



MPSI – PCSI

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Séquence 4

Modélisation des mécanismes

A Analyser

A3 Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle

A3-01 Associer les fonctions aux constituants.

A3-05 Caractériser un constituant de la chaîne de puissance.

A3-07 Analyser un algorithme.

A4 Analyser les performances et les écarts

A4-01 Extraire un indicateur de performance pertinent à partir du cahier des charges ou de résultats issus de l'expérimentation ou de la simulation.

A4-02 Caractériser les écarts entre les performances.

A4-03 Interpréter et vérifier la cohérence des résultats obtenus expérimentalement, analytiquement ou numériquement.

B Modéliser

B1 Choisir les grandeurs physiques et les caractériser

B1-01 Identifier les performances à prévoir ou à évaluer.

B1-02 Identifier les grandeurs d'entrée et de sortie d'un modèle.

B2 Proposer un modèle de connaissance et de comportement

B2-01 Choisir un modèle adapté aux performances à prévoir ou à évaluer.

B2-03 Associer un modèle aux composants des chaînes fonctionnelles.

B2-10 Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.

B2-12 Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.

B2-13 Proposer un modèle cinématique paramétré à partir d'un système réel, d'une maquette numérique ou d'un plan d'ensemble.

B3 Valider un modèle

B3-01 Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.

C1 Proposer une démarche de résolution

C1-04 Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique.

C2 Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

C2-05 Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.

C2-06 Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.

C3 Mettre en œuvre une démarche de résolution numérique

C3-01 Mener une simulation numérique.

C3-02 Résoudre numériquement une équation ou un système d'équations.

Table des matières

Cours	0
I Hypothèses – Définitions	1
I.1 Les solides	1
I.2 Les contacts	1
I.3 Degrés de liberté autorisés par un contact	3
I.4 Liaisons normalisées	5
II Modélisation cinématique d'un mécanisme	9
II.1 Classes d'équivalence	9
II.2 Graphe de liaisons	10
III Représentation d'un modèle : le schéma cinématique	11
IV Modélisation plane	13
IV.1 Définition du mouvement plan	13
IV.2 Modèles de liaisons planes	13
IV.3 Schéma cinématique d'une modélisation plane	14
V Analyse géométrique d'un mécanisme	14
V.1 Construction géométrique	14
V.2 Paramétrage	14
V.3 Loi entrée-sortie	15
VI Recherche des 0 d'une fonction - résolution numérique d'équations de la forme $f(x) = 0$	16
VI.1 Méthode de résolution par dichotomie	16
VI.2 Méthode de Newton	17
VI.3 Application : Constitution d'une loi entrée-sortie numérique	18
I Définitions	20
II Repérage des vecteurs	20
II.1 Base	20
II.2 Base orthonormée directe	20
II.3 Expression d'un vecteur dans différents repères	20
III Produit scalaire	21
III.1 Définition	21
III.2 Propriétés	21
III.3 Expression analytique	21
III.4 Interprétation géométrique	21
IV Changement de bases	21
TDs	23
TD 1	23
TD 2	28

TD 3	30
TD 4	32
TD 5	34
TD 6	38
Kholle 1	39
Kholle 2	41
Kholle 3	43
Kholle 4	45
Kholle 5	47
Kholle 6	50
Kholle 7	51
Kholle 8	53
Kholle 9	55
Kholle 10	57
Kholle 11	59
Kholle 12	61
Kholle 13	63
Kholle 14	65
Kholle 15	67
Kholle 16	69
Kholle 17	71
Kholle 18	73

De nombreuses performances d'un système sont liées à ses mouvements, à la manière dont ceux-ci sont obtenus. L'étude ou le dimensionnement de ces systèmes mécaniques nécessite la mise en place d'une modélisation de l'assemblage de pièces entre elles.

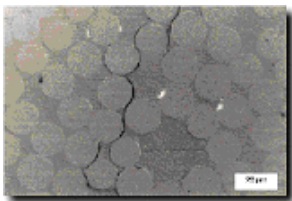
L'objectif du chapitre est de montrer les outils permettant de modéliser des systèmes mécaniques pour ensuite pouvoir mener différentes études à partir de ce modèle. Un tel modèle pourra être implanté dans un logiciel de simulation pour prévoir le comportement du mécanisme et valider le cahier des charges ou pour améliorer ses performances.

I Hypothèses – Définitions

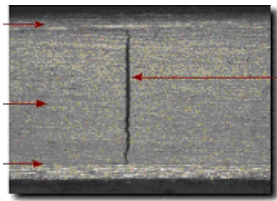
I.1 Les solides

Considérons un système constitué d'un seul élément (par exemple, une hélice). L'étape fondamentale de la modélisation consiste à choisir l'échelle à laquelle le mouvement de l'élément sera étudié. Plusieurs choix d'échelles sont alors possibles :

- on peut considérer les atomes (ou les éléments microscopiques) qui constituent cet élément (exemple : matériau composite à fibres de carbone et résine thermodurcissable) ;
- on peut considérer que la matière est continue et que l'élément peut se déformer, se casser (domaine de la Mécanique des Milieux Continus - niveau école d'ingénieur) (exemple : fissuration, rupture des fibres, dommages de la résine ...) ;
- on peut étudier la déformation uniquement dans une direction privilégiée (résistance des matériaux - flexion des pales) ;
- on peut enfin considérer que la matière est continue mais que l'élément ne se déforme pas (domaine de la mécanique du solide indéformable).



Matériau composite



Fissure dans un matériau



Flexion des pales d'un hélicoptère

Dans tout ce cours, on fait **l'hypothèse que les éléments étudiés ne se déforment pas**.

On définit donc un **solide indéformable** par un ensemble de points dont la distance entre eux ne varie pas au cours du temps :

$$\forall A \in S, \forall B \in S, \|\overrightarrow{AB}\| = \text{cste} \quad \forall t$$

Remarque : un solide est, par définition, un ensemble de points matériels (point + masse). On confond dans ce cours, solide et solide indéformable.

Modéliser un système revient à proposer *une* représentation simplifiée de la réalité, afin de ne faire apparaître que les propriétés indispensables pour l'étude considérée. Il peut donc, pour un système donné, y avoir plusieurs modélisations.

I.2 Les contacts

Lorsqu'un système est constitué de plusieurs solides indéformables, certains sont en contact, on dit alors qu'ils sont en liaison.

Une liaison entre deux solides est une relation de contact entre ces deux solides.

Ce contact est caractérisé par :

- sa géométrie (point, droite, arc de cercle, plan ...) ;
- les mouvements relatifs qu'il autorise.

L'analyse des liaisons se fait toujours en considérant **la nature des surfaces de contact**.

Si un contact change de nature, la liaison change et le modèle défini n'est alors plus valable.

Remarque : les zones de contact réelles entre deux solides sont surfaciques. Par contre, la modélisation par solides rigides des pièces réelles introduit la notion de zone de contact ponctuelle et linéique.

I.2.1 Contact ponctuel

Deux solides S_1 et S_2 sont en contact ponctuel si l'intersection de leur représentation géométrique est un point.

Exemple : contact sphère/sphère, sphère/plan, cône/plan, cylindre/cylindre ...



FIGURE 1 : Exemples de contacts ponctuels

I.2.2 Contact linéique

Deux solides S_1 et S_2 sont en contact linéique si l'intersection de leur représentation géométrique est une ligne.

En pratique, on se limitera à deux type de lignes : la droite (contact linéique rectiligne) et le cercle (contact linéique circulaire).

Exemple : contact cylindre/plan, sphère/cylindre, dentures d'engrenages ...

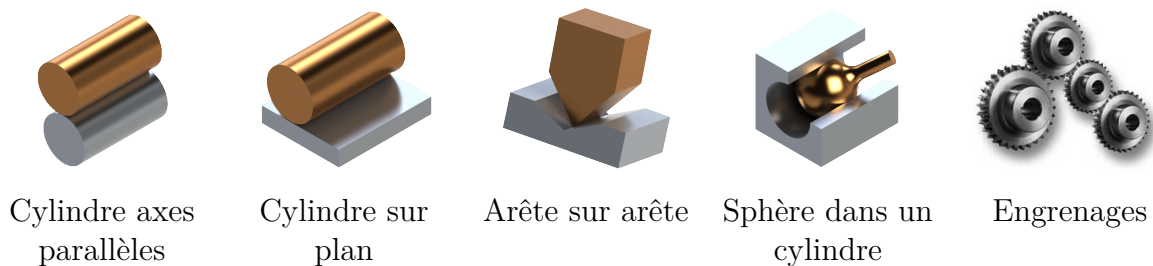


FIGURE 2 : Exemples de contacts linéiques

I.2.3 Contact surfacique

Le cas général est d'avoir autour d'un point A , pour deux solides S_1 et S_2 , deux surfaces qui ont la même forme géométrique en contact. S_1 et S_2 peuvent avoir en commun une surface qui peut être gauche ou plane.

Exemple : contact plan/plan, arbre/alésage de même diamètre, sphère dans sphère ...

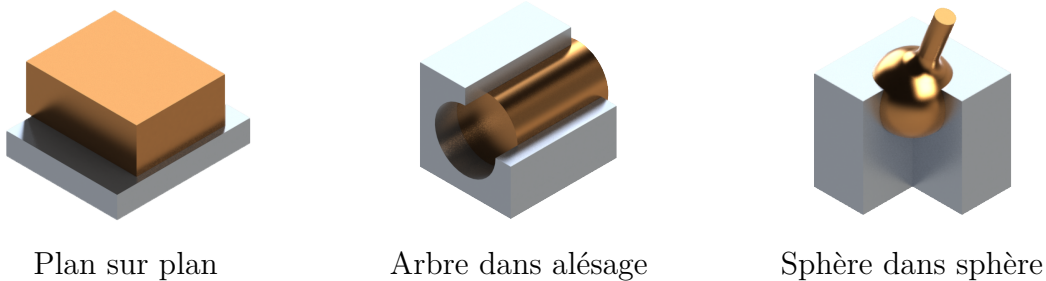


FIGURE 3 : Exemples de contacts surfaciques

I.3 Degrés de liberté autorisés par un contact

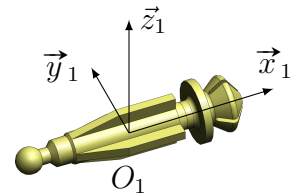
I.3.1 Repères

Pour caractériser la taille et la position des éléments d'un système, il est nécessaire de définir un (ou plusieurs) repère qui sera attaché à un référentiel donné.

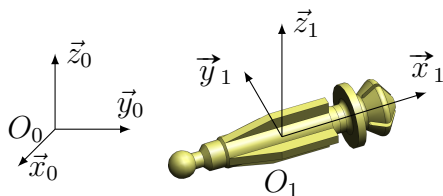
Un repère est constitué d'une origine et d'une base orthonormée B constituée de 3 axes. Ainsi, $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) = (O_0, B_0)$ est le repère d'origine O_0 et de base B_0 .

Étudier le mouvement d'un solide S_1 par rapport à un solide S_0 muni d'un repère R_0 revient à l'étudier par rapport à ce repère \Rightarrow Mouvement de $S_1/S_0 =$ Mouvement de S_1/R_0 .

On distingue plusieurs types de repères pour exprimer la position d'un point dans l'espace (figure 4). Le repère cartésien est le plus utilisé car le plus simple à mettre en œuvre. Le repère cylindrique est utile quand on veut mettre en évidence une rotation. Le repère sphérique est surtout utilisé lorsque l'on a trois rotations.



I.3.2 Paramètres de position d'un solide dans l'espace



Afin de positionner un solide dans l'espace, il est nécessaire de connaître le nombre de paramètres nécessaires au positionnement d'un solide S_1 par rapport à un référentiel S_0 muni d'un repère $R_0(O_0, B_0)$. Le solide S_1 est muni d'un repère $R_1 = (O_1, B_1)$.

Il est usuel en mécanique de considérer :

- les trois coordonnées du point origine du repère R_1 dans le repère R_0 définissant 3 translations ;
- les trois angles qui définissent la position de la base du repère R_1 par rapport à celle du repère R_0 , définissant 3 rotations.

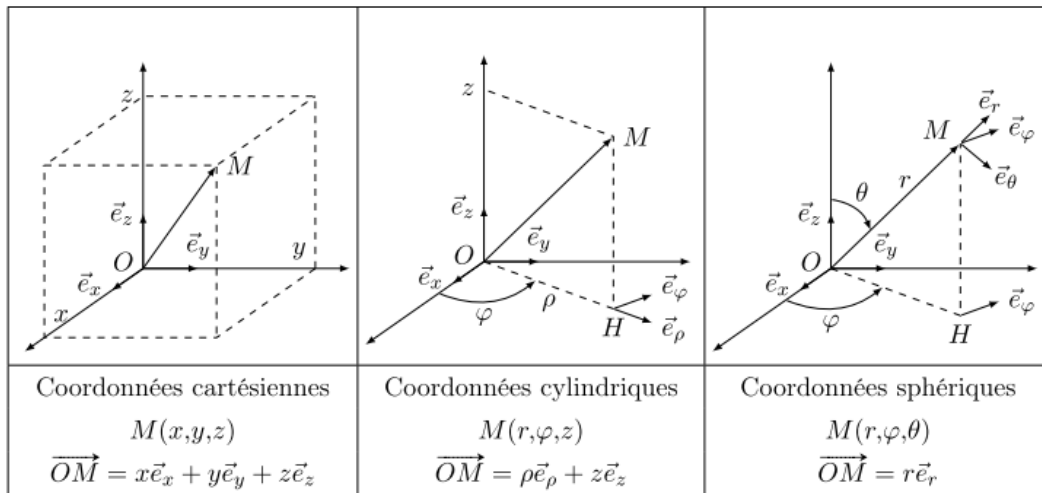


FIGURE 4 : Expressions d'un point M dans un repère à partir des 3 types de coordonnées

Quand un angle est défini, on lui associe une figure de calcul ou figure géométrale permettant de réaliser facilement des projections (cf. Annexes).

I.3.3 Degrés de liberté

6 paramètres sont donc nécessaires pour repérer un solide par rapport à un autre solide. On parle de **degrés de liberté**.

3 Rotations	3 Translations
R_x , rotation d'axe (A, \vec{x})	T_x , translation d'axe \vec{x}
R_y , rotation d'axe (A, \vec{y})	T_y , translation d'axe \vec{y}
R_z , rotation d'axe (A, \vec{z})	T_z , translation d'axe \vec{z}

TABLEAU 1: Possibilités de mouvement d'un solide dans l'espace

Ces possibilités de mouvement sont notées généralement dans un tableau à deux colonnes appelé

tableau des degrés de liberté

R_x	T_x
R_y	T_y
R_z	T_z

Une liaison entre deux solides supprime des degrés de liberté.

Pour caractériser ces liaisons, on définit un repère local $R = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à partir des caractéristiques géométriques des contacts (point, droite, centre, axe, normale...).

Ce repère est ensuite associé à chaque solide. On détermine alors les **possibilités de mouvements** autorisés entre les solides (d'un repère par rapport à l'autre), **sans changer la nature du contact**.

Le nombre de degrés de liberté d'une liaison entre deux solides est le nombre de **mouvements relatifs indépendants** que la liaison autorise entre ces deux solides **sans changer la nature du contact**. Ce nombre est égal au plus à 6. S'il est égal à 0, la liaison est appelée **liaison encastrement**. S'il est égal à 6 la liaison est dite **libre**.

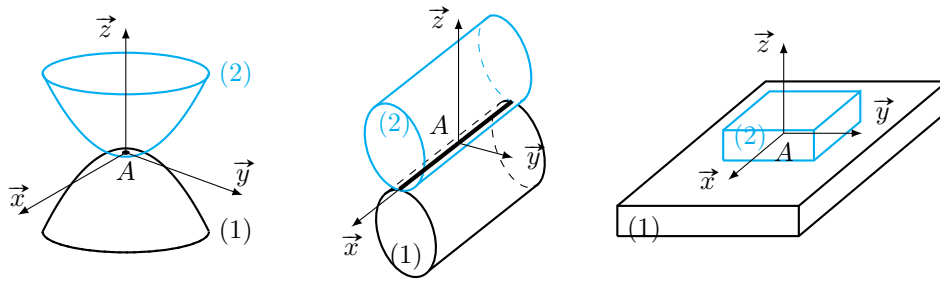


FIGURE 5 : Nature du contact et repère local associé

Un mécanisme ou système mécanique est un ensemble de solides reliés entre eux par des liaisons.

Application : support de cours.

I.4 Liaisons normalisées

I.4.1 Hypothèses de modélisation des liaisons

Les liaisons courantes rencontrées en mécanique sont normalisées par l'AFNOR. Un nom et une schématisation sont associés à chaque liaison. Ces liaisons sont considérées comme géométriquement parfaites, c'est à dire qu'elles vérifient les hypothèses suivantes :

- les pièces mécaniques sont des solides indéformables ;
- les surfaces sont géométriquement parfaites (FIGURE 6) ;
- les jeux sont nuls (FIGURE 7) ;
- le type de contact reste le même au cours du mouvement.

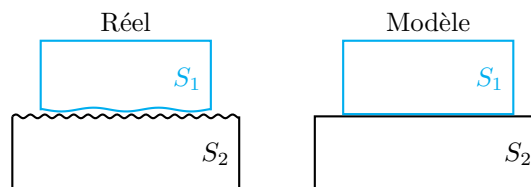


FIGURE 6 : Surface réelle (avec des défauts amplifiés) et modèle associé

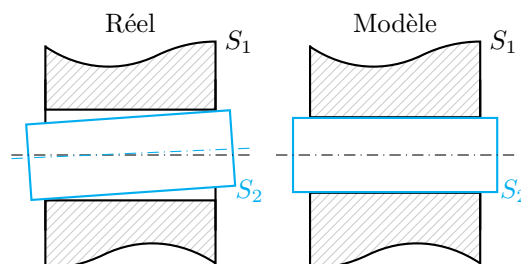


FIGURE 7 : Guidage réel avec jeu (avec des défauts amplifiés) et modèle associé

La liaison parfaite est donc une liaison théorique tant d'un point de vue géométrique que d'un point de vue de la nature physique du contact.

I.4.2 Liaisons élémentaires

Une liaison élémentaire entre deux solides S_1 et S_2 est obtenue à partir du contact d'une surface géométrique élémentaire liée à S_1 sur une surface géométrique élémentaire liée à S_2 . Les surfaces géométriques élémentaires obtenues à partir des principaux procédés d'usinage sont :

- le plan (par fraisage, tournage, lamage) ;
- le cylindre (par tournage, perçage, alésage) ;
- et la sphère (par tournage).

Le tableau 2 donne les différentes combinaisons de surfaces et les noms de 6 liaisons normalisées :

- contact plan/sphère : liaison ponctuelle ou liaison sphère-plan ;
- contact plan/cylindre : liaison linéaire rectiligne ou liaison cylindre-plan ;
- contact plan/plan : liaison appui plan ;
- contact cylindre/sphère : liaison linéaire annulaire ou liaison sphère-cylindre ;
- contact cylindre/cylindre : liaison pivot glissant ;
- contact sphère/sphère : liaison rotule ou liaison sphérique.



(a) Tournage : rotation de la pièce, translation de l'outil



(b) Fraisage : rotation et translation de l'outil

FIGURE 8 : Obtention des surfaces de contact par usinage

	Plan	Cylindre	Sphère
Sphère			
Cylindre			
Plan			

TABLEAU 2: Association de surfaces élémentaires

I.4.3 Liaisons composées

Une liaison composée est obtenue par association cohérente de liaisons élémentaires. Le tableau 3 donne quelques associations possibles.

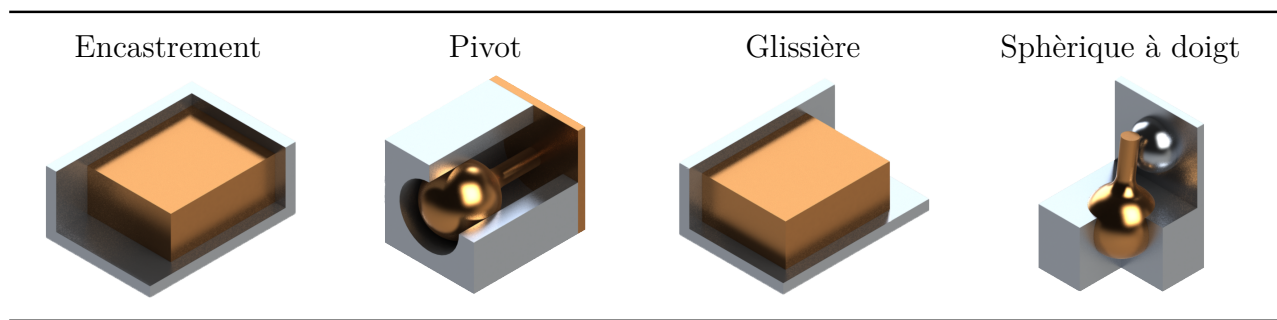


TABLEAU 3: Liaisons composées

I.4.4 Tableau des liaisons normalisées

Les liaisons retenues par l'AFNOR sont définies par leurs éléments géométriques. Il est alors aisé d'en déduire les degrés de liberté. L'ensemble est résumé dans le tableau 4 à **connaître par cœur**.

Nom de la liaison	Caractéristiques géométriques	Degrés de liberté	Schéma spatial (3D)	Schéma(s) plan(s) (2D)	Mouvement(s) possible(s)
Encastrement		0 ddl			$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$
Glissière	Direction \vec{x}	1 ddl		 	$\begin{vmatrix} 0 & T_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$
Pivot	Axe (A, \vec{x})	1 ddl		 	$\begin{vmatrix} R_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$
Hélicoïdale	Axe (A, \vec{x})	1 ddl		 	$\begin{vmatrix} R_x & T_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ <p>avec $T_x = k \cdot R_x$ $k = \frac{p}{2\pi}$ où p est le pas algébrique (positif ou négatif) en $\text{m} \cdot \text{tour}^{-1}$</p>

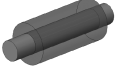
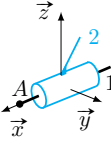
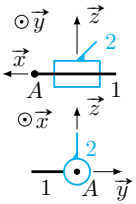

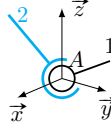
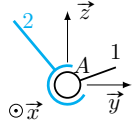

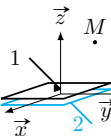
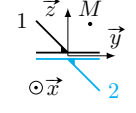

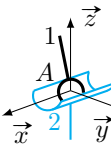
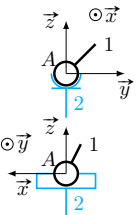
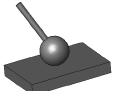
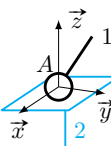
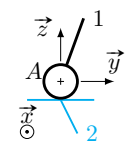

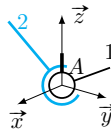
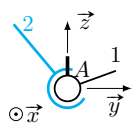

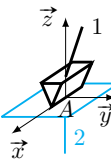
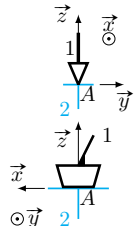
Nom de la liaison	Caractéristiques géométriques	Degrés de liberté	Schéma spatial (3D)	Schéma(s) plan(s) (2D)	Mouvement(s) possible(s)
Pivot glissant 	Axe (A, \vec{x})	2 ddl			$\begin{vmatrix} R_x & T_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$
Sphérique 	Centre de la sphère A	3 ddl			$\begin{vmatrix} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ R_z & 0 \end{vmatrix}$
Appui plan 	Normale au plan \vec{z}	3 ddl			$\begin{vmatrix} 0 & T_x \\ 0 & T_y \\ R_z & 0 \end{vmatrix}$
Sphère cylindre 	Centre de la sphère A Direction \vec{x}	4 ddl			En A $\begin{vmatrix} R_x & T_x \\ R_y & 0 \\ R_z & 0 \end{vmatrix}$
Sphère plan 	Point de contact A Normale au plan \vec{z}	5 ddl			$\begin{vmatrix} R_x & T_x \\ R_y & T_y \\ R_z & 0 \end{vmatrix}$
Sphérique à doigt 	Centre de la sphère A Normale au plan \vec{x} Direction du doigt \vec{z}	2 ddl			$\begin{vmatrix} R_x & 0 \\ 0 & 0 \\ R_z & 0 \end{vmatrix}$
Linéaire rectiligne (ou cylindre plan) 	Droite de contact (A, \vec{x}) Normale au plan \vec{z}	4 ddl			$\begin{vmatrix} R_x & T_x \\ 0 & T_y \\ R_z & 0 \end{vmatrix}$

TABLEAU 4: Tableau des liaisons normalisées

II Modélisation cinématique d'un mécanisme

Un mécanisme est un ensemble de pièces mécaniques (solides) reliées entre elles par des liaisons.

La définition d'un modèle du mécanisme nécessite la mise en place :

- des classes d'équivalence ou groupes de pièces sans mouvement relatif;
- des liaisons entre ces classes d'équivalence.

II.1 Classes d'équivalence

Une **classe d'équivalence cinématique** est un ensemble de pièces **qui n'ont aucun mouvement relatif** entre elles. Elles sont liées complètement entre elles (par des liaisons encastrement) et ont donc le même mouvement.

Afin d'identifier les classes d'équivalence, il faut rechercher les éléments assurant la suppression totale des degrés de liberté entre les pièces. Il peut s'agir par exemple de l'utilisation d'éléments filetés, d'un montage collé ou d'un assemblage monté serré. Dans la suite de cours, seuls les mouvements entre classes d'équivalence seront étudiés.

Remarque : si les plans techniques ou des représentations volumiques sont à disposition, il peut être pertinent de colorier chaque classe d'équivalence d'une couleur différente.

Règles à respecter pour la détermination des classes d'équivalence :

- les pièces qui se déforment (ressorts, amortisseurs...) ne sont pas prises en compte dans la modélisation des liaisons (FIGURE 9(a)) ;
- les éléments roulants des roulements (qui constituent chacun un groupe cinématique) ne sont pas pris en compte. On ne s'intéresse qu'aux bagues intérieure et extérieure (voir FIGURE 9(b)) ;
- on utilise les règles de dessin technique et la méthode de lecture d'un plan pour identifier les classes d'équivalence (le coloriage aide à la visualisation des classes d'équivalence) :
 - observer les éléments tels que les vis/écrous facilement repérable (FIGURE 10(a)), clavettes (FIGURE 10(b)), circlips (FIGURE 10(c))... qui regroupent deux pièces et forme une seule classe d'équivalence ;
 - identifier deux classes d'équivalence différentes séparées par des éléments de guidage (roulements, coussinets ...).

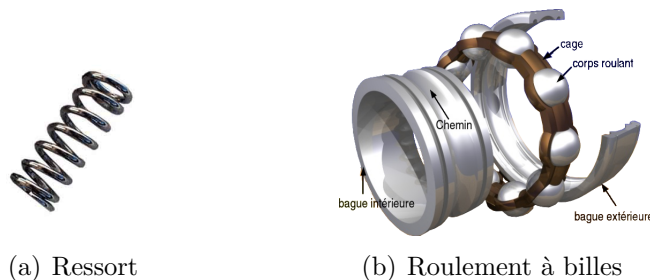
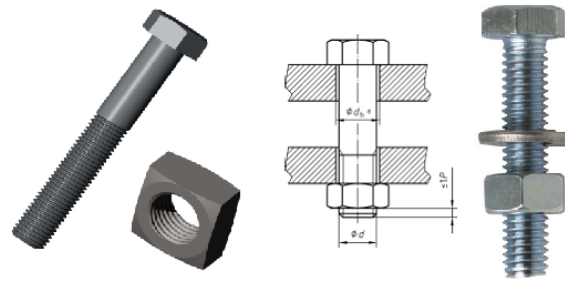
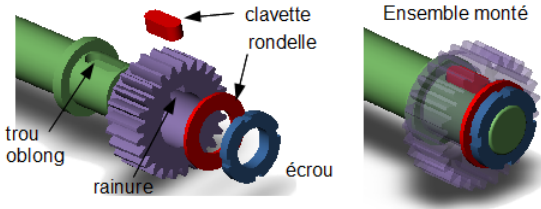


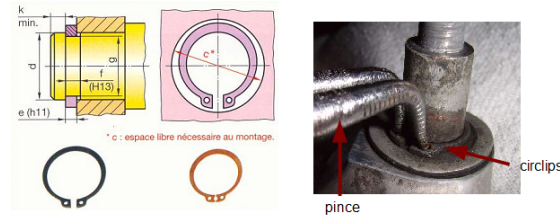
FIGURE 9 : Exemples de composants à ne pas prendre en compte



(a) Assemblage par système vis+écrou



(b) Blocage en rotation par clavette, blocage en translation par écrou à encoche



(c) Blocage en translation par anneau élastique – circlips

FIGURE 10 : Exemples d'assemblages de pièces entre elles (liaison encastrement)

II.2 Graphe de liaisons

II.2.1 Définition

Le graphe de liaisons est une représentation graphique qui répertorie les classes d'équivalence et les modèles de liaisons entre celles-ci (exemple FIGURE 11). Dans ce graphe :

- chaque classe d'équivalence cinématique est représentée par un cercle dans lequel le nom de la classe est indiqué ;
- chaque liaison est indiquée par un arc tracé entre deux classes d'équivalence. Pour chaque liaison, son nom et ses caractéristiques géométriques sont indiqués.

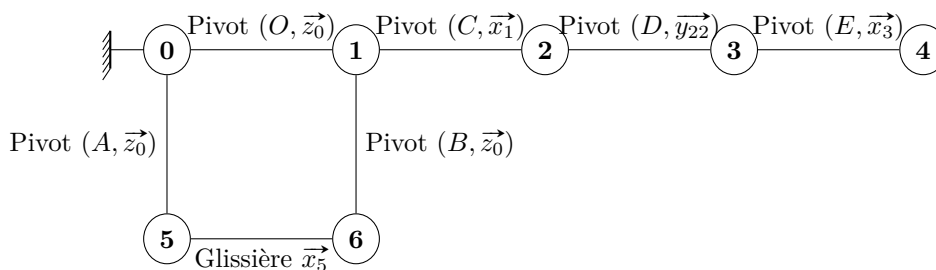


FIGURE 11 : Exemple de graphe de liaisons d'un mécanisme

Attention :

- une liaison existe chaque fois que deux classes d'équivalence ont des surfaces directement en contact ;
- on fait toujours l'hypothèse que les liaisons sont géométriquement parfaites ;
- pour les roulements, on adopte une modélisation particulière obtenue en considérant le jeu entre la bague intérieure et extérieure. On associe alors un modèle de liaison entre la bague intérieure et la bague extérieure. En observant la manière dont sont bloquées les bagues intérieures et extérieures, on peut en déduire une liaison entre les deux pièces que relie chaque roulement.

Pour établir un graphe de liaisons, il faut :

- déterminer les classes d'équivalence cinématiques (en coloriant les pièces) et dessiner un cercle par classe nommée ;
- rechercher les classes en contact direct ou reliées par des éléments roulants. Faire une liaison dans le graphe des liaisons entre les classes correspondantes ;
- pour chaque contact, déterminer les mouvements autorisés sans changer la nature du contact et en déduire le type de liaison à l'aide du tableau des liaisons normalisées ;
- nommer et caractériser chaque liaison sur le graphe des liaisons.

La construction du graphe de liaisons peut conduire à deux cas particuliers classiques :

- une *chaîne ouverte* (voir figure 12(a)) est constituée d'une association en série de solides (ou classes d'équivalence) et de liaisons. Chacune des liaisons est généralement motorisée et l'objectif de l'étude est de relier le mouvement du dernier solide (5) par rapport au bâti (0) en fonction des paramètres des liaisons et des caractéristiques géométriques constantes (les longueurs des pièces et les angles constants) ;
- une *chaîne fermée* (voir figure 12(b)) est constituée d'un ensemble de solides (ou classes d'équivalence) reliés par de multiples liaisons. Dans le cas d'une chaîne fermée simple, une unique boucle apparaît dans le graphe de liaisons et les paramètres ne sont plus indépendants. Le mécanisme étant motorisé au niveau de certaines liaisons où le mouvement est connu, l'objectif est de déterminer l'évolution des paramètres inconnus associés à une ou plusieurs autres liaisons.

Lorsque le modèle du mécanisme comporte plusieurs boucles, le modèle (ou même le mécanisme par extension) est dit à *chaînes complexes* (voir figure 12(c)).

Remarque : Dans la littérature, la chaîne ouverte est parfois appelée simplement « chaîne » et la chaîne fermée « boucle ». Ces deux termes sont moins classiques que les termes de chaînes ouvertes et fermées.

Application : support de cours.

III Représentation d'un modèle : le schéma cinématique

Le schéma cinématique d'un mécanisme est une figure plane ou spatiale qui permet :

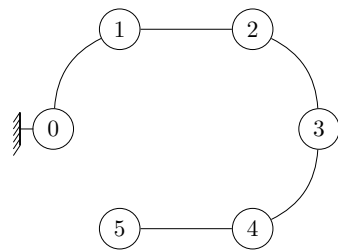
- d'aider à la compréhension du fonctionnement du mécanisme ;
- de mener des études théoriques (géométriques, cinématiques, dynamiques ...).

Il doit donc être représentatif du mécanisme réel.

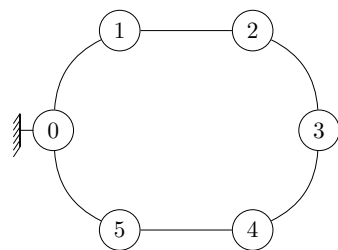
Le schéma cinématique est une représentation du graphe des liaisons au moyen des symboles des liaisons normalisées.

Méthode de construction d'un schéma cinématique :

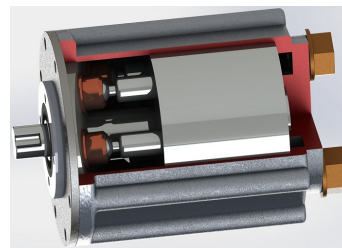
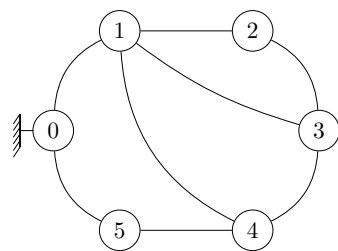
- choisir une représentation adaptée en utilisant les figures ou les vues données (2D : choix d'axes représentatifs ou 3D perspective isométrique en général) ;
- choisir une couleur par classe d'équivalence et mettre ces couleurs sur le graphe des liaisons ;



(a) Chaîne ouverte - exemple d'un robot

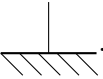


(b) Chaîne fermée simple - exemple de la ponceuse



(c) Chaînes complexes - exemple d'une pompe à pistons axiaux

FIGURE 12 : Graphe de liaisons et structure de mécanismes

- mettre en place les points, les axes, les normales... mis en évidence sur le graphe des liaisons en les positionnant comme sur les images données du mécanisme (photo, représentation volumique) ;
- mettre en place les symboles normalisés des liaisons autour de ces points, de ces axes en utilisant les caractéristiques des liaisons pour les déplacer si nécessaire (utiliser obligatoirement les deux couleurs des classes d'équivalence identifiées) ;
- relier les sorties des symboles pour reconstituer les classes d'équivalence (relier les couleurs entre elles) en respectant le parallélisme. Reporter les numéros des classes d'équivalence si besoin sur le schéma. Utiliser le symbole du bâti (pièce fixe) à plusieurs endroits si nécessaire .

Application : support de cours.

Remarque : certaines liaisons peuvent être regroupées en une seule liaison normalisée (on parle

de liaisons équivalentes). Dans ces conditions, le schéma cinématique est simplifié, on parle de schéma cinématique minimal. Le graphe des liaisons correspondant est alors dit minimal.

IV Modélisation plane

IV.1 Définition du mouvement plan

Le mouvement d'un solide S_2 par rapport à un solide S_1 est dit plan si il existe un plan Π_2 lié à S_2 qui reste coïncident avec un plan Π_1 lié à S_1 au cours du mouvement.

Exemple : essuie-glace Mercedes



Les plans représentés par des cadres sur la figure ci-dessus coïncident entre eux au cours du mouvement.

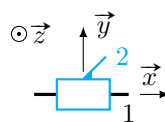
Conséquences : le paramétrage du solide S_2 par rapport au solide S_1 ne nécessite que **3 paramètres** (positionnement d'un point dans un plan ou dans l'espace) :

- 2 translations dans le plan ;
- 1 rotation d'axe perpendiculaire au plan (on parle d'articulation en un point donné dans ces conditions).

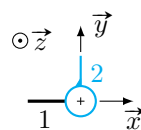
IV.2 Modèles de liaisons planes

Dans le cas d'un mouvement plan, compte tenu des mouvements possibles, on distingue :

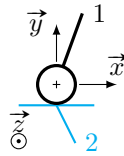
- la liaison glissière qui permet un mouvement de translation (ci-dessous, le symbole dans le plan de la liaison glissière d'axe \vec{x})



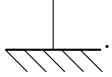
- la liaison pivot qui permet un mouvement de rotation (d'axe perpendiculaire au plan), on parle généralement d'articulation en un point (ci-dessous, le symbole d'une liaison pivot d'axe orthogonal au plan du mouvement)



- la liaison sphère-plan qui permet à la fois un mouvement de translation dans le plan et un mouvement de rotation d'axe perpendiculaire au plan (ci-dessous, le symbole dans le plan d'une liaison sphère-plan permettant une translation suivant l'axe \vec{x})



Le référentiel est représenté par le symbole ci-après. Le référentiel est aussi appelé bâti



En analysant les mouvements entre les solides qui constituent un mécanisme plan, on peut alors définir un schéma de mouvement à l'aide des symboles précédents.

IV.3 Schéma cinématique d'une modélisation plane

En modélisation plane uniquement :

- **on ne schématise pas des modèles de liaison** (on ne tient pas compte de la géométrie des contacts) ;
- on représente les **mouvements relatifs entre deux pièces dans le plan d'étude**.

Le schéma établi est donc un schéma de mouvement. Il utilise les symboles des liaisons préconisés par l'AFNOR, non pas comme tels, mais pour définir des mouvements relatifs. C'est là toute l'ambiguïté. Ce subtil distinguo demande beaucoup de vigilance. Il est utilisé pour simplifier les études théoriques.

Application : support de cours.

V Analyse géométrique d'un mécanisme

V.1 Construction géométrique

En utilisant l'hypothèse de solides indéformables et les degrés de liberté des liaisons, le modèle établi permet de construire le mécanisme dans différentes configurations, ce qui permet de déterminer le débattement angulaire d'une pièce, la course d'un solide en translation ...

Application : support de cours.

V.2 Paramétrage

Pour pouvoir déterminer le mouvement du mécanisme de manière systématique, il est nécessaire de définir un paramétrage qui permettra de mener différentes études.

Paramétrage des solides : à chaque solide, on associe un repère. Il est construit en prenant en compte les caractéristiques géométriques du solide et de ses liaisons avec les autres solides. On définit ensuite les distances entre les points particuliers de chaque solide.

Paramétrage des liaisons : on associe à chaque liaison autant de paramètres que de degrés de liberté. Pour chaque angle introduit, on réalise une figure géométrale qui permettra de mener des calculs justes et précis (cf. Annexe).

Exemple :

- liaison pivot : un paramètre angulaire ;
- liaison glissière : un paramètre de distance (les repères sont les mêmes).

Application : support de cours.

V.3 Loi entrée-sortie

L'objectif est de déterminer des relations entre les paramètres géométriques des solides et les paramètres des liaisons de manière à comprendre le fonctionnement du mécanisme.

On choisit un paramètre de liaison particulier appelé entrée (c'est généralement le mouvement piloté par un moteur ou un vérin linéaire) et on s'intéresse à un paramètre de liaison donné appelé sortie.

La loi entrée-sortie est une relation (souvent non linéaire) qui relie le paramètre de sortie aux paramètres d'entrée en ne faisant intervenir que les paramètres géométriques de définition des solides (longueurs fixes, angles fixes).

Elle est généralement obtenue à partir de la fermeture géométrique, qui se décompose en 2 fermetures selon l'aspect souhaité.

V.3.1 Aspect angulaire

On fait une **fermeture angulaire** (relation de Chasles sur les vecteurs de base, obtenue en parcourant les solides de la chaîne). Il est très rare que cet aspect soit utile.

Application : support de cours.

V.3.2 Aspect linéaire - Résolution analytique

On effectue une **fermeture linéaire** appelée aussi fermeture géométrique par abus de langage (relation de Chasles obtenue en passant par les points caractéristiques des différents solides et en parcourant la chaîne fermée).

On projette ensuite la relation vectorielle obtenues dans une base judicieusement choisie de manière à faire apparaître tous les paramètres (on choisit en général une base intermédiaire entre toutes les bases définies pour limiter les projections).

Méthodologie pour obtenir une loi entrée-sortie :

- à partir des équations projetées, si on souhaite déterminer une distance variable, on isole les cosinus et sinus des angles qui ne nous intéressent pas, on élève au carré et on utilise la relation de trigonométrie $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ou bien on utilise les relations $\sin(\arccos(\theta)) = \cos(\arcsin(\theta)) = \sqrt{1 - \theta^2}$;
- si on désire une relation entre les angles, on effectue le rapport des équations pour faire apparaître des tangentes ;
- on ne garde que les solutions mathématiques ayant un sens physique.

Dans certains cas, la manipulation des équations rend l'établissement d'une loi entrée-sortie très difficile. Dans ce cas, on a recourt à une résolution numérique des équations caractérisant le lien entre l'entrée e et la sortie s .

V.3.3 Aspect linéaire - résolution numérique

La méthode consiste à écrire la relation entrée-sortie sous la forme $f(e, s) = 0$ puis à choisir une liste de n valeurs $(e_i)_{i \in \{0, \dots, n-1\}}$ et chercher pour chaque valeur une solution approchée à l'équation $f(e_i, s) = 0$. On peut donc définir la fonction de la variable de sortie $f_{e_i}(s)$ dont on cherche les valeurs d'annulation. Au programme, deux méthodes de recherche des 0 d'une fonction sont présentées :

VI Recherche des 0 d'une fonction - résolution numérique d'équations de la forme $f(x) = 0$

On présente deux stratégies de résolution qui ont chacune leurs spécificités. Dans la suite on notera f la fonction pour laquelle on recherche \hat{x} la solution numérique du problème de recherche de 0 d'une fonction vérifiant $f(\hat{x}) = 0$. La résolution numérique consiste à calculer une valeur approchée \tilde{x} qui est calculée par un processus itératif et qui est telle que $\tilde{x} \simeq \hat{x}$.

VI.1 Méthode de résolution par dichotomie

La méthode par dichotomie est applicable aux fonctions continues et monotones sur un segment. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), s'il existe $g, d \in \mathbb{R}$ et $\hat{x} \in [g, d]$ tel que $f(\hat{x}) = 0$, alors $f(g)$ et $f(d)$ sont de signes opposés (et la réciproque est également vraie). La méthode calcule une valeur approchée \tilde{x} en répétant des phases d'approximations successives.

On suppose que l'on a accès (d'après la connaissance du problème) à deux valeurs g, d et une fonction f telles que $f(g) \cdot f(d) < 0$. On choisit également une valeur de tolérance `tol` telle que $\hat{x} \in [\tilde{x} - \text{tol}, \tilde{x} + \text{tol}]$. On répète alors les opérations suivantes :

- On définit le milieu du segment $[g, d]$ par $m = \frac{g+d}{2}$ et on calcule le signe de $f(g) \cdot f(m)$. Deux cas peuvent se présenter.
- Si $f(g) \cdot f(m) \leq 0$, alors d'après le TVI, \hat{x} est situé entre g et m . On recommence donc la première étape mais en remplaçant la première valeur de d par m . Ainsi on recommence la recherche sur l'intervalle $[g, (g+d)/2]$.
- Sinon, si $f(g) \cdot f(m) > 0$, alors cela signifie que $\hat{x} \in](g+d)/2, d]$ et on recommence la première étape en remplaçant g par m .
- On arrête l'algorithme et on renvoie le résultat $\tilde{x} = \frac{g+d}{2}$ si $d - g \leq 2\text{tol}$. En effet, puisque on est certains que $\hat{x} \in [g, d]$ le milieu du segment est bien dans l'intervalle $[\tilde{x} - \text{tol}, \tilde{x} + \text{tol}]$.

Cet algorithme trouve une solution de manière très rapide puisque l'on peut montrer que la solution est renvoyée en un nombre d'itérations de l'ordre de $\log_2(\frac{d-g}{\text{tol}})$.

```
1 def dichotomie(f,g,d,tol):
2     '''Retourne une approximation d'un zero de f par la methode
3     de la dichotomie. f supposee continue sur [g,d], a valeurs
4     dans R, telle que f(a)f(b)<=0. Calcul x tel que x soit un zero
5     de f a tol>0 pres.'''
6     fg=f(g)
7     fd=f(d)
8     assert fg*fd<=0
9     while d-g>2*tol:
10         m=(g+d)/2
11         fm=f(m)
12         if fg*fm<=0:
13             d,fd=m,fm
14         else:
15             g,fg=m,fm
16     return (g+d)/2
```

Cette méthode présente deux avantages principaux :

- Il est possible de choisir précisément la tolérance `tol` acceptée sur l'erreur d'approximation de \hat{x} et en déduire le nombre d'opérations à effectuer.

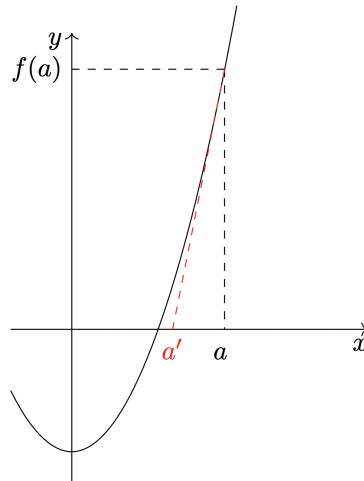
- Sous l'hypothèse que f est continue, et $f(g) \cdot f(d) < 0$, la méthode renverra toujours une solution approchée \tilde{x} proche de \hat{x} .

On présente maintenant une seconde méthode qui permet de réduire le nombre d'itérations avant terminaison de l'algorithme mais qui nécessite des conditions supplémentaires sur f pour fonctionner correctement.

VI.2 Méthode de Newton

La méthode de Newton utilise une information supplémentaire sur f pour accélérer la recherche de \hat{x} qui est sa dérivée f' . La stratégie consiste à choisir une valeur d'initialisation x_0 et à construire une suite de valeur $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ par le processus suivant :

Si on connaît x_i , on trace la tangente à f au point de coordonnées $(x_i, f(x_i))$. La prochaine valeur x_{i+1} correspond au point d'intersection entre cette tangente et l'axe des abscisses. On représente graphiquement ceci sur la figure ci-dessous en posant $a = x_i$ et $a' = x_{i+1}$.



Ainsi, l'équation de la tangente en $(x_i, f(x_i))$ est $y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$. Cette tangente intercepte l'axe des abscisses au point $(x_{i+1}, 0)$. En remplaçant dans l'équation de la tangente, on trouve $0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$, soit après manipulation de l'équation.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

En répétant ce calcul, on peut donc calculer itérativement les valeurs de la suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ jusqu'à obtenir une valeur telle que $|f(x_i)| < \text{tol}$ où tol est une valeur de tolérance qui permet de choisir quand la solution renvoyée \tilde{x} est telle que $f(\tilde{x})$ est suffisamment proche de 0.

```
1 def newton(f, derivee_f, x_0, tol):
2     x_i = x_0 # Uniquement vrai a la premiere
3     # iteration pour lancer la boucle
4     while abs(f(x_i)) > tol:
5         x_i = x_i - f(x_i)/derivee_f(x_i)
6     return x_i
```

Remarque : La méthode de Newton converge très rapidement en général mais elle ne fonctionne pas toujours. Les conditions de convergence de la méthode sont hors programme mais on retiendra que cela dépend de la capacité de l'ingénieur à choisir un point d'initialisation x_0 proche de \hat{x} ainsi que de propriétés sur la dérivée seconde de f .

VI.3 Application : Constitution d'une loi entrée-sortie numérique

Afin d'illustrer l'utilisation des deux méthodes précédentes, on s'intéresse au calcul numérique de la loi entrée sortie du correcteur statique de phares. Après mise en équation d'un problème, on a abouti à la relation :

$$(a - L_3 \cos(\theta))^2 + (\lambda - L_3 \sin(\theta) - c)^2 - L_2^2 = 0$$

Et on souhaite évaluer numériquement la loi entrée sortie $f(\theta, \lambda) = 0$. On procède en deux temps :

- On choisit et on calcule une liste de valeurs $L = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}]$ auxquelles on souhaite évaluer les θ_i vérifiant la relation $f(\theta_i, \lambda_i) = 0$ (En effet dans certains cas, il est très difficile d'exprimer θ en fonction de λ alors que cette formulation est directement accessible à l'issue de la combinaison des 2 équations projetées de la fermeture géométrique).
- Pour chacun des λ_i on cherche à calculer une valeur de θ qui permet de résoudre l'équation $f_{\lambda_i}(\theta) = f(\theta, \lambda_i) = 0$. On peut résoudre ce problème par dichotomie ou par la méthode de Newton si on sait calculer $\frac{df_{\lambda_i}(\theta)}{d\theta}$ la dérivée de $f_{\lambda_i}(\theta)$ par rapport à θ . On note θ_i la solution ainsi calculée pour λ_i
- On trace θ_i en fonction de λ_i la loi entrée-sortie calculée numériquement.

On illustre cet exemple avec le code ci-dessous

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 # On redefinit les fonction newton et dichotomie pour prendre en compte
4 # des fonctions de deux variables de la forme f(theta,lambda_i):
5 def dichotomie_theta(f,g,d,tol,lambda_i):
6     fg=f(g,lambda_i) # ici on fait la dichotomie selon beta
7     fd=f(d,lambda_i) # en fixant theta_i
8     assert fg*fd<=0
9     while d-g>2*tol:
10         m=(g+d)/2
11         fm=f(m,lambda_i)
12         if fg*fm<=0:
13             d,fd=m,fm
14         else:
15             g,fg=m,fm
16     return (g+d)/2
17
18 def newton_theta(f,derivee_f,x_0,tol,lambda_i):
19     x_i = x_0 # Uniquement vrai a la premiere
20     # iteration pour lancer la boucle
21     while abs(f(x_i,lambda_i)) > tol:
22         x_i = x_i - f(x_i,lambda_i)/derivee_f(x_i,lambda_i)
23     return x_i
24
25 # On definit egalement la fonction f telle que f(theta,lambda_i) = 0
26 def f(theta,lambda_i):
27     L3 = 0.074
28     a = 0.074
29     c = 0.052
30     return (a-L3*np.cos(theta))**2 +(lambda_i-L3*np.sin(theta)-c)**2 - L3**2
31 # et derivee_f_lambda la derivee de f selon theta a lbda_i fixe
32 # df(beta,lbda_i)/d theta
33 def derivee_f_lambda(theta,lambda_i):
34     L2 = 0.044
35     L3 = 0.074
36     a = 0.074
37     c = 0.052

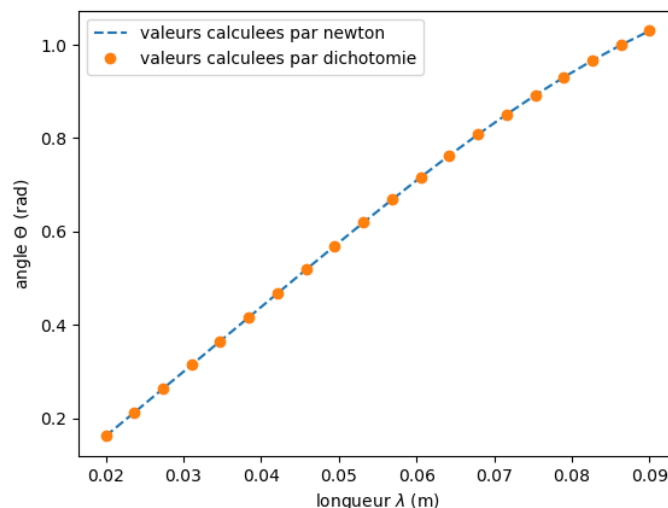
```

```
38     return +2*a*L3*np.sin(theta)-L3*2*np. cos(theta)*(lambda_i -c)
39 ##### Etape 1 : Calcul de L = [lambda_0,lambda_1,...] #####
40 n = 20 # nombre de valeur calculees
41 lbd_min = 0.020
42 lbd_max = 0.090
43 L = [lbd_min + i*(lbd_max-lbd_min)/(n-1) for i in range(n)]
44 # L contient n valeurs reparties entre 20mm et 30mm
45
46 ##### Etape 2 : on calcule theta_i pour chaque lambda_i #####
47
48 # On va parcourir chaque valeur de L et construire la liste L_theta des
49 # theta_i en utilisant les 2 methodes
50 L_theta_dicho,L_theta_newton = [],[]
51 x_0 = +np.pi/4 # valeur d'initialisation Newton
52 # valeurs d'encadrement dichotomie :
53 g = 0
54 d = +np.pi/2
55 tol = 0.000001
56
57 for i in range(len(L)):
58     lambda_i = L[i]
59     theta_i_newton = theta_i_newton = newton_theta(f,derivee_f_lambda ,x0 ,
60     tol, lambda_i)
61     L_theta_newton += [theta_i_newton]
62     theta_i_dicho = dichotomie_theta(f,g,d,tol,lambda_i)
63     L_theta_dicho += [theta_i_dicho]
```

Une fois les listes `L_theta_dicho` et `L_theta_newton` construites, on peut tracer la courbe de θ en fonction de λ avec les instructions.

```
1 plt.figure()
2 plt.plot(L,L_theta_newton,'--')
3 plt.plot(L,L_theta_dicho,'o')
4 plt.legend(['valeurs calculees par la methode de Newton','valeurs calculees
5     par dichotomie'])
6 plt.xlabel('longueur $\lambda$ (m)')
7 plt.ylabel('angle $\theta$ (rad)')
8 plt.show()
```

Ce qui permet d'afficher la figure ci-dessous qui montre que les deux méthodes fonctionnent correctement.



Annexe : Vecteurs, projections et produit scalaire

Les théories de la mécanique utilisent des grandeurs qui peuvent mathématiquement être représentées par des vecteurs (vitesse, position, accélération, force...). Ces vecteurs sont des éléments d'espaces vectoriels euclidiens sur \mathbb{R} de dimension 3 noté (E). Les grandeurs vecteurs sont intrinsèques, elles sont indépendantes de la base dans laquelle elles sont représentées. Ces espaces sont munis d'opérations définies ci-dessous.

I Définitions

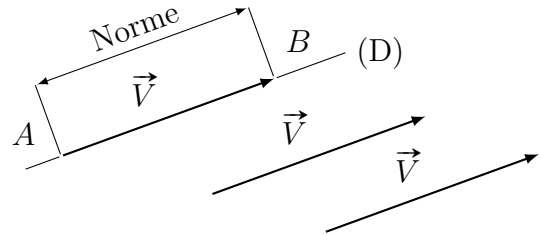
Soient deux points A et B . (A, B) est appelé un bipoint.

Un bipoint est défini par son origine A , son sens (de A vers B), sa direction (droite (AB)) et sa norme (distance de A à B).

Un vecteur est l'ensemble des bipoints équipolents (parallèles, même sens, même norme) au bipoint (A, B) .

Pour le vecteur, on définit :

- son support : la droite $(D) = (AB)$
- le sens : de A vers B
- sa norme : la distance de A vers B , notée $\|\vec{V}\|$.



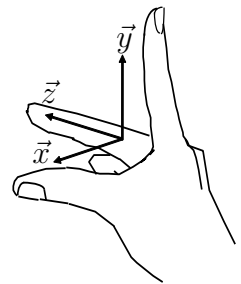
II Repérage des vecteurs

II.1 Base

L'association de trois vecteurs indépendants forme une base B de (E), noté $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Tout vecteur \vec{V} se décompose de manière unique sur cette base : $\vec{V} = v_x \vec{x} + v_y \vec{y} + v_z \vec{z}$.

II.2 Base orthonormée directe

On utilisera en Sciences de l'Ingénieur des bases orthonormées directes $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, c'est-à-dire des vecteurs orthogonaux, de même norme égale à 1. La base est directe si elle vérifie la « règle de la main droite ».



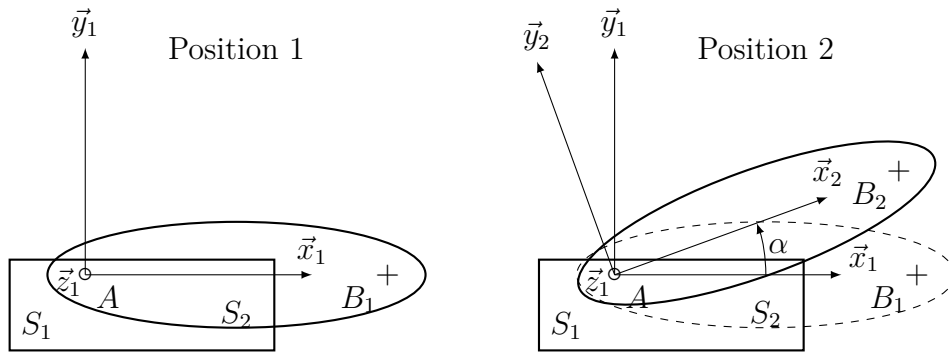
II.3 Expression d'un vecteur dans différents repères

Considérons un système de solides S_1 et S_2 liés par une articulation (pivot) de centre A et d'axe perpendiculaire au plan de la feuille. Considérons le point B appartenant au solide S_2 à une distance L de A . Le solide S_1 est fixe par rapport à la feuille. À l'instant t_1 le système est en position 1, considérons le vecteur $\overrightarrow{AB_1}$, puis à l'instant t_2 le système est en position 2, considérons le vecteur $\overrightarrow{AB_2}$. Pour caractériser ces deux vecteurs nous pouvons les exprimer dans une base (un repère). Le choix de la base est arbitraire, soit $R_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ base orthonormée définie sur la figure en position 1 ou $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ base orthonormée définie sur la figure en position 2.

Notons L la longueur du segment $[AB]$.

Dans la position 1, on a $\overrightarrow{AB_1} = L\vec{x}_1$ dans la base R_1 .

Dans la position 2, on a $\overrightarrow{AB_2} = L\vec{x}_2$ dans la base R_2 . Mais aussi $\overrightarrow{AB_2} = L \cos \alpha \vec{x}_1 + L \sin \alpha \vec{y}_1$ dans la base R_1 .



III Produit scalaire

III.1 Définition

Le **produit scalaire** de deux vecteurs est **nombre**, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ avec la norme du vecteur $\vec{u} : \|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ (idem pour \vec{v}).

III.2 Propriétés

Commutativité : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Distributivité : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Si $\vec{u} \parallel \vec{v}$ alors on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \varepsilon \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant l'orientation de \vec{u} et \vec{v} .

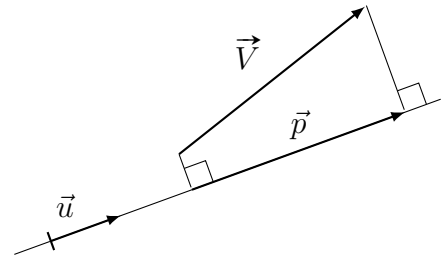
III.3 Expression analytique

Dans une base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on peut montrer que le produit scalaire entre \vec{u} et \vec{v} est défini par la relation entre les coordonnées :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

III.4 Interprétation géométrique

Soient \vec{p} la projection vectorielle d'un vecteur \vec{V} sur une droite de vecteur directeur \vec{u} (unitaire) alors $\vec{p} = (\vec{V} \cdot \vec{u}) \vec{u}$.



IV Changement de bases

Dans la pratique, la lecture de figure spatiale étant délicate, on se ramène toujours à des figures planes. Dans la plupart des cas, le passage d'une base à une autre est réalisé par **une rotation plane**.

Pour faciliter le calcul des projections, on utilise des figures géométrales appelées aussi figures de projection ou figures de calcul ou figures de changement de bases.

Ces figures seront toujours réalisées avec des angles positifs proche de 20° , le vecteur commun aux deux bases étant perpendiculaire à la feuille toujours dirigé vers le lecteur de la figure.

Les projections des différents vecteurs sont (à connaître par cœur et à savoir retrouver!) :

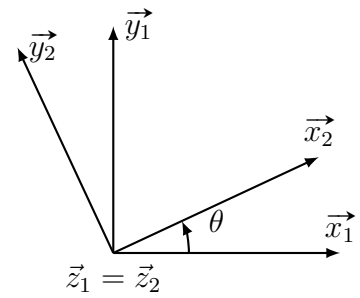
$$\vec{x}_2 = \cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{y}_1$$

$$\vec{y}_2 = \cos \theta \vec{y}_1 - \sin \theta \vec{x}_1$$

$$\vec{x}_1 = \cos \theta \vec{x}_2 - \sin \theta \vec{y}_2$$

$$\vec{y}_1 = \cos \theta \vec{y}_2 + \sin \theta \vec{x}_2$$

Pour éviter toute erreur, il est utile de vérifier ses formules de projection en $\theta = 0$ et $\theta = 90^\circ$.

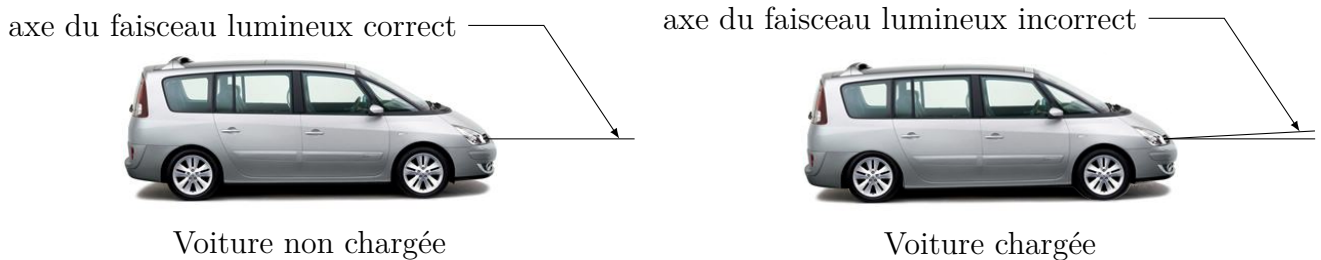


TD 1 – Correcteur statique de phares

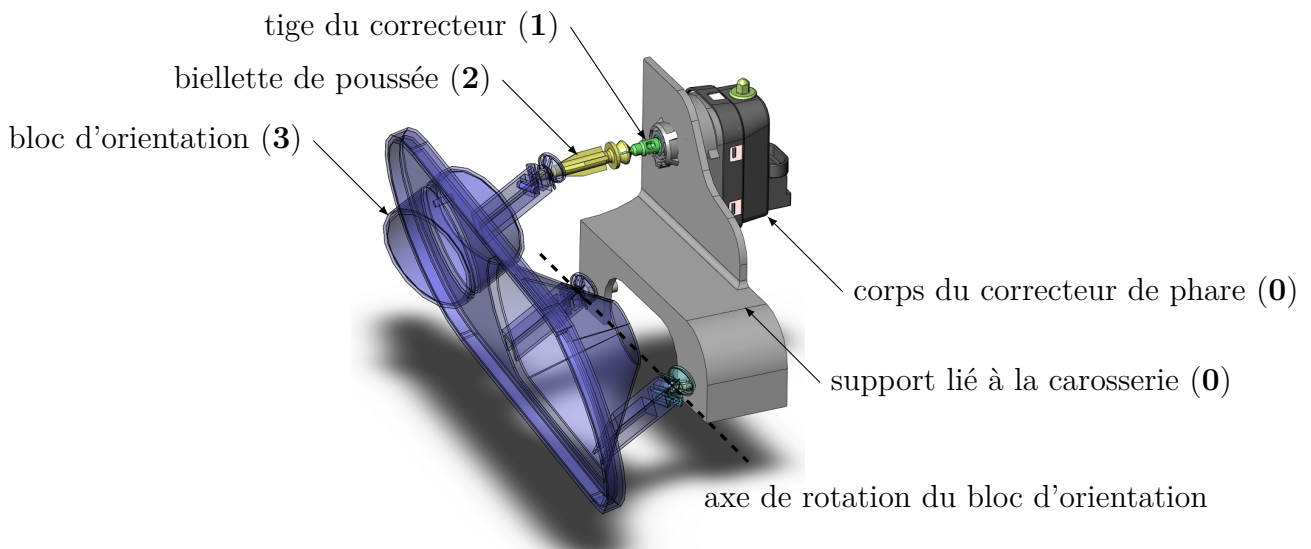
Présentation

Le support utilisé pour illustrer les différentes notions de la séquence 5 est un système de phare directionnel de Renault Espace IV assurant au faisceau lumineux une orientation horizontale fonction de l'assiette (inclinaison) du véhicule. L'assiette d'un véhicule est modifiée par la charge du véhicule, le profil de la route ou les conditions de conduite (phase de freinage ou d'accélération). Cette modification entraîne une variation d'inclinaison de l'axe du faisceau lumineux produit par les phares du véhicule. Ceux-ci peuvent alors éblouir d'autres conducteurs ou simplement mal éclairer la chaussée.

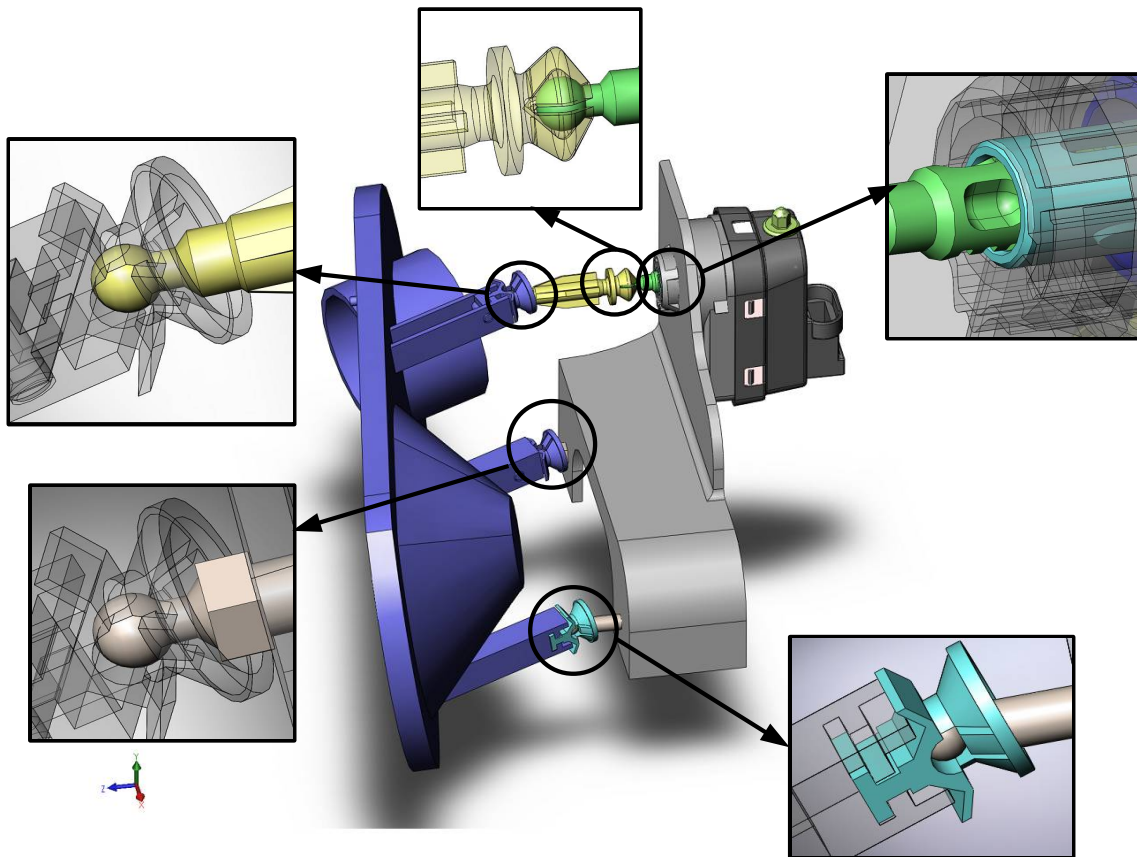
On utilise alors un correcteur de phare, pour gérer l'orientation des phares d'une voiture automobile depuis l'habitacle. Le système étudié est un correcteur de portée statique, qui corrige la portée lorsque le véhicule est à l'arrêt et conserve cette correction lorsque le véhicule roule (le correcteur de portée statique ne tient compte que de la variation d'assiette due à la charge). Des correcteurs de portée dynamiques existent, qui compensent à chaque instant les variations de l'assiette de la voiture.



Le système est constitué du bloc d'orientation (3) contenant les phares inclinable selon un axe pouvant être réglé, d'une bielle de poussée (2), du correcteur constitué d'un corps fixe par rapport au véhicule (0) et d'une tige (1) pouvant sortir ou rentrer par rapport au corps (0).



Détermination des liaisons



Q1. En analysant les surfaces de contact entre les solides, déterminer les mouvements possibles et en déduire les liaisons, entre les différents solides :

- liaison entre **(1)** et **(0)** :

- liaison entre **(2)** et **(1)** :

- liaison entre **(3)** et **(2)** :

- liaison 1 entre **(3)** et **(0)** :

- liaison 2 entre **(3)** et **(0)** :

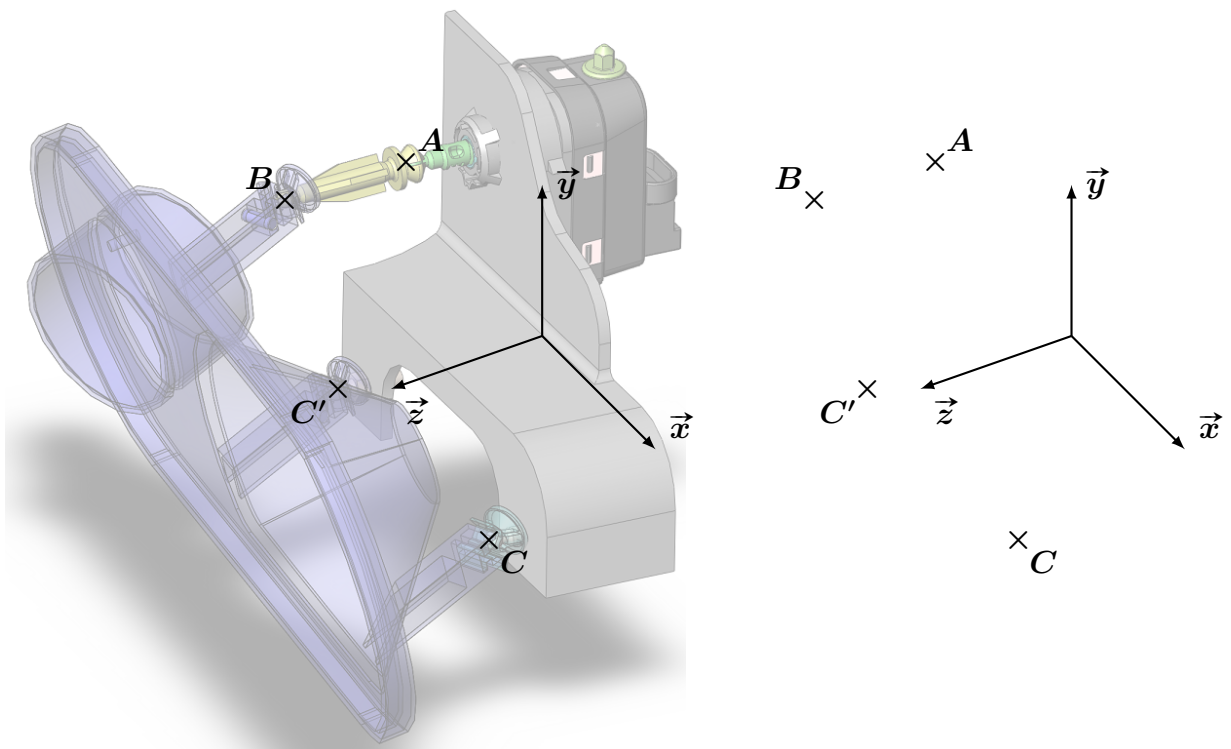
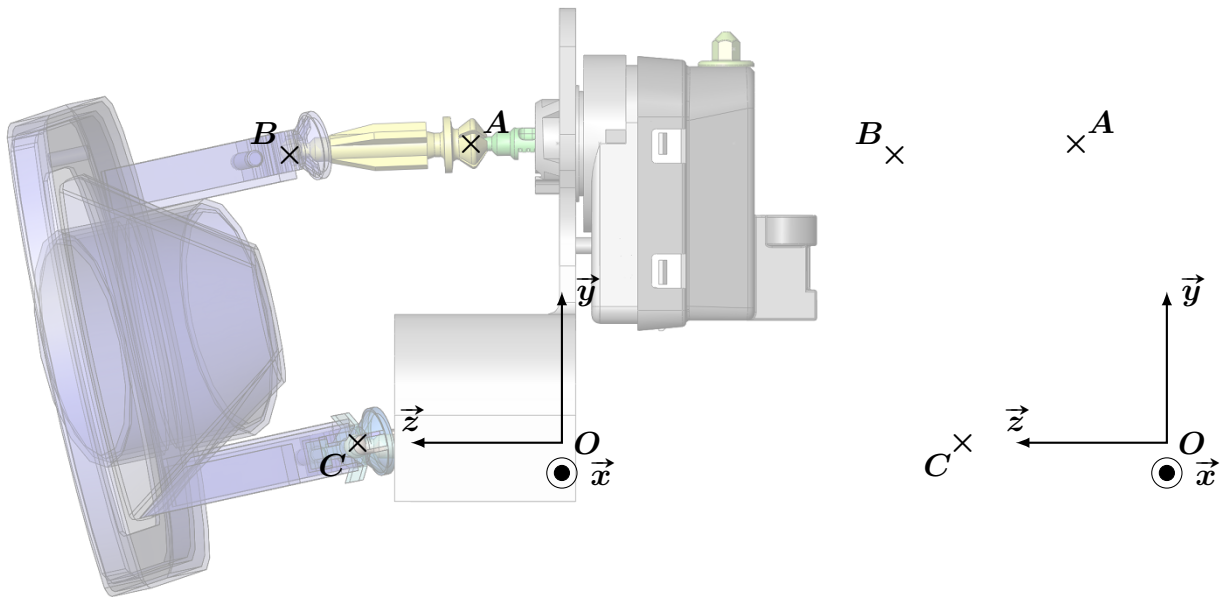
Graphe de liaisons

Q2. Construire le graphe de liaisons associé au modèle des liaisons du système d'orientation de phare déterminé précédemment.

Q3. Intuitivement, quelle est la liaison équivalente entre (3) et (0). Dessiner le graphe des liaisons correspondant.

Schéma cinématique

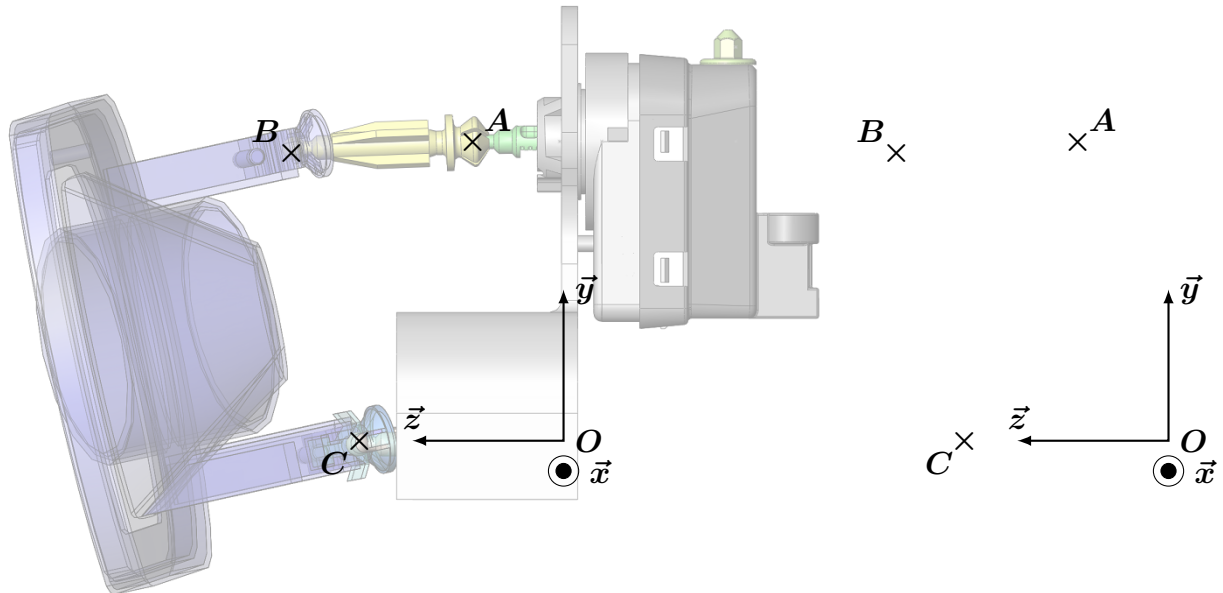
Q4. Réaliser le schéma cinématique en deux dimensions (2D) en utilisant le graphe des liaisons simplifié puis en perspective (3D) du système d'orientation de phare.



Modélisation plane

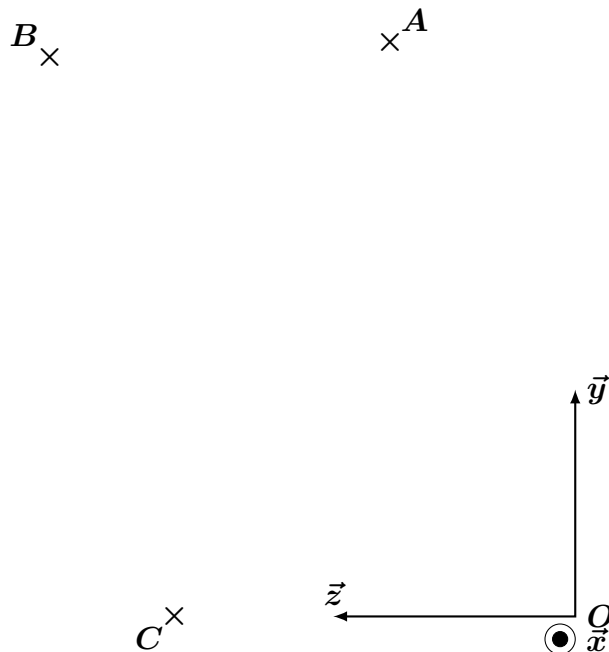
Q5. Justifier qu'une modélisation plane du système d'orientation du phare peut être définie dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) .

Q6. Réaliser le schéma cinématique plan du système d'orientation sur la figure ci-après.



Analyse géométrique

Q7. En supposant que la tige (1) sort de 4 mm, déterminer graphiquement la nouvelle position des points A, B et C (le schéma est à l'échelle 1). En déduire la variation de l'angle du correcteur.



Q8. Procéder au paramétrage sur le schéma cinématique plan réalisé précédemment. Réaliser les figures de changement de bases associées à chaque angle introduit.

Q9. Écrire la fermeture géométrique angulaire.

Q10. Écrire la fermeture géométrique linéaire.

Q11. Déterminer la loi entrée-sortie reliant le paramètre de translation de la tige (**1**) par rapport à (**0**) à l'angle de rotation du support (**3**) par rapport à (**0**).

Q12. Faire l'application numérique en relevant les valeurs sur la figure de la **Q7** et vérifier le résultat obtenu graphiquement de l'angle de rotation pour une sortie de tige de 4 mm.

TD 2 – Modélisation du mécanisme d'inclinaison des pales d'un hélicoptère

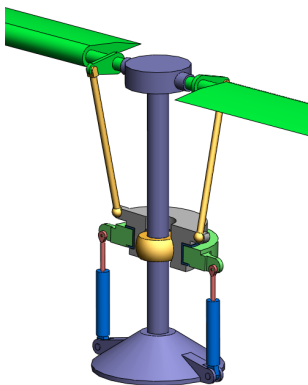
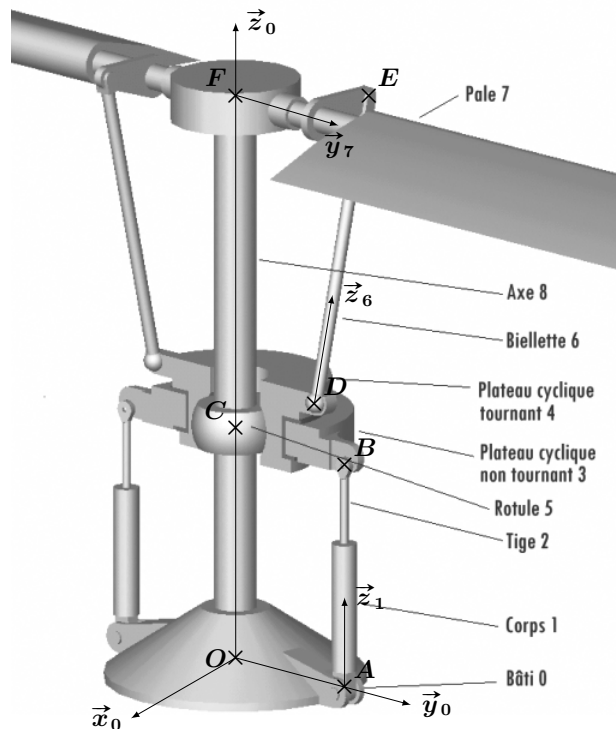
Rotor d'hélicoptère

Un hélicoptère crée sa portance grâce au mouvement de rotation du rotor principal (8) entraîné à l'aide d'une turbine.

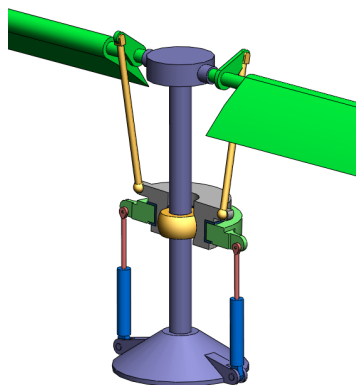
Pour permettre à l'hélicoptère de se déplacer suivant les différentes directions, les pales (7) prennent, suivant un axe radial, une incidence qui varie au cours de la rotation du rotor.

Le dispositif qui transmet les consignes du pilote et qui permet d'imposer cette variation d'incidence est le plateau cyclique (3 et 4) dont l'orientation est fixée par l'intermédiaire de plusieurs vérins hydrauliques (1 et 2).

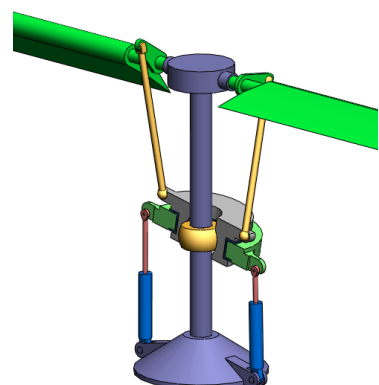
Les figures ci-dessous montrent l'inclinaison des pales en fonction de la position du plateau cyclique pour différentes phases de vie de l'hélicoptère.



Hélicoptère à l'arrêt - les pales sont en position horizontale (incidence nulle)

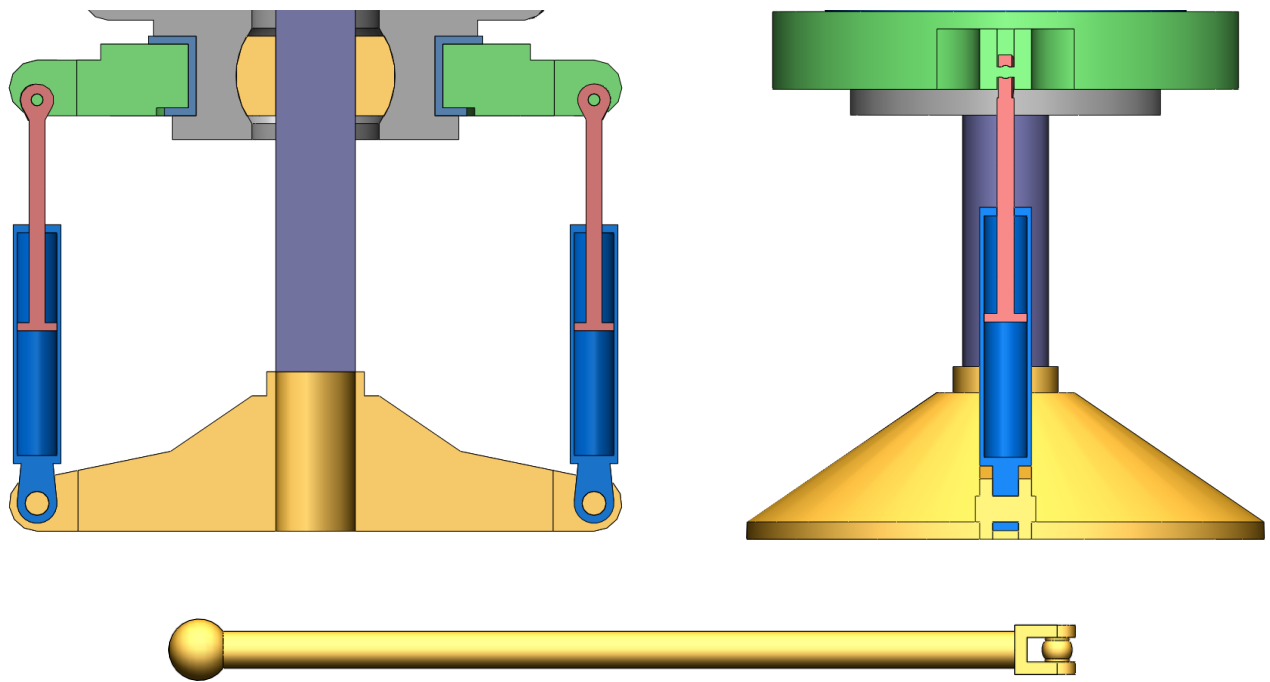


Hélicoptère en vol stationnaire - les pales présentent la même incidence

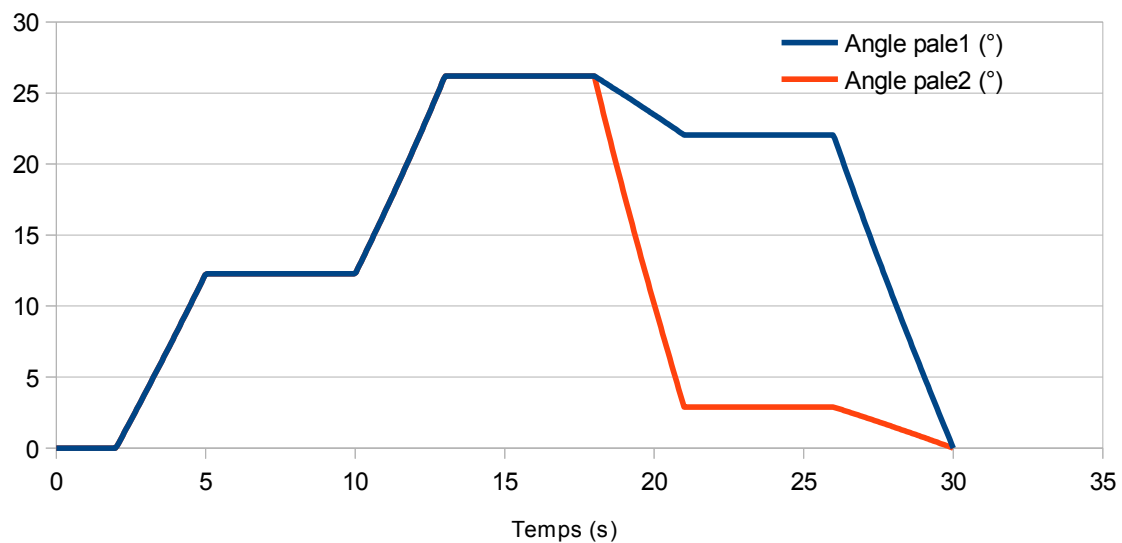


Hélicoptère en déplacement - les pales ne présentent pas la même incidence

Q1. En observant le mécanisme et les surfaces en contact, donner les liaisons entre les pièces 1 à 8 et tracer le graphe de liaisons. Vous utiliserez le paramétrage fourni sur la première figure.



Une fois le modèle mis en place, on peut le résoudre avec un logiciel de simulation numérique (SolidWorks + Meca3d par exemple). Une simulation a été conduite avec ce logiciel pour une évolution du déplacement des vérins donnés. L'évolution de l'angle des pales est donné sur la figure ci-dessous.



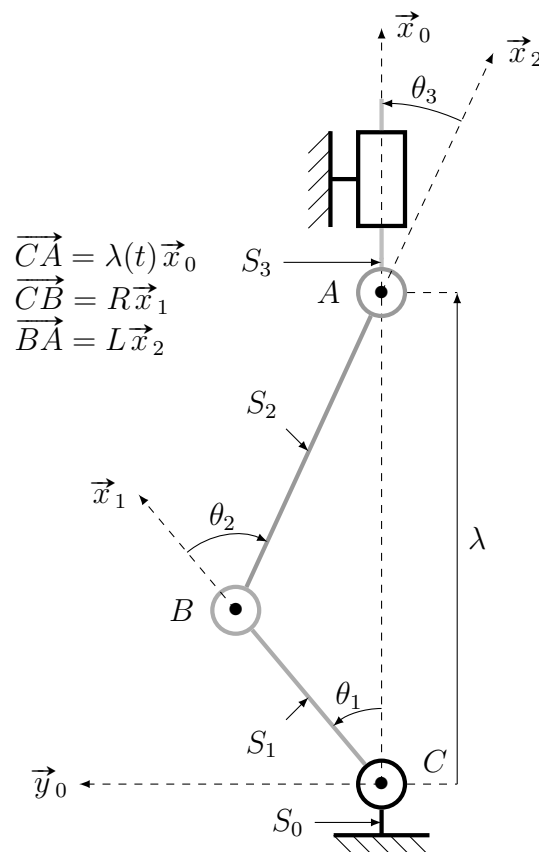
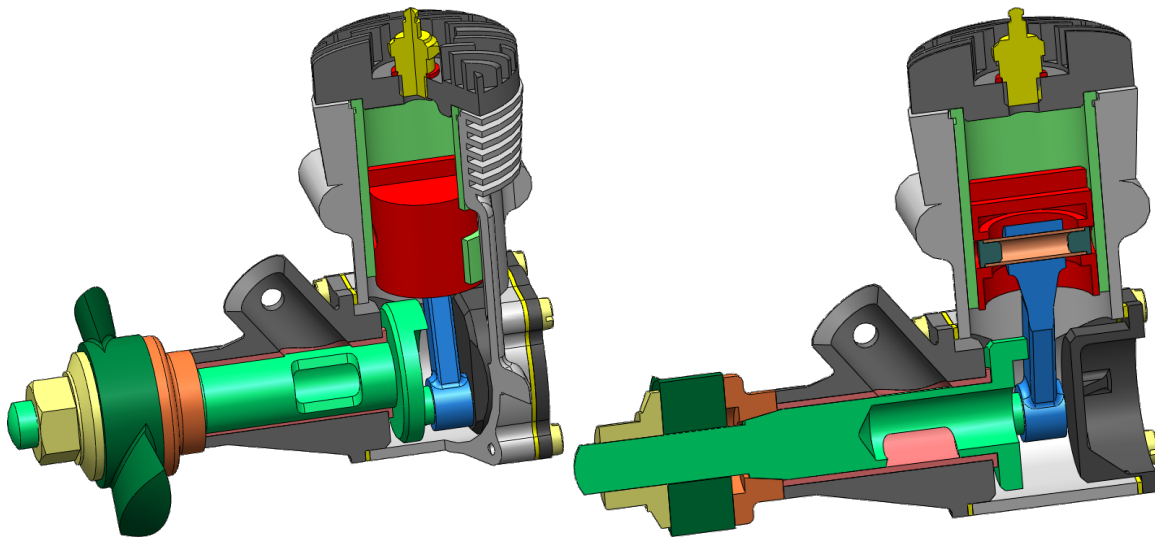
Q2. Déterminer le mouvement des tiges des vérins pour chacune des zones et donner le mouvement de l'hélicoptère en vous servant des explications de la page précédente.

TD 3 – Micro-moteur thermique

On étudie la cinématique d'un micromoteur thermique utilisé dans le modélisme.

Objectif

L'objectif du TD est de déterminer la loi entrée-sortie d'un micromoteur de modélisme, dont la modélisation est fournie, puis de choisir un des paramètres du moteur pour respecter la cylindrée souhaitée.



- Q1.** Représenter le mécanisme lorsque $\theta_1 = +\frac{\pi}{2}$ en vert, et lorsque $\theta_1 = +\pi$ en rouge.
- Q2.** Expliquer le principe de fonctionnement du moteur thermique à l'aide du schéma cinématique.
- Q3.** Tracer les figures de changement de bases (figures géométrales).
- Q4.** Réaliser la fermeture géométrique angulaire pour trouver une relation sur les différents angles.
- Q5.** Écrire la fermeture géométrique linéaire et en déduire la loi entrée-sortie reliant l'angle d'entrée θ_1 à la translation de sortie λ .

La cylindrée du micromoteur correspond au volume de fluide déplacé par le piston (S_3) pour une rotation complète (1 tour) du vilebrequin (S_1), en sachant que pendant un demi-tour il y a admission du mélange carburant + comburant, puis pendant le second demi-tour, il y a compression et échappement. La cylindrée souhaitée du moteur est de 6 cm^3 . On a $R = 10 \text{ mm}$ et $L = 35 \text{ mm}$.

- Q6.** Déterminer le diamètre D_P du piston permettant de respecter cette cylindrée. Pour augmenter la cylindrée, donner les moyens à notre disposition.

TD 4 – Machine à vapeur

On étudie le fonctionnement d'une machine à vapeur utilisée sur les maquettes de modèle réduit (FIGURE 1).



FIGURE 1 : Maquette de bateau propulsé par une machine à vapeur

Le mécanisme est constitué de 4 classes d'équivalence cinématique (voir FIGURE 2) :

- le bâti S_0 , qui est fixé sur le bateau, constitué du corps **1** et de la bague **8** ;
- le cylindre S_1 , qui reçoit la vapeur pour déplacer le piston, constitué du cylindre **2** et de l'axe de cylindre ;
- le piston S_2 , qui va mettre en mouvement le volant d'inertie ;
- le volant d'inertie S_3 , dont la rotation sera reliée aux aubes du bateau, qui est composé du volant **4**, de l'axe principal et de l'axe de volant.

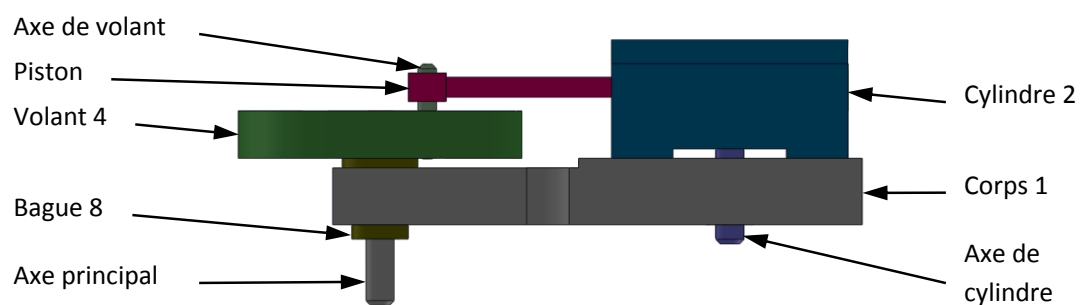


FIGURE 2 : Description du mécanisme de la machine à vapeur

Objectif

On souhaite déterminer le débattement angulaire du cylindre au cours du mouvement de manière à savoir où positionner les entrées/sortie de vapeur d'eau.

La modélisation de la machine à vapeur est donnée sur le schéma cinématique paramétré de la FIGURE 3.

Au bâti S_0 est associé le repère $R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On pose $\overrightarrow{AC} = L\vec{x}_0$.

Le cylindre S_1 est en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) avec le bâti S_0 . La liaison est paramétrée par l'angle $\theta_{01} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

Le piston S_2 est en liaison pivot glissant d'axe (A, \vec{x}_1) avec le cylindre S_1 . La liaison est paramétrée par le vecteur $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\vec{x}_1$.

Le volant S_3 est en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) avec le piston S_2 . La liaison est paramétrée par l'angle $\theta_{13} = (\vec{x}_1, \vec{x}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$. On pose $\overrightarrow{CB} = R\vec{x}_3$.

Le volant S_3 est en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_0) avec le bâti S_0 . La liaison est paramétrée par l'angle $\theta_{03} = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$.

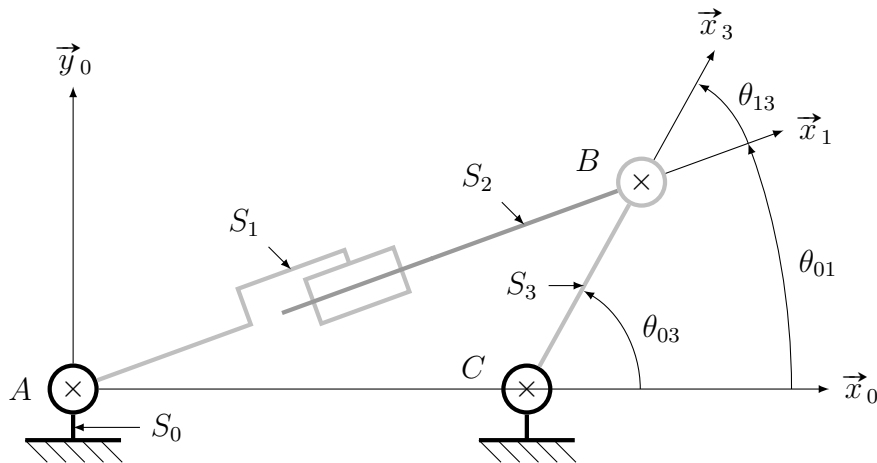


FIGURE 3 : Modélisation de la machine à vapeur et paramétrage

Q1. Tracer les figures de changement de bases (figures géométrales).

Q2. Réaliser la fermeture angulaire pour trouver une relation sur les différents angles.

Q3. Écrire la fermeture linéaire et en déduire la loi entrée-sortie reliant l'angle d'entrée θ_{03} à la translation de sortie λ en fonction de R et L .

Q4. Exprimer l'angle du cylindre S_1 , θ_{01} , en fonction de l'angle du volant S_3 , θ_{03} , de R et de L .

On suppose que $R = 10 \text{ mm}$ et $L = 74 \text{ mm}$.

Q5. À l'aide de votre calculatrice, déterminer le débattement angulaire maximal du cylindre (angle θ_{01}) lors de son mouvement d'oscillation (lorsque l'angle θ_{03} varie entre 0 et 2π).

Q6. Proposer une méthode graphique pour retrouver ce résultat et l'appliquer en reproduisant la géométrie du mécanisme à l'échelle 1.

TD 5 – Étude géométrique d'un ouvre barrière : le Sinusmatic

Présentation

La société ELLIPSE-INDUSTRIE commercialise une barrière télécommandée appelée SINUSMATIC. Le système SINUSMATIC permet l'ouverture ou la fermeture, dans un plan vertical, des barrières de parking et de péages d'auto-route.

La particularité de la barrière SINUSMATIC résulte de la cinématique brevetée de son renvoi d'angle qui transforme le mouvement circulaire continu d'un moto réducteur en mouvement oscillant d'un quart de tour.

L'entraînement est obtenu par un moteur électrique et un réducteur à engrenages (non représentés), dont l'arbre de sortie, noté AS, est lié à la manivelle $C1$. L'avantage de ce mécanisme est d'autoriser des temps de manœuvres très courts, sans choc aux extrémités de la course de la barrière. La séquence ci-dessous (FIGURE 1) permet d'observer le fonctionnement du système pour une rotation d'un tour de l'arbre d'entrée.

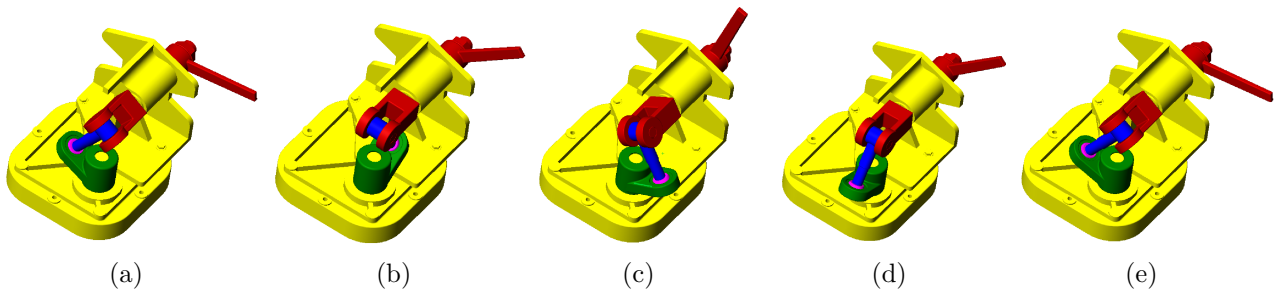
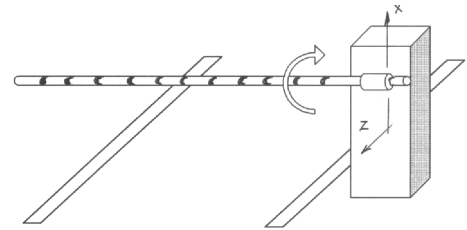


FIGURE 1 : Évolution de la sortie (barrière) pour un tour de l'arbre d'entrée (arbre de sortie du moto-réducteur)

Objectif

L'objectif de ce TD est de déterminer les conditions géométriques nécessaires pour que ce système vérifie la cinématique annoncée par le constructeur : ouverture/fermeture d'un quart de tour pour un tour complet de l'arbre de sortie du moto-réducteur.

Modélisation des contacts

Q1. À partir de la description, proposer un diagramme de la chaîne d'énergie partielle de l'ouvre barrière.

La FIGURE 2 donne un aperçu en perspective du mécanisme de transformation de mouvement et la FIGURE 3 précise les classes d'équivalence cinématique qui seront utilisées.

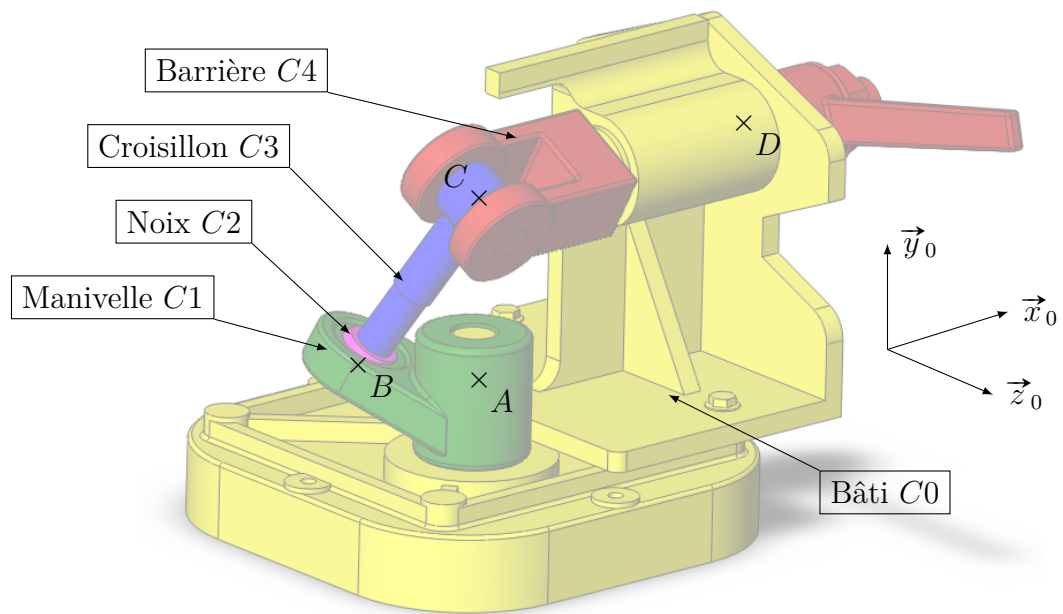


FIGURE 2 : Vue en perspective du Sinusmatic

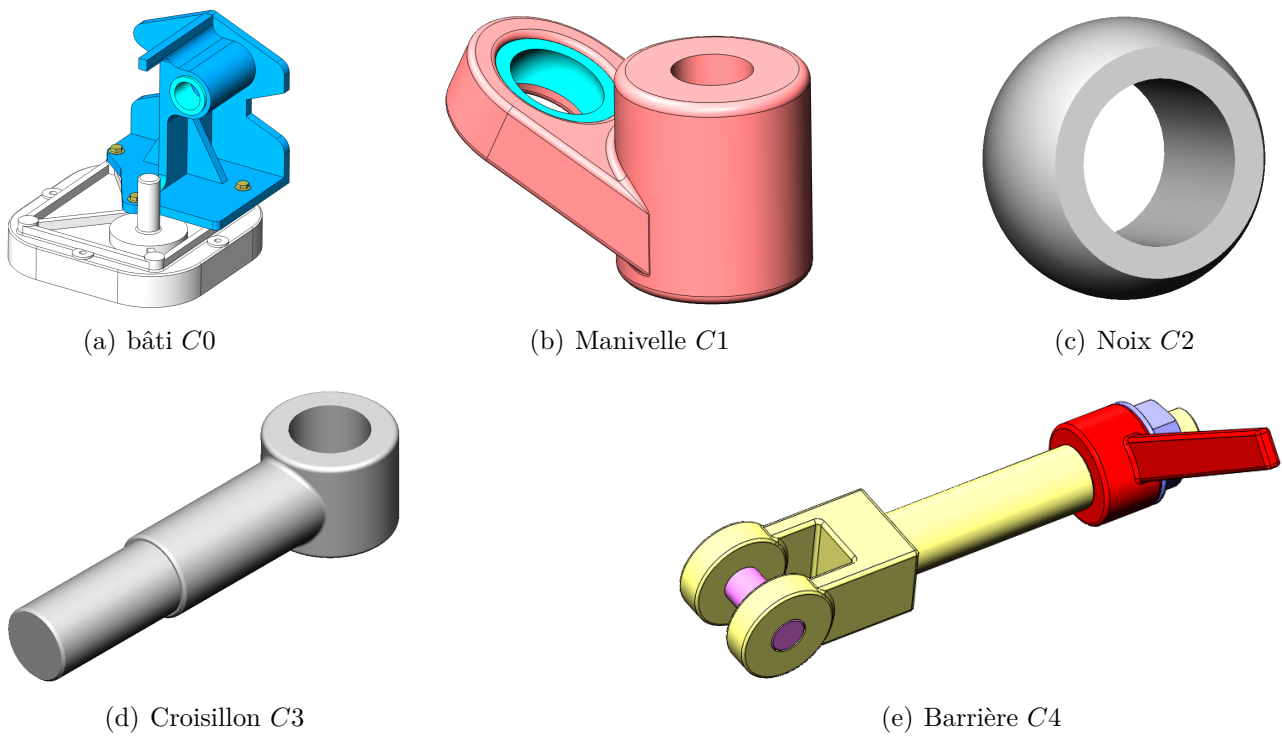


FIGURE 3 : Classes d'équivalence cinématique du Sinusmatic

La fonction du Sinusmatic est donc de transformer la rotation de l'arbre de sortie du moto-réducteur d'axe vertical (A, \vec{y}_0) par rapport au bâti, en une rotation d'axe horizontal de la barrière (D, \vec{x}_0) .

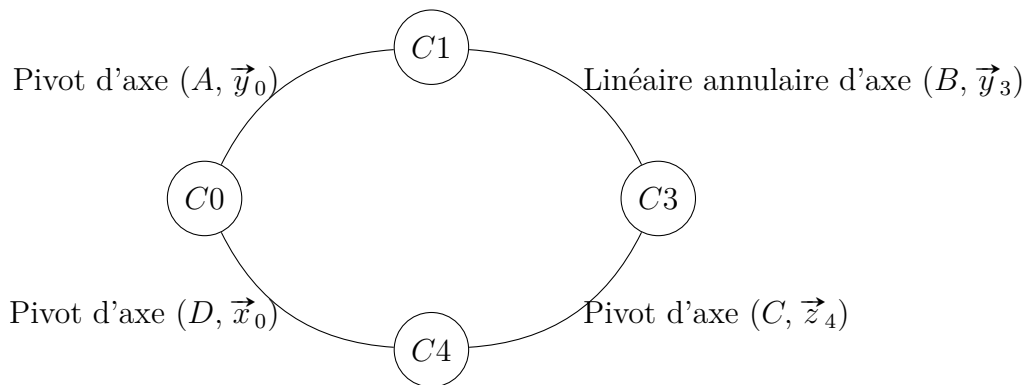
Q2. À partir des figures 2 et 3, déterminer le graphe des liaisons du Sinusmatic.

Q3. Sur la FIGURE 4 (page 37), réaliser le schéma cinématique spatial du Sinusmatic.

Modélisation du mouvement

Paramétrage

Une étude sur les liaisons équivalentes (notion qui sera traitée ultérieurement) a permis de simplifier le mécanisme :



Pour réaliser l'étude géométrique, on pose :

- $\mathcal{R}_0 = (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère associé au bâti $C0$;
- $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$ le repère associé à la manivelle $C1$ avec $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \alpha$;
- $\mathcal{R}_4 = (D, \vec{x}_0, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ le repère associé à la barrière $C4$ avec $(\vec{y}_0, \vec{y}_4) = (\vec{z}_0, \vec{z}_4) = \beta$;
- $\mathcal{R}_3 = (C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ le repère associé au croisillon $C3$ avec :
 - ◊ $(\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{y}_3, \vec{y}_4) = \theta$, le paramètre angulaire associé à la liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_4) entre $C3$ et $C4$,
 - ◊ $(\vec{z}_1, \vec{z}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3) = \gamma$, un des paramètres angulaires de la liaison linéaire annulaire d'axe (B, \vec{y}_3) entre $C1$ et $C3$;
- $\vec{AB} = R \cdot \vec{z}_1$, $\vec{AC} = L \cdot \vec{y}_0$ et $\vec{BC} = \lambda \cdot \vec{y}_3$.

Loi entrée-sortie

Q4. Réaliser les figures géométrales associées aux paramètres angulaires α , β , θ et γ .

Q5. Écrire la fermeture géométrique (linéaire) relative aux points A , B et C . En projetant cette fermeture dans la base \mathcal{B}_1 , montrer que la longueur λ et que l'angle γ sont constants et indépendant de l'angle θ . Pourrait-on le prévoir directement en observant le schéma cinématique ?

D'après le graphe des liaisons (chaîne fermée) et les figures géométrales (de changement de bases), on remarque qu'il est possible d'écrire le vecteur \vec{y}_3 dans la base \mathcal{B}_0 de deux façons différentes : en passant par la base \mathcal{B}_4 ou en passant par la base \mathcal{B}_1 .

Q6. Déterminer les deux expressions de \vec{y}_3 dans la base \mathcal{B}_0 et en déduire la relation entre le paramètre d'entrée α et le paramètre de sortie β (en fonction de l'angle γ).

Q7. En déduire la valeur de l'angle γ qui permet de respecter le cahier des charges : pour un demi-tour de l'arbre d'entrée du mécanisme (angle α), la barrière doit faire un quart de tour (angle β). Quelle relation a-t-on alors entre R et L ?

La particularité du système réside, en partie, dans la géométrie du croisillon qui impose une orthogonalité des axes \vec{y}_3 et \vec{z}_4 .

Q8. Écrire la relation d'orthogonalité entre les vecteurs \vec{y}_3 et \vec{z}_4 et montrer que l'on retrouve la loi entrée-sortie du mécanisme très rapidement.

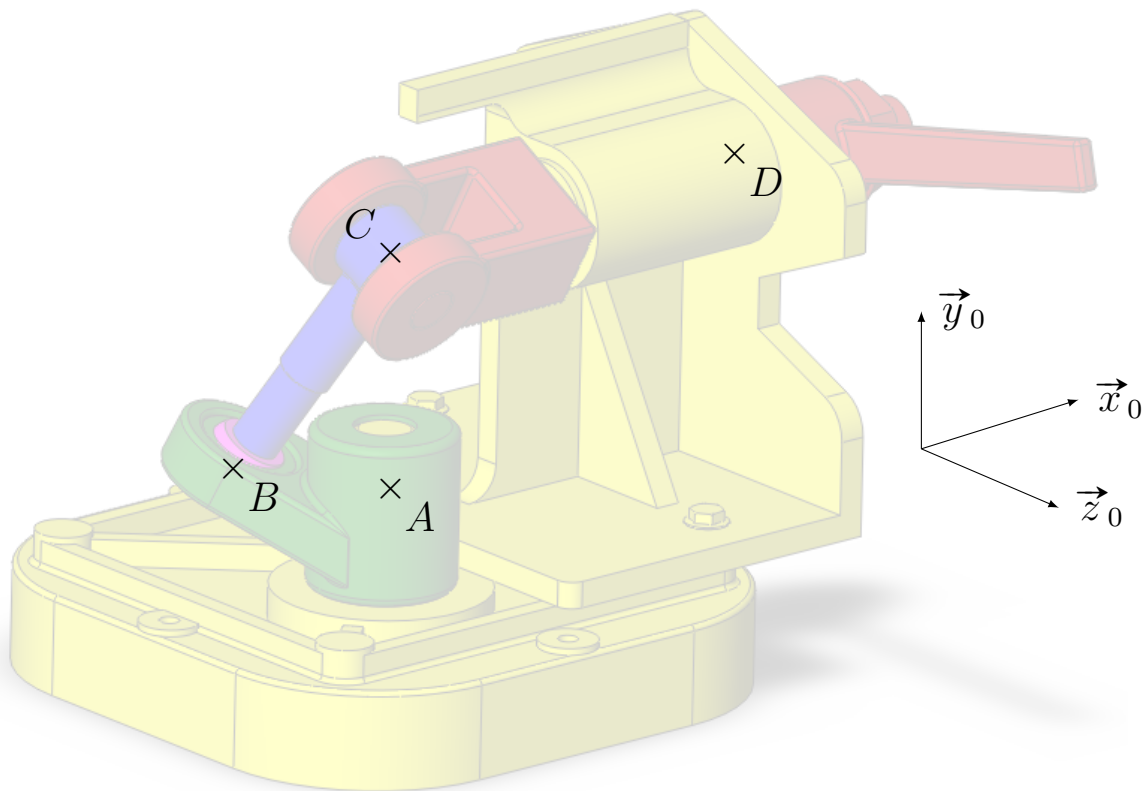
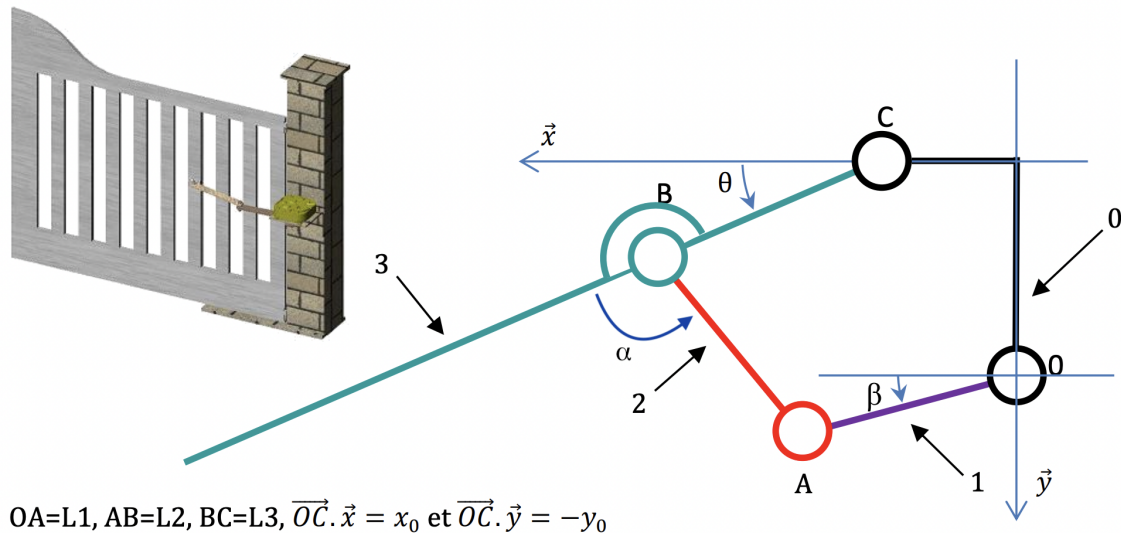


FIGURE 4 : Schéma cinématique spatial du Sinusmatic

TD 6 – Étude numérique du mouvement d'un portail

Ce TD est un préambule au TP étude numérique d'un portail. La première partie est une mise en équation du problème qui sera suivie d'une phase de résolution sur ordinateur.



On s'intéresse à un ouvre portail de type « 4 barres ». On souhaite connaître les lois entrée-sortie géométrique et cinématique ainsi que le temps d'ouverture du vantail (3). La résolution analytique de ce type de problème est possible mais longue à mettre en œuvre. Une solution numérique permet d'obtenir le résultat.

Le moteur monté sur l'axe (O, \vec{z}) entraîne la barre (1) à vitesse constante ω_{moteur} .

Q1. Représenter les différentes figures de changement de base

Q2. Montrer en effectuant une fermeture géométrique que l'on a la relation suivante

$$(L_1 \cos(\beta) - L_3 \cos(\theta) - x_0)^2 + (L_1 \sin(\beta) - L_3 \sin(\theta) + y_0)^2 - L_2^2 = 0$$

Q3. On désire calculer la loi entrée-sortie de ce mécanisme. Identifier la grandeur géométrique représentant l'entrée et celle qui représente la sortie.

Il est difficile de manipuler les équations afin d'exprimer la sortie en fonction de l'entrée dans l'expression précédente. On se propose donc de construire la loi entrée-sortie numériquement. On pose $f(\theta, \beta) = (L_1 \cos(\beta) - L_3 \cos(\theta) - x_0)^2 + (L_1 \sin(\beta) - L_3 \sin(\theta) + y_0)^2 - L_2^2$ et on va déterminer l'ensemble des couples (θ, β) tels que $f(\theta, \beta) = 0$.

Q4. Montrer qu'il existe des coefficients positifs A, B, C, D, E, F tels que

$$f(\theta, \beta) = A + B \cos(\theta) - C \sin(\theta) - D \cos(\beta) + E \sin(\beta) - F \cos(\theta - \beta)$$

On fournira l'expression de ces coefficients en fonction de L_1, L_2, L_3, x_0, y_0 .

Dans toute la suite, on prendra les valeurs $A = 0.195, B = 0.07, C = 0.175, D = 0.056, E = 0.14$ et $F = 0.196$ (toutes les grandeurs sont en m^2).