser le nombre d'inconnues sur le graphe de structure.

On souhaite calculer la norme précédente.

**Q6.** Quel isolement réaliser pour la calculer ? Quelle équation du PFS utiliser ? Mettre en place cette démarche afin de calculer cette norme.

On souhaite déterminer  $F_c$  telle que :  $\vec{R}_{5 \rightarrow 2} = F_c \vec{x}_1$ .

**Q7.** Quel isolement réaliser pour la calculer ? Quelle équation du PFS utilisée ? Mettre en place cette démarche afin de calculer cette norme en fonction de  $F_r$ ,  $m_4$ ,  $g$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $h$ ,  $q$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\delta$ .

## Expression de la tension de pose

**Q8.** Déterminer  $T_0$  afin que le ressort assure au volet 4 la position d'équilibre  $\beta = 0$  sans action sur le câble 5.

## Expression de l'effort du câble lorsque $\beta = 90^\circ$

**Q9.** Déterminer l'expression de  $F_c$  nécessaire pour obtenir la fermeture complète du volet ( $\beta = 90^\circ$ ).

## Application numérique

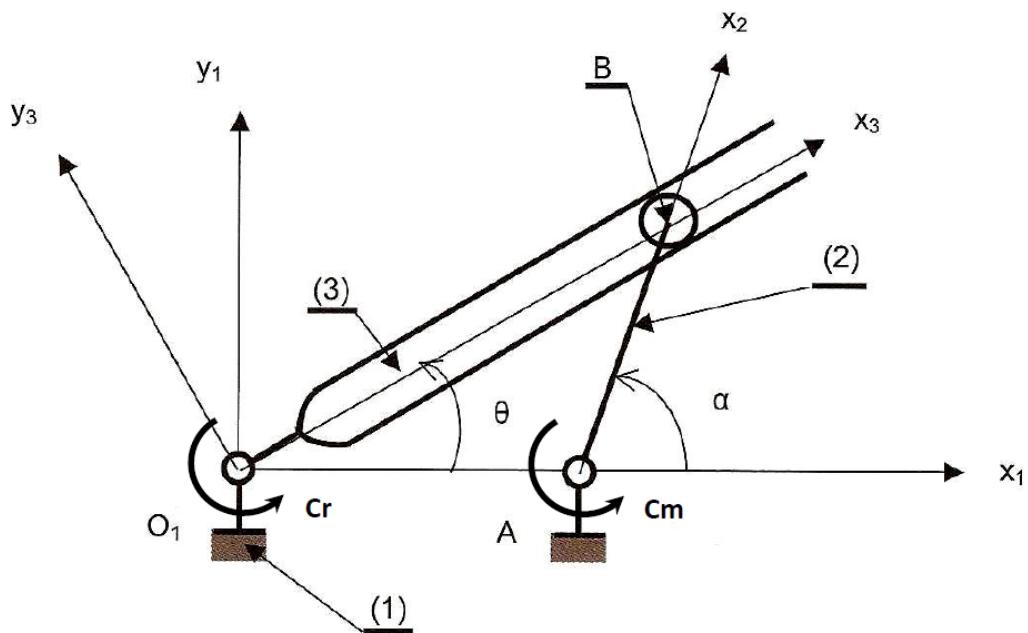
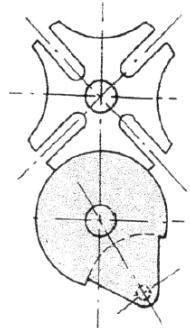
$m_4 = 25 \text{ kg}$ ,  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $a = 200 \text{ mm}$ ,  $b = 100 \text{ mm}$ ,  $c = 60 \text{ mm}$ ,  $q = 60 \text{ mm}$ ,  $h = 100 \text{ mm}$  et  $k = 0,1 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$ .

**Q10.** Dans la position fermée du volet  $\alpha = 72,5^\circ$ , calculer  $F_c$ .

# Sujet Kholle 2 – Croix de Malte

## Présentation

Le dispositif de la figure permet, à partir de la rotation continue de l'arbre d'entrée 2, d'obtenir un mouvement oscillatoire du levier 3. Les liaisons sont les suivantes : pivots en  $O_1$  et  $A$  et contact linéaire en  $B$ . Le rayon du galet en  $B$  est suffisamment faible pour confondre les contacts réels placés de part et d'autre de  $B$  et ce point.



**Données :**

- $\overrightarrow{O_1A} = a \cdot \vec{x}_1$ ,  $\overrightarrow{AB} = R \cdot \vec{x}_2$ ,  $\overrightarrow{O_1B} = \lambda(t) \cdot \vec{x}_3$ ;
- $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ ,  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_3)$ ;

**Hypothèses :**

- Le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  est horizontal et les effets d'inertie sont négligés ;
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites ;
- Les actions extérieures sont les couples moteur  $C_m$  et résistant  $C_r$  appliqués aux deux arbres.

**Objectif**

On désire déterminer l'ensemble des actions mécaniques en fonction des paramètres d'orientation.

## Travail demandé

### Graphe de structure

**Q1.** Réaliser le graphe de structure de ce mécanisme. Préciser les actions mécaniques extérieures à prendre en compte.

**Q2.** Préciser le nombre d'inconnues de chacune des liaisons dans le plan.

### Étude préalable

**Q3.** Donner l'expression des torseurs d'actions mécaniques transmissibles des différentes liaisons en choisissant la base de projection la plus représentative de la liaison.

**Q4.** Simplifier ces écritures en supposant le problème plan.

### Stratégie d'isolation

**Q5.** Donner votre stratégie d'isolation afin de déterminer l'ensemble des inconnues.

**Q6.** Préciser quelle(s) équation(s) donnera(ont) quelles inconnues.

### Résolution

**Q7.** Mettre en place votre stratégie. En déduire une relation qui relie les deux couples  $C_m$  et  $C_r$ .

En cinématique (par une fermeture géométrique), on détermine la loi entrée-sortie de ce mécanisme. On obtient les relations suivantes :

$$\theta = \arctan \left( \frac{R \sin \alpha}{R \cos \alpha + a} \right) \quad \text{et} \quad \lambda = \sqrt{a^2 + R^2 + 2aR \cos \alpha}$$

**Q8.** Expliquer la démarche qu'il a été nécessaire de mettre en place pour trouver les relations fournies ci-dessus.

On suppose que  $C_m$  est une constante valant 1 N.m, et on donne les valeurs numériques  $a = 90$  mm et  $R = 30.79$  mm.

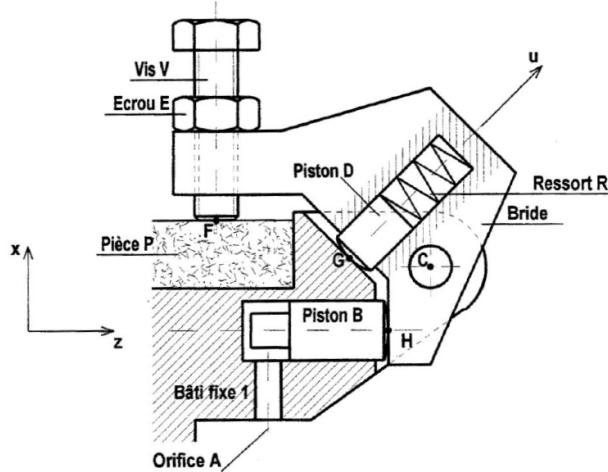
**Q9.** Tracer la fonction  $C_r = f(\alpha)$  avec  $\alpha \in [115^\circ, 245^\circ]$ . Commenter l'allure de la courbe.

# Sujet Kholle 3 – Dispositif de bridage

## Présentation

Sous l'action de la pression d'huile, le piston B vient déplacer la bride qui tourne par rapport au bâti, repousse le piston D et le ressort dans son logement et exerce un effort de serrage sur la pièce par l'intermédiaire de la vis.

Lorsque l'on supprime la pression d'huile, le piston D vient exercer un effort sur la bride par l'intermédiaire du ressort, la bride tourne alors en sens inverse de précédemment et la pièce est libérée, ce qui autorise alors son transfert vers le poste suivant.



## Données

- $\overrightarrow{FC} = 60. \vec{z} - 10. \vec{x}$ ,  $\overrightarrow{HC} = 10. \vec{z} + 20. \vec{x}$ ,  $\overrightarrow{GC} = 16. \vec{u} - 20. \vec{v}$ ;
- tous les frottements entre les pièces seront négligés, ainsi que leur poids;
- on désire un effort de serrage sur la pièce P de 500 N (entre la vis et la pièce, c'est un contact ponctuel de normale  $\vec{x}$  passant par F) ;
- le piston D applique un effort de 300 N sur le bâti par l'intermédiaire du ressort.

## Travail demandé

**Q1.** Réaliser le graphe de structure de ce mécanisme. Préciser les actions mécaniques extérieures à prendre en compte et le nombre d'inconnues de chacune des liaisons.

**Q2.** Vérifier que votre proposition est isostatique.

**Q3.** Réaliser un schéma cinématique de ce mécanisme.

**Q4.** Déterminer l'effort minimal que doit appliquer le piston B sur la bride pour que l'effort de serrage de 500 N soit atteint.

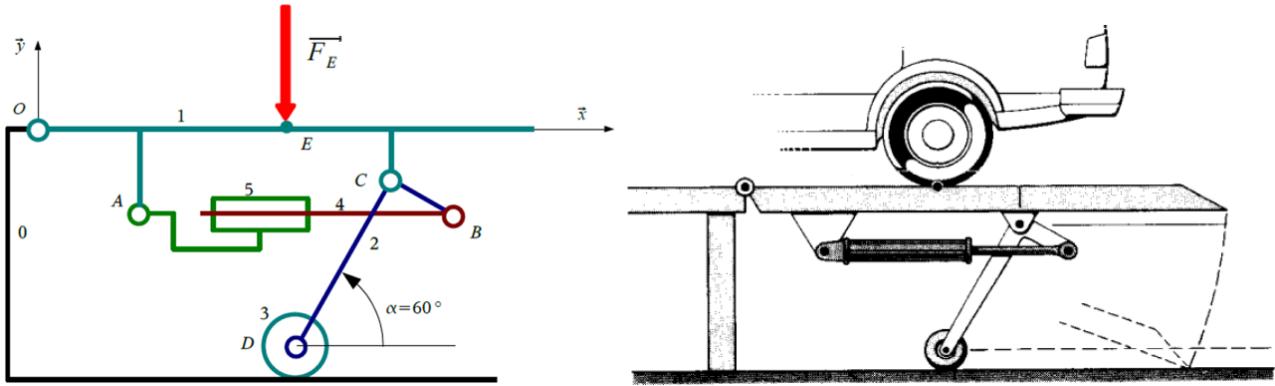
**Q5.** Le piston B ayant un diamètre de 15 mm, déterminer la pression nécessaire pour assurer cet effort.

**Q6.** Déterminer la résultante du torseur des actions transmissibles par la liaison pivot entre la bride et le bâti fixe 1. Quel angle fait-elle avec la direction  $\vec{z}$  ?

# Sujet Kholle 4 – Pont élévateur

## Présentation

Un pont élévateur de roue arrière de voiture est schématisé sur la figure ci-dessous.



Il est composé : d'un plateau 1, d'un bras de relevage 2, d'une roue 3, d'un corps de vérin 5 et d'une tige 4. Le problème est considéré comme plan et l'ensemble des poids des pièces sera considéré comme négligeable devant les actions mécaniques développées dans ce système.

## Données

- $\overrightarrow{OE} = a\vec{x}$ ,  $\overrightarrow{EC} \cdot \vec{x} = b$ ,  $\overrightarrow{CB} \cdot \vec{y} = c$ ,  $\overrightarrow{DC} = d\vec{x} + e\vec{y}$ ,  $\overrightarrow{CA} \cdot \vec{y} = f$  ;
- $a = 700 \text{ mm}$ ,  $b = 300 \text{ mm}$ ,  $c = 100 \text{ mm}$ ,  $d = 275 \text{ mm}$ ,  $e = 475 \text{ mm}$ ,  $f = 100 \text{ mm}$  ;
- $\overrightarrow{F_E} = -F\vec{y}$  (avec  $F = 6 \text{ kN}$ ) au point E.

## Travail demandé

**Q1.** Réaliser le graphe de structure de ce mécanisme. Préciser les actions mécaniques extérieures à prendre en compte et le nombre d'inconnues de chacune des liaisons.

On cherche à déterminer l'effort que doit transmettre le vérin pour que le système reste en équilibre. Pour cela :

**Q2.** Proposer une démarche de résolution du problème.

**Q3.** Déterminer l'effort que doit transmettre le vérin.