

MPSI – PCSI

# Sciences Industrielles de l'Ingénieur

## Séquence 9

## Transmetteurs

<b>A</b>	Analyser
<b>A3</b>	Appréhender les analyses fonctionnelle et structurelle
<b>A3-07</b>	Justifier le choix des constituants dédiés aux fonctions d'un système
<b>A3-11</b>	Identifier les constituants de la chaîne d'énergie réalisant les fonctions agir, alimenter, convertir, moduler, transmettre, stocker
<b>B</b>	Modéliser
<b>B1</b>	Identifier et caractériser les grandeurs physiques
<b>B1-01</b>	Qualifier les grandeurs d'entrée et de sortie d'un système isolé
<b>B1-02</b>	Identifier la nature (grandeur effort, grandeur flux)
<b>B1-03</b>	Décrire l'évolution des grandeurs
<b>B2</b>	Proposer un modèle de connaissance et de comportement
<b>B2-05</b>	Construire un modèle multiphysique simple
<b>F</b>	Communiquer
<b>F2</b>	Mettre en oeuvre une communication
<b>F2-01</b>	Choisir les outils de communication adaptés par rapport à l'interlocuteur
<b>F2-07</b>	Réaliser un schéma cinématique

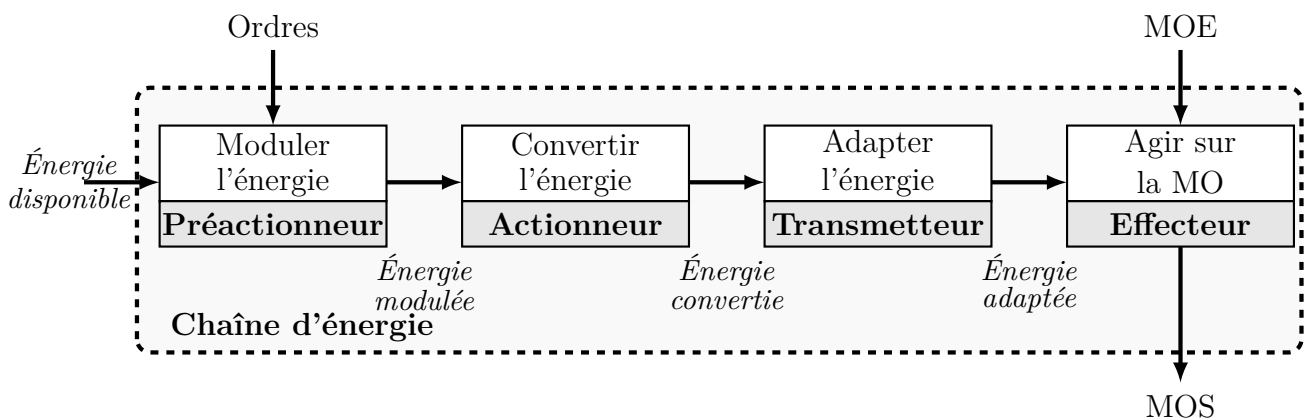
# Table des matières

<b>Cours</b>	<b>0</b>
I   Introduction . . . . .	1
I.1   Énergie mécanique de rotation $\leftrightarrow$ Énergie mécanique de translation . . .	1
I.2   Énergie mécanique de rotation $\leftrightarrow$ Énergie mécanique de rotation différente	2
II  Réducteurs . . . . .	4
II.1  Systèmes par engrenages . . . . .	4
II.2  Normalisation d'un engrenage . . . . .	5
II.3  Différents types d'engrenages . . . . .	5
II.4  Exemple : boîte de vitesses Renault PK6 . . . . .	6
III Trains d'engrenages . . . . .	7
III.1 Trains simples . . . . .	7
III.2 Train épicycloïdal . . . . .	7
 <b>TDs</b>	 <b>10</b>
TD 1	10
TD 2	13
TD 3	16
TD 4	20
 <b>Kholles</b>	 <b>26</b>
Kholle 1	26
Kholle 2	28
Kholle 3	30

# I Introduction

La chaîne d'action ou d'énergie comprend :

- des préactionneurs qui permettent de moduler (distribuer) le transfert d'énergie de la source d'entrée (énergie disponible) vers l'énergie d'entrée de l'actionneur (énergie modulée) ;
- des actionneurs (vérins, moteurs) qui convertissent une énergie électrique, hydraulique, pneumatique en énergie mécanique ;
- **des transmetteurs qui adaptent et transmettent l'énergie ;**
- des effecteurs qui agissent directement sur la matière d'œuvre.



## I.1 Énergie mécanique de rotation ↔ Énergie mécanique de translation

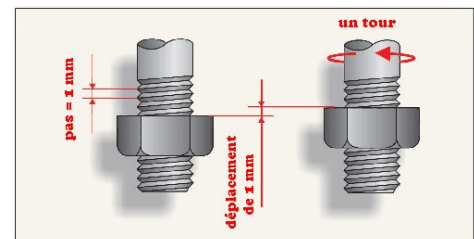
### I.1.1 Système vis-écrou

La cinématique du système vis-écrou est définie par le **pas de la vis**, noté  $p$ , exprimé en mm/rad ou en mm/tour, qui correspond à la distance entre deux filets successifs, et le sens de l'hélice par la relation

$$V_{\text{vis/écrou}} = \frac{p}{2\pi} \omega_{\text{vis/écrou}}$$

si le pas est à droite. Une augmentation du nombre de filet permettra une diminution du pas.

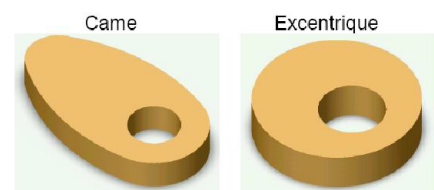
Remarque : le pas d'une vis est à droite, si le filet monte à droite lorsque l'on tient la vis verticalement.



### I.1.2 Système de came ou excentrique

La **loi entrée-sortie** (relation entre l'angle de rotation de la came et la translation générée) **est fonction du profil de la came** (généralement défini en coordonnées polaires). Les systèmes varient en fonction de la position de l'axe de translation par rapport à l'axe de rotation. Les systèmes à excentriques reposent sur le même principe. La rotation continue d'entrée est transformée en translation alternative de la sortie.

Exemple : Gestion du déplacement des soupapes dans un moteur à explosion.

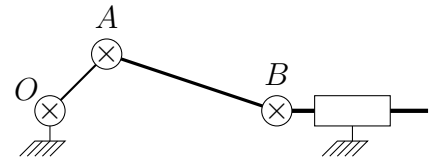




### I.1.3 Système à bielle-manivelle

Le système le plus connu (utilisé, entre autres, dans les moteurs thermiques) est le système bielle-manivelle. La longueur de l'excentricité sur la manivelle (ou excentrique, OA) et la longueur de la bielle (AB) jouent sur la relation entre l'angle de la manivelle et la translation de la tige.

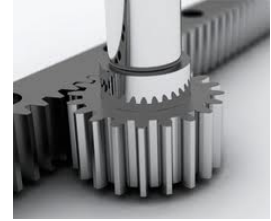
Exemple : moteur à explosion où le vilebrequin correspond à la manivelle.



### I.1.4 Système pignon-crémaillère

Cette transformation fait partie de la famille des engrenages (cf partie suivante). La vitesse de translation de la crémaillère est fonction du diamètre de la roue dentée,  $V_{\text{crémaillère}} = R \cdot \omega_{\text{pignon}}$ .

Exemple : système de direction des véhicules.

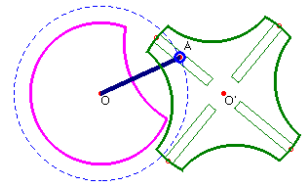


## I.2 Énergie mécanique de rotation $\leftrightarrow$ Énergie mécanique de rotation différente

### I.2.1 Croix de malte

Ce système est utilisé pour des applications de transfert et permet de **transformer une rotation continue en rotation discontinue**. Il permet donc de faire tourner un moteur de manière continue afin de produire un mouvement de rotation discontinue en limitant le nombre de phases de démarrage/arrêt du moteur qui sont un des facteurs d'usure des moteurs.

Exemple : Capsuleuse de bocaux.



### I.2.2 Joints de transmission ou accouplements mécaniques

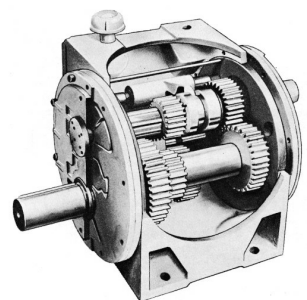
Plusieurs solutions permettent de **transmettre un mouvement de rotation entre deux arbres concourants**. L'homocinétisme (vitesse de sortie constante pour une vitesse d'entrée constante) est parfois recherché. Le joint de cardan (figure ci-contre) n'est pas homocinétique tandis que le joint tripode l'est quasiment et le joint Rzeppa l'est complètement.

Exemple : joints de cardan dans les roues directrices des voitures.



### I.2.3 Réducteurs de vitesse de rotation

Les réducteurs permettent d'**adapter le couple et la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée en un couple et une vitesse de l'arbre de sortie**. La vitesse de rotation d'un moteur est souvent élevée et le couple faible alors que la vitesse souhaitée sur l'arbre récepteur est beaucoup plus faible et le couple bien plus élevé.



On peut classer les réducteurs en différentes catégories en fonction de la technologie employée pour transmettre le mouvement :

- transmission par adhérence

Exemple : roues à friction (dynamo de vélo), système poulies-courroie.

- transmission par obstacle

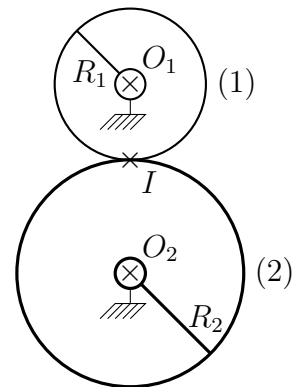
Exemple : poulies-courroie crantée (courroie de distribution d'une voiture), chaîne (vélo, moto), système à engrenages (boîte de vitesses).

Nous détaillerons dans la suite les différents systèmes et consacrerons une partie spécifique aux engrenages.

### I.2.4 Roues de friction

On appelle transmission par **roue de friction** un mécanisme constitué de **deux roues roulant sans glisser l'une sur l'autre**. On trouve ce type de transmission sur l'alternateur et la roue d'un vélo. En utilisant la relation de roulement sans glissement au point de contact  $\vec{V}_{I,2/1} = \vec{0}$  entre les deux roues, on montre que :

$$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{-R_1}{R_2}$$



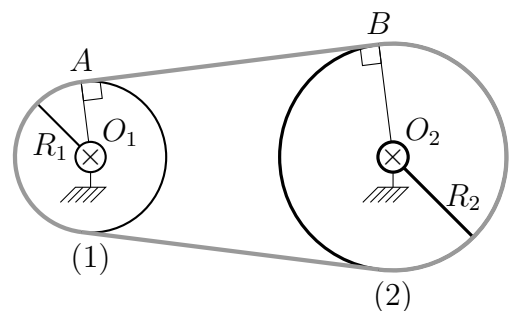
L'inconvénient de ce type de transmission est que le rapport n'est certain que s'il y a réellement roulement sans glissement. Pour assurer le non-glissement, il est nécessaire d'avoir un coefficient de frottement et un effort presseur entre les deux roues importants.

Dans les mécanismes à friction conique, il faut également assurer la coïncidence des sommets des cônes.

### I.2.5 Poulies-courroie ou chaîne

Une alternative à l'utilisation de roues de friction est l'emploi d'une courroie (lien souple inextensible) reliant deux poulies à axes de rotation parallèles. Du fait de l'inextensibilité de la courroie, les vitesses de tous ses points ont la même norme. Si la courroie ne glisse pas sur les poulies, on en déduit le rapport de réduction du système poulies-courroie :

$$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{R_1}{R_2}$$



Cette relation n'est valable que s'il y a non glissement entre la courroie et les poulies, ce qui nécessite un coefficient de frottement élevé et un système permettant de tendre constamment la courroie.

Pour augmenter le couple transmissible par un tel système, on utilise des courroies crantées qui suppriment le glissement (courroie de distribution dans les moteurs 4 temps) ou encore des chaînes (moto, vélo ...).



FIGURE 1 : chaîne de synchronisation



FIGURE 2 : Courroie crantée de transmission

## II Réducteurs

### II.1 Systèmes par engrenages

Les engrenages sont constitués de roues dentées engrenant l'une avec l'autre. Chaque roue est en rotation autour d'un axe. La transmission de mouvement entre les deux roues se fait par obstacle (contact entre les différentes dents).

Les systèmes par engrenages ont pour fonction de transmettre la puissance mécanique et d'adapter la vitesse de rotation et le couple transmissible.

Engrenage à axes parallèles		Engrenage à axes concourants ou engrenages coniques
Denture droite	Denture hélicoïdale	

On appelle engrenage « non gauche » un mécanisme constitué de 2 roues dentées, cinématiquement équivalent à deux roues de friction.

On appelle communément « pignon » la roue dentée la plus petite et « roue » la roue dentée la plus grande.

Un engrenage « non gauche » est donc équivalent à deux roues de friction théoriques qui roulent sans glisser l'une sur l'autre. Ces roues sont qualifiées de surfaces primitives.

On appelle **rayons primitifs**  $R_1$  et  $R_2$  les rayons des roues de friction équivalentes.

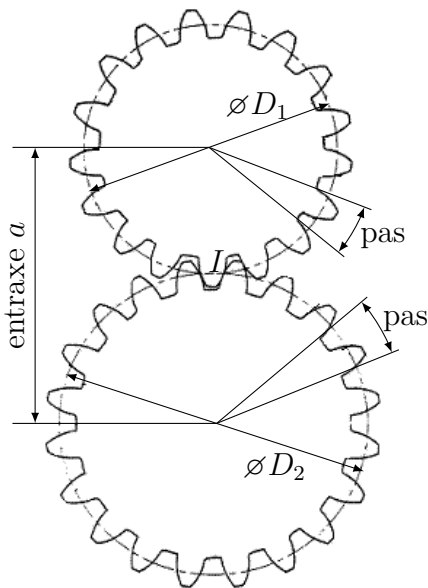
On a alors, en écrivant la relation de roulement sans glissement au point de contact (qui est aussi centre instantané de rotation de 2/1) :

$$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{-R_1}{R_2}$$

*Remarque* : il existe des mécanismes à engrenage « gauche » tel que l'équivalence cinématique ne soit pas réalisée, les deux roues tournent dans le même sens de rotation (engrenage Mercier).



## II.2 Normalisation d'un engrenage



Le **pas primitif**  $p$  est la **distance entre deux dents** consécutives sur le cercle primitif.

Le **module**  $m$  d'un engrenage est défini par la relation  $p = \pi m$ . Il caractérise la géométrie des dents.

Deux roues ne peuvent engrener que si elles ont même le même pas et le même module.

$$p = \pi \frac{D_1}{Z_1} = \pi \frac{D_2}{Z_2} = \pi m$$

De cette relation, on déduit

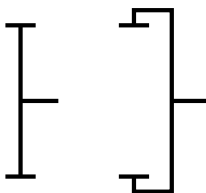
$$D_1 = mZ_1, \quad D_2 = mZ_2, \quad \text{et} \quad \frac{D_2}{D_1} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

Il y a **roulement sans glissement** au point de **contact** des cercles primitifs,  $\vec{V}_{I,2/1} = \vec{0}$ .

L'**entraxe**  $a$  est la distance  $a = R_1 + R_2 = \frac{D_1 + D_2}{2}$ .

## II.3 Différents types d'engrenages

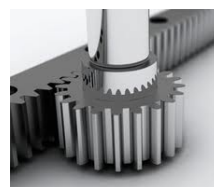
Chaque type d'engrenage dispose de sa représentation normalisée, à utiliser notamment dans les schémas cinématiques.



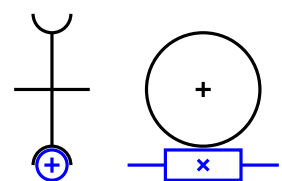
engrenage cylindrique



engrenage conique



pignon crémaillère



roue vis sans fin

### II.3.1 Engrenages cylindriques

Un engrenage cylindrique est un engrenage où les roues de friction correspondantes sont des cylindres de révolution. Le contact peut être intérieur ou extérieur et influence le sens de rotation (engrenage intérieur : même sens de rotation ; engrenage extérieur : sens de rotation inversé entre les deux roues).

*Exemple : montre, voiture à friction (jouet), réducteurs.*

### II.3.2 Engrenages coniques

Les axes de rotation des engrenages coniques sont concourants. Les roues de friction sont coniques. Il est nécessaire que les sommets des cônes primitifs coïncident pour assurer un fonctionnement sans glissement. Un dispositif de réglage de la position axiale des pignons doit systématiquement être prévu. Les dentures peuvent être droites ou hélicoïdales.

### II.3.3 Pignon-crémaillère

C'est un engrenage cylindrique dans lequel la roue (roue dentée la plus grande) a un rayon infini.

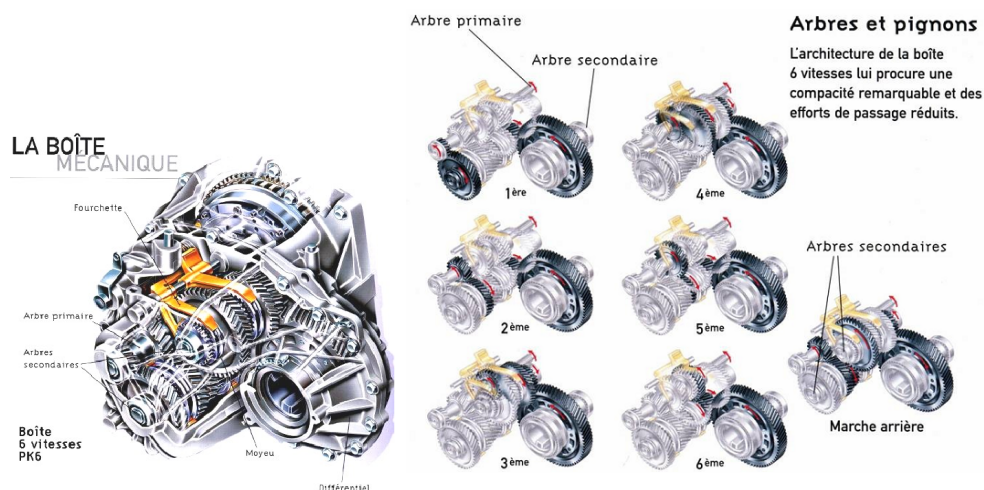
### II.3.4 Roue et vis sans fin

Les axes de rotation de la roue et de la vis sans fin sont orthogonaux mais non concourants. Le sens de l'hélice est le même pour la roue et pour la vis. Le signe du rapport de réduction dépend de l'orientation des axes de rotation mais aussi du sens de l'hélice.

$$\left| \frac{\omega_{\text{roue/bâti}}}{\omega_{\text{vis/bâti}}} \right| = \frac{\text{nombre de filets}}{Z_{\text{roue}}}$$

Ce système est très souvent irréversible. Cette irréversibilité est fonction de l'angle de la vis (si les filets sont quasi orthogonaux à l'axe, le système est irréversible). La vis entraîne la roue mais la roue n'entraîne pas la vis.

## II.4 Exemple : boîte de vitesses Renault PK6



## III Trains d'engrenages

### III.1 Trains simples

On appelle **train d'engrenages simple**, une succession d'engrenages constitués de roues dont les axes sont fixes les uns par rapport aux autres.

Les roues d'entrée et de sortie étant identifiées, on exprime, en général, le **rapport de transmission** :

$$\lambda = \frac{\omega_{\text{sortie/bâti}}}{\omega_{\text{entrée/bâti}}}.$$

Pour calculer le rapport du train, on effectue le produit des rapports des engrenages qui constituent le train tout en identifiant clairement pour chaque engrenage l'entrée et la sortie :

$$\lambda = (-1)^k \frac{\prod Z_{\text{roues menantes}}}{\prod Z_{\text{roues menées}}}$$

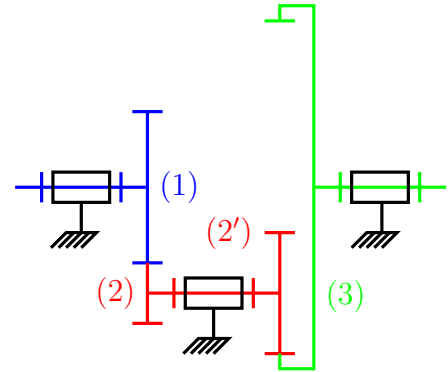
où  $k$  est le nombre de contacts extérieurs.

Dans l'exemple ci-contre :

$$\lambda = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{2'/0}} \cdot \frac{\omega_{2'/0}}{\omega_{2/0}} \cdot \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{2'/0}} \cdot \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{Z_{2'}}{Z_3} \cdot \frac{-Z_1}{Z_2} = \frac{-Z_1 \cdot Z_{2'}}{Z_2 \cdot Z_3}$$

*Remarque* : Si  $\lambda < 1$ , le train est réducteur (rapport de réduction). Si  $\lambda > 1$ , le train est multiplicateur.

*Application* : Agrafeuse Rexel.



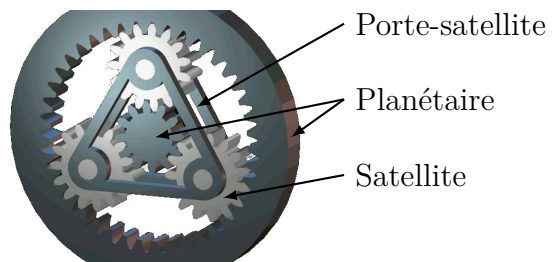
### III.2 Train épicycloïdal

#### III.2.1 Définition

On appelle **train d'engrenage épicycloïdal**, un train d'engrenage pour lequel certaines roues dentées ne tournent pas toutes autour d'axes fixes dans le repère lié au bâti.

La ou les roues qui tournent autour d'un axe en mouvement dans le repère lié au bâti sont appelés **satellites** (pièce 4 sur le schéma cinématique). Les **trois entrées** du train épicycloïdal sont :

- le **porte-satellite** avec lequel les satellites sont en liaison pivot. C'est la seule pièce qui n'est pas un engrenage (**sans dents**) ;
- les deux **planétaires** dentés (pignon et couronne) en contact avec les dents des satellites.



La configuration des engrenages constituant un train épicycloïdal peut être à axes parallèles (train plan) ou à axes concourants (train sphérique utilisé par exemple dans les différentiels automobiles, voir vidéo QRCode).

Ces trains épicycloïdaux sont utilisés pour **diminuer l'encombrement** et garantir un **rapport de réduction élevé**. Ils sont, par contre, **plus chers** et plus complexes à réaliser.

*Exemple* : galet freineur, différentiel automobile, portail, ...





### III.2.2 Détermination de la loi entrée-sortie

**Relation de Willis** : elle fournit la relation entre les vitesses de rotation des trois entrées par rapport au référentiel du bâti **0** :  $f(\omega_{1/0}, \omega_{2/0}, \omega_{3/0}) = 0$ .

**Méthode globale** La méthode la plus rapide est d'utiliser les relations des trains simples.

1. on identifie les composants (planétaires, satellite(s), porte satellite) en se rappelant que le satellite n'a pas son axe de rotation fixe et que le **porte-satellite n'a pas de dents** (le plus simple est de dresser un tableau) ;
2. on se place dans le référentiel du porte-satellite, le train épicycloidal est alors *vu* comme un train simple (les deux axes de rotations sont des axes du porte-satellite) ;
3. on écrit la relation (formule de Willis) des trains d'engrenages simples dans ce référentiel en prenant les deux planétaires (1 et 2) comme entrée et sortie ( $k$  est la raison du train) :

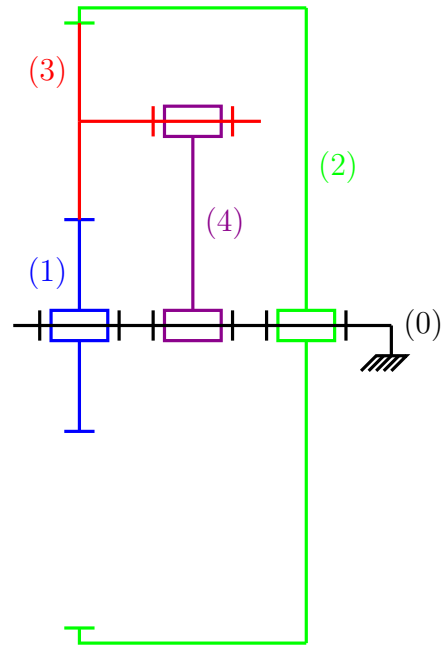
$$k = \frac{\omega_{PlanétaireA/PorteSatellite}}{\omega_{PlanétaireB/PorteSatellite}} = \frac{Z_3}{Z_2} \times \frac{-Z_1}{Z_3} = \frac{-Z_1}{Z_2};$$

4. on utilise la composition des mouvements pour repasser dans le référentiel bâti :

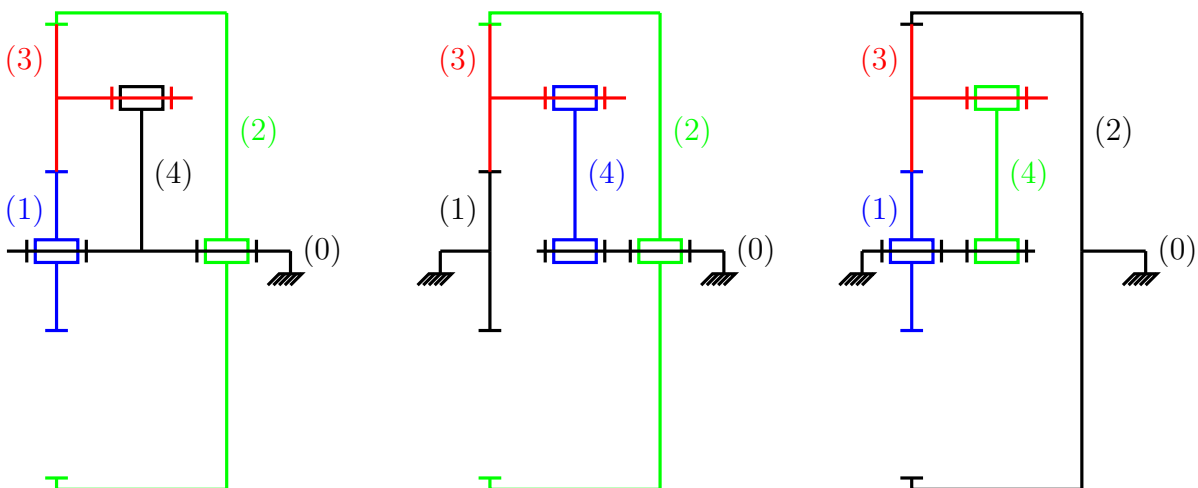
$$k = \frac{\omega_{PlanétaireA/0} - \omega_{PorteSatellite/0}}{\omega_{PlanétaireB/0} - \omega_{PorteSatellite/0}};$$

5. on en déduit la relation de Ravignaux :

$$\omega_{PlanétaireA/0} - k \cdot \omega_{PlanétaireB/0} + (k - 1) \cdot \omega_{PorteSatellite/0} = 0.$$



**Ne pas retenir la formule de Ravignaux mais la méthode !**



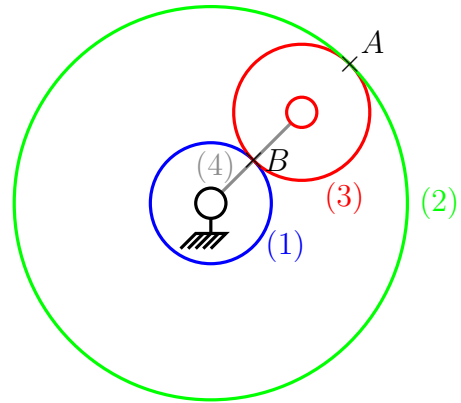
**Fonctionnement du train** Généralement, la vitesse de rotation de deux entrées est imposée (le plus couramment, une des deux entrées est liée au bâti (bloquée)). La vitesse de la troisième entrée (qui est alors la sortie) est alors donnée par la relation de Willis en prenant en compte la vitesse nulle de l'entrée bloquée.

*Application : Poulie Redex*

**Méthode par les vitesses de glissement**

Il est aussi possible d'écrire les conditions de roulement sans glissement entre les roues de friction théoriques 3/2 (satellite/couronne) en  $A$  et 3/1 (satellite/pignon) en  $B$ . Cette méthode est plus lourde que la précédente et ne sera utilisée que si demandée par le sujet.

À vous de vous entraîner....



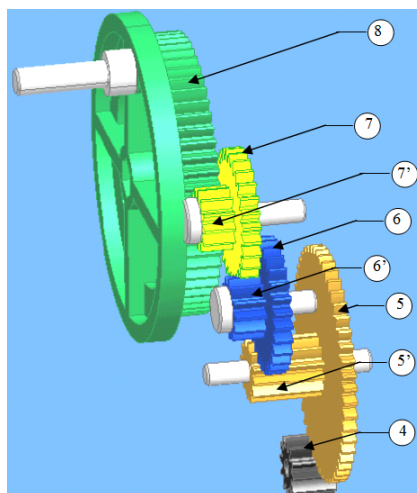
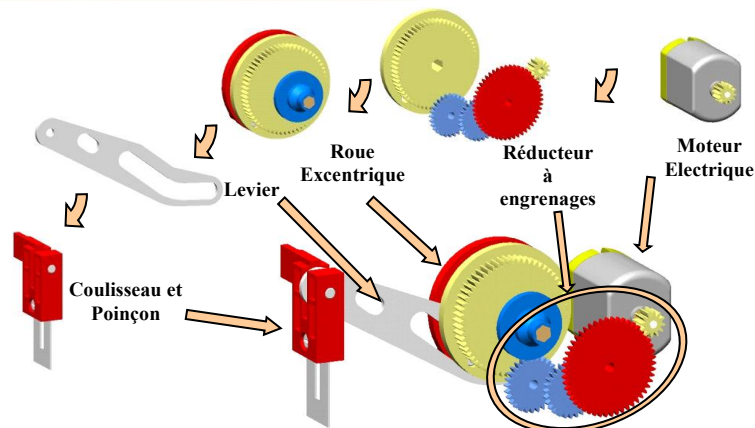
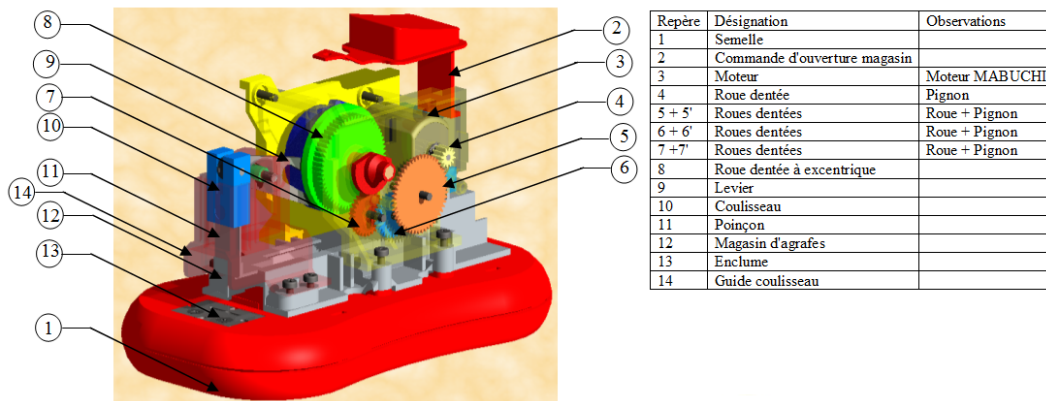


# TD 1 – Trains d'engrenages

## Train simple - Agrafeuse Rexel

Il s'agit d'une agrafeuse électrique de bureau, semi automatisée. Le fonctionnement ne nécessite qu'une seule main pour agraffer un paquet de feuilles.

L'agrafeuse est capable d'agrafer un paquet de 12 feuilles de papier de 80 g/m<sup>2</sup>. L'énergie électrique qu'elle utilise est fournie par 4 piles 1,5 V du type "AA" (LR6).



Principales caractéristiques dimensionnelles

PIGNONS ET ROUES	m	p	Z	d	b	a
4	0,5	1,57	12	6	5	15,5
5	0,5	1,57	50	25	1,5	
5'	0,5	1,57	12	6	7,5	20
6	0,5	1,57	28	14	1,5	
6'	0,5	1,57	12	6	3,5	10
7	0,5	1,57	28	14	1,5	
7'	0,5	1,57	12	6	3,5	18
8	0,5	1,57	60	30	5	

m : module, p pas primitif, Z nombre de dents, d diamètre primitif, b largeur d'une roue, a entraxe

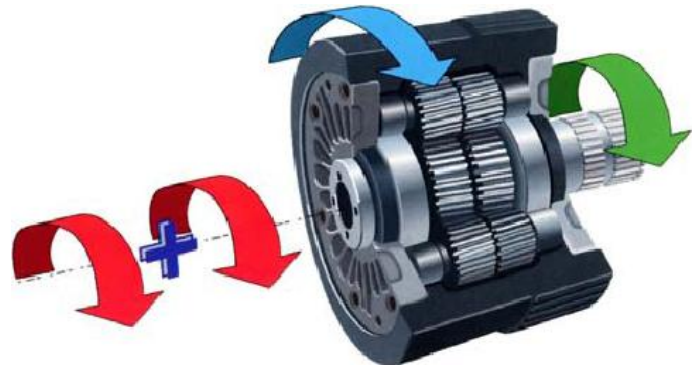
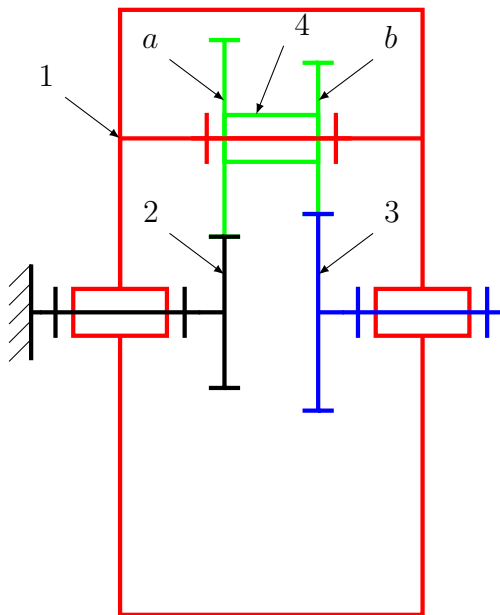
**Q1.** Réaliser un schéma cinématique en vue de côté du réducteur.

**Q2.** Déterminer le rapport de transmission entre la roue **8** et le pignon **4** lié au moteur.

## Train épicycloïdal - Poulie Redex

Le train épicycloïdal Redex se compose des trois éléments principaux suivants :

- **1** est la cage porte-satellites qui peut être entraînée par une courroie crantée. Les satellites sont repérés **a** et **b** ;
- **2** la douille solidaire du planétaire **A**. Elle peut être immobilisée ou en rotation par rapport au bâti **0** ;
- **3** est le moyeu solidaire du planétaire **B**.



On donne :  $Z_2 = 35$ ,  $Z_3 = 37$ ,  $Z_{4a} = 26$  et  $Z_{4b} = 23$  dents.

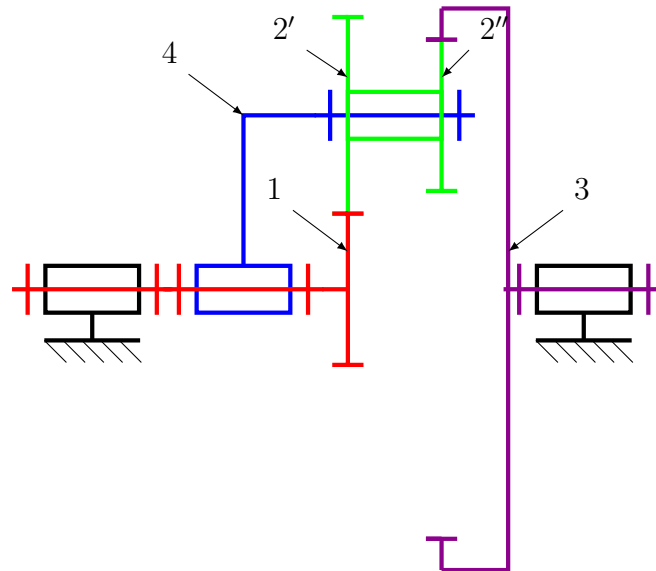
**Q1.** Déterminer le rapport de transmission  $\frac{\omega_{1/0}}{\omega_{3/0}}$  en fonction des nombres de dents.

## Autre exemple

### Notations

On note pour la roue dentée  $i$  :

- $R_i$  : Rayon primitif ;
- $Z_i$  : Nombre de dents.



**Q1.** Tracer le graphe de liaisons.

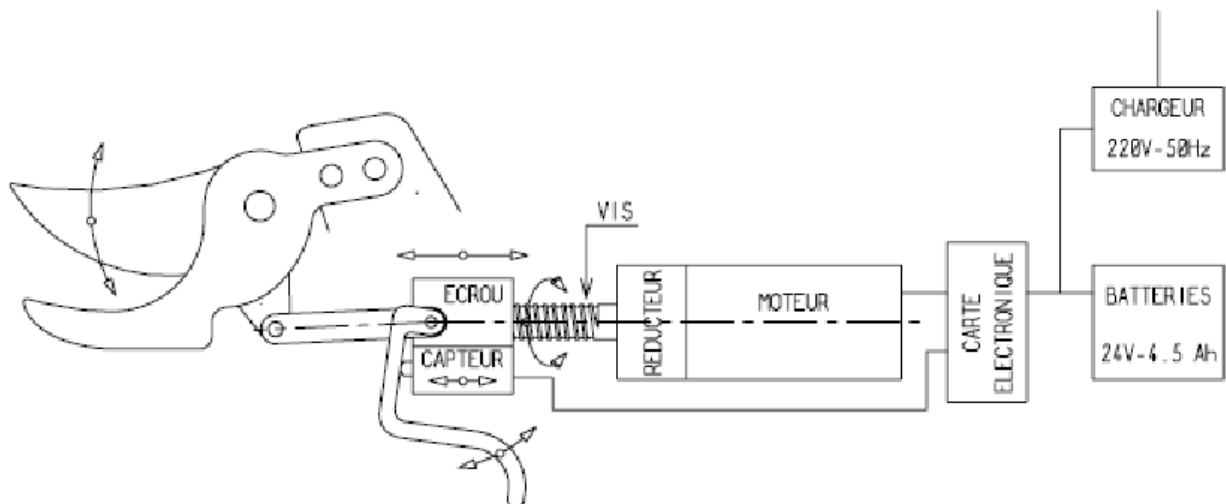
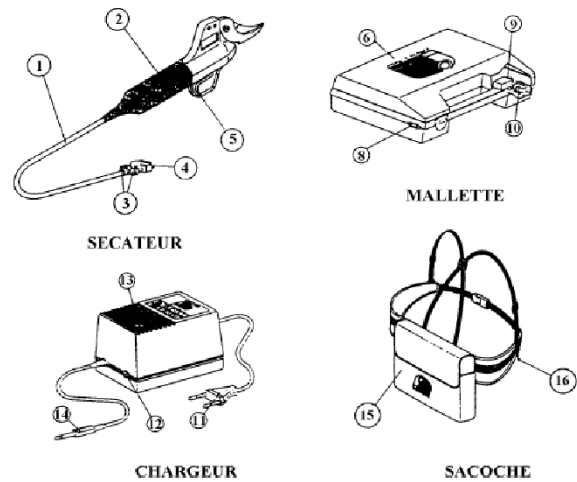
**Q2.** Donner la relation entre  $\omega_{4/0}$ ,  $\omega_{1/0}$  et  $\omega_{3/0}$  en fonction des nombres de dents  $Z_1$ ,  $Z'_2$ ,  $Z''_2$  et  $Z_3$ .

## TD 2 – Sécateur électrique Pellenc

La période de taille de la vigne dure 2 mois environ. Les viticulteurs coupent les sarments de vigne durant 8 à 10 heures par jour. Ils répètent donc le même geste des millions de fois avec un sécateur. Les sociétés réalisant du matériel agricole ont imaginé un sécateur électrique capable de réduire la fatigue de la main et du bras tout en laissant au viticulteur la commande de la coupe et sa liberté de mouvement. Le sécateur développé par la société Pellenc permet notamment de réaliser 60 coupes de diamètre 22 mm par minute. L'ensemble sécateur électronique PELLENC et MOTTE modèle PE20 est constitué :

- d'un sécateur électronique ;
- d'une mallette source d'énergie ;
- d'une sacoche avec harnais et ceinture ;
- d'un chargeur de batterie.

Lorsque l'utilisateur appuie sur la gâchette, le moteur est alimenté et par l'intermédiaire d'un réducteur à train épicycloïdal met en rotation une vis à billes. L'écrou se déplace en translation par rapport à la vis et par l'intermédiaire d'une bielle met en rotation la lame mobile générant ainsi un mouvement de coupe.



**Problématique :** Le sécateur électrique est un objet nomade son poids et son encombrement sont des critères essentiels pour le vendre. Le choix du moteur à courant continu s'impose comme actionneur. Il faut alors mettre en place un réducteur qui minimise l'encombrement.

### Objectif

*L'objectif de l'étude est de dimensionner le réducteur à train épicycloïdal. Celui-ci est constitué d'une couronne reliée au corps du sécateur, d'un porte-satellite lié à la vis, de plusieurs satellites et d'un planétaire lié au rotor du moteur (cf. FIGURE 1).*

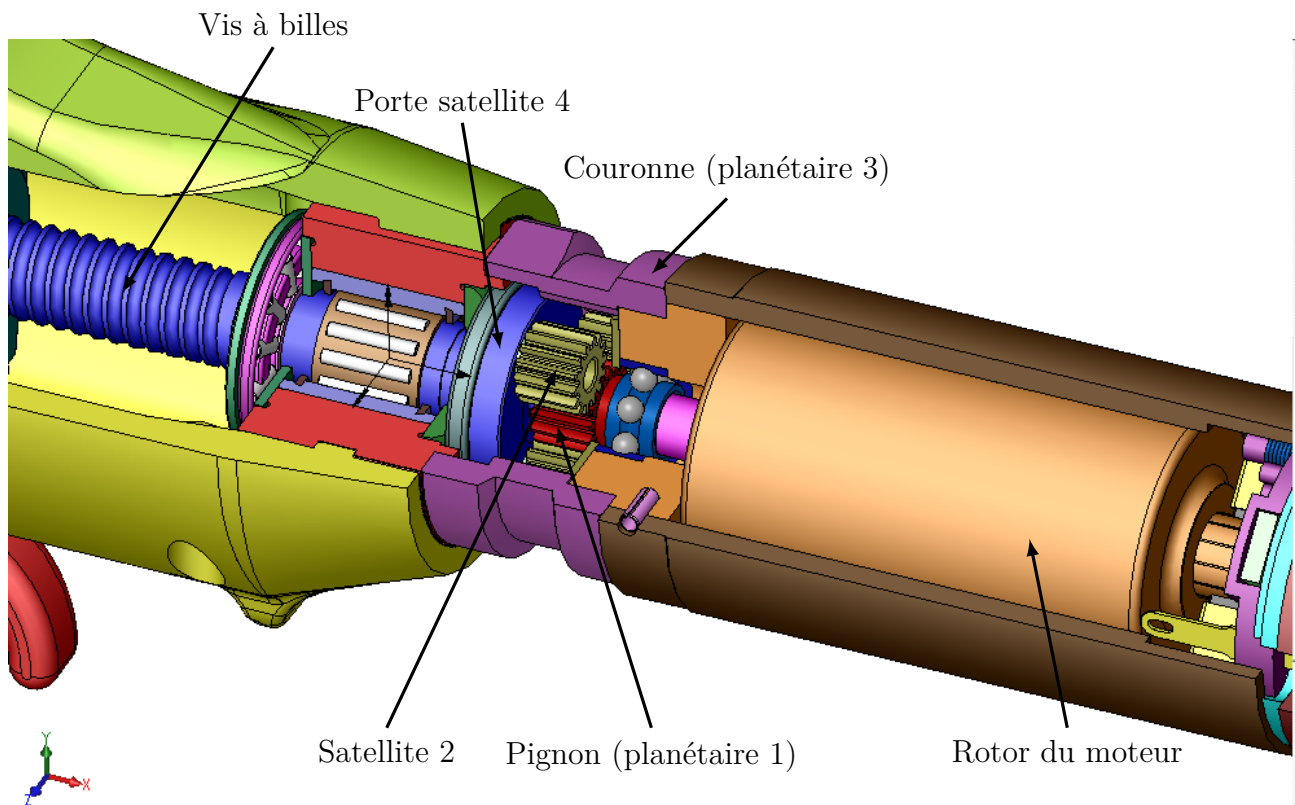


FIGURE 1 : Description du sécateur

Le schéma cinématique du réducteur est donné sur la FIGURE 2.

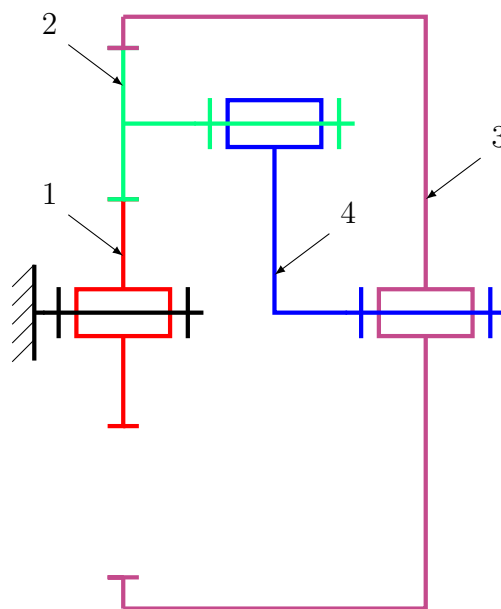


FIGURE 2 : Schéma cinématique

Le moteur tourne à la vitesse de rotation  $N_1 = 1\,400$  tr/min (le rotor est lié au planétaire 1). La vis à billes liée au porte-satellite 4 tourne à la vitesse de rotation  $N_4 = 350$  tr/min.

On note  $Z_1$  le nombre de dents du planétaire 1,  $Z_2$  celui du satellite 2 et  $Z_3$  celui de la couronne liée au bâti. On pose  $\omega_{10}$  la vitesse angulaire de 1 par rapport à 0,  $\omega_{40}$  celle de 4 par rapport à 0 et  $\omega_{30}$  la vitesse angulaire de la couronne (planétaire 3) par rapport au bâti 0.

**Q1.** Donner la relation de Willis de ce train épicycloïdal en fonction de  $\omega_{40}$ ,  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{30}$  et  $\lambda$  où ce dernier est la raison du train épicycloïdal en fonction de  $Z_1$  et  $Z_3$ .

**Q2.** Simplifier la relation obtenue en utilisant le fait que  $\omega_{30} = 0$ . En déduire  $\frac{\omega_{10}}{\omega_{40}}$  en fonction de  $Z_1$  et  $Z_3$ .

**Q3.** Faire l'application numérique et déterminer une relation entre  $Z_1$  et  $Z_3$ . Sachant que  $Z_1 = 19$  dents, en déduire  $Z_3$ .

On rappelle que les diamètres des roues dentées sont donnés par la relation  $d = mZ$  où  $m$  est le module des roues dentées et  $Z$  leur nombre de dents.

**Q4.** Sachant que les roues dentées du train ont le même module, déterminer une relation géométrique entre  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  puis en déduire une relation entre  $Z_2$ ,  $Z_1$  et  $Z_3$  (condition d'entraxe). Calculer la valeur de  $Z_2$ .

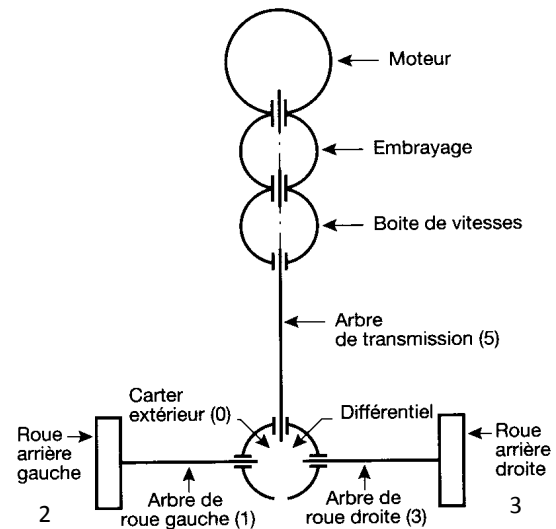
# TD 3 – Étude d'un différentiel automobile

## Nécessité d'un différentiel sur une automobile

Le différentiel est le mécanisme qui, sur un véhicule automobile, permet aux roues motrices de tourner à des vitesses angulaires différentes.

Cette différence de vitesses angulaires est nécessaire pour les raisons suivantes :

- lors d'un virage, la vitesse angulaire de la roue située à l'intérieur du virage est inférieure à celle de la roue située à l'extérieur du virage ;
- en ligne droite, une égalité rigoureuse des fréquences angulaires impose une parfaite égalité des diamètres de roues, ce qui n'est pas réalisable compte tenu de l'usure et de la déformation des pneumatiques.



On considère dans ce sujet une voiture à propulsion (par opposition à traction), c'est à dire dans laquelle ce sont les roues arrière qui sont les roues motrices.

La structure de la transmission de puissance du moteur aux roues arrière est alors donnée par la figure ci-contre, sur laquelle la voiture est vue de dessus.

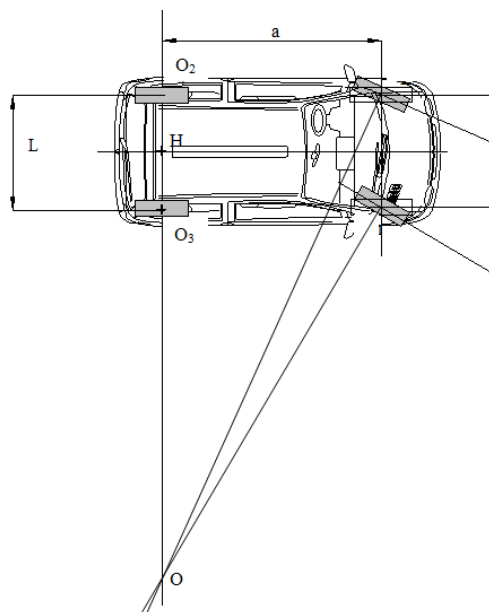
## Paramétrage et étude préliminaire

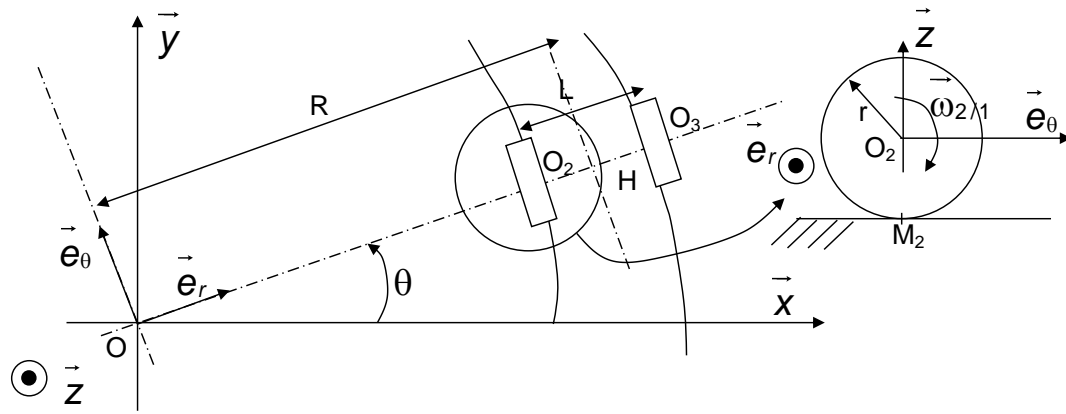
La roue arrière gauche est numérotée **2** alors que la roue arrière droite est numérotée **3**.

On appelle  $M_2$  et  $M_3$  les points de contact entre les roues **2** et **3** (de rayon  $r$ ) et le sol avec  $M_2M_3 = L$  (cette dimension porte le nom de voie arrière sur une voiture). On donne aussi respectivement  $O_2$  et  $O_3$  les centres des roues **2** et **3**. La dimension  $a$ , non utile dans cette étude, porte le nom d'empattement.

La figure ci-contre donne alors la configuration géométrique d'une automobile en virage, de centre  $O$ .

Le véhicule prend un virage de rayon de courbure  $R = OH$ . On donne ci-après le paramétrage adopté.





Le repère  $R_0 : (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est lié au sol alors que le repère  $R_1 : (O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{z})$  est lié à la voiture (à son châssis), numéroté **1**. On donne  $\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\theta} \vec{z}$ ,  $\vec{\Omega}(2/1) = \omega_{2/1} \vec{e}_r$  et  $\vec{\Omega}(3/1) = \omega_{3/1} \vec{e}_r$ .

Une condition fondamentale de tenue de route impose que les roues roulent sans glisser sur la route (ce qui garantit l'adhérence). Dans ce cas, on a les deux conditions fondamentales de roulement sans glissement des roues par rapport à la route :  $\vec{V}(M_2, 2/0) = \vec{0}$ ,  $\vec{V}(M_3, 3/0) = \vec{0}$ .

**Q1.** Donner la relation entre  $\vec{V}(M_2, 2/0)$ ,  $\vec{V}(M_2, 2/1)$  et  $\vec{V}(M_2, 1/0)$ .

**Q2.** Calculer, en fonction de  $\omega_{3/1}$ ,  $\omega_{2/1}$  et  $r$ , les vecteurs vitesse  $\vec{V}(M_2, 2/1)$  et  $\vec{V}(M_3, 3/1)$ .

**Q3.** Calculer, en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $\dot{\theta}$ , les vecteurs vitesse  $\vec{V}(M_2, 1/0)$  et  $\vec{V}(M_3, 1/0)$ .

**Q4.** En déduire la relation entre  $\omega_{2/1}$  et  $\omega_{3/1}$  en éliminant  $\dot{\theta}$ .

## Étude du mécanisme de répartition des vitesses de rotation : le différentiel

### Présentation

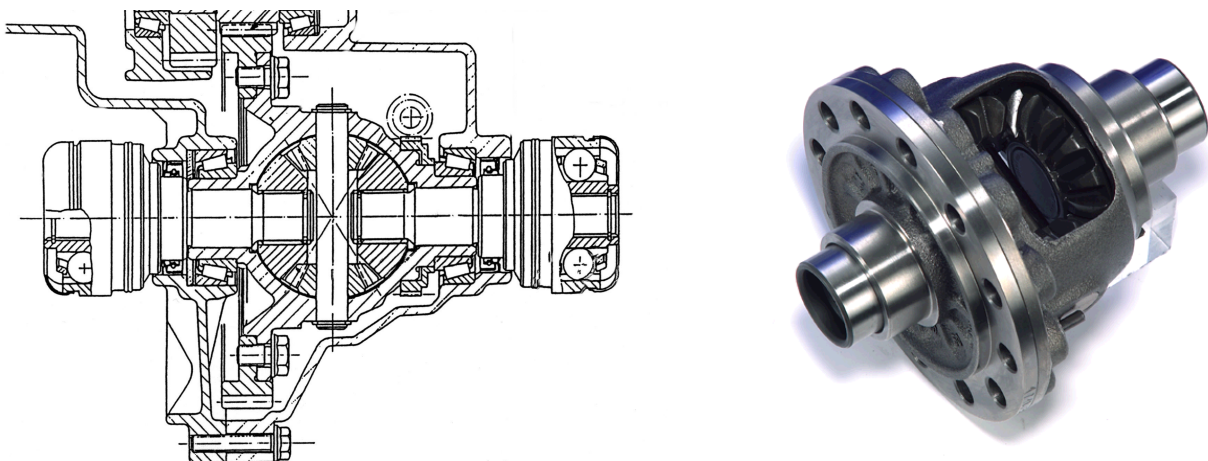


FIGURE 1 : Dessin et réalisation d'un différentiel automobile

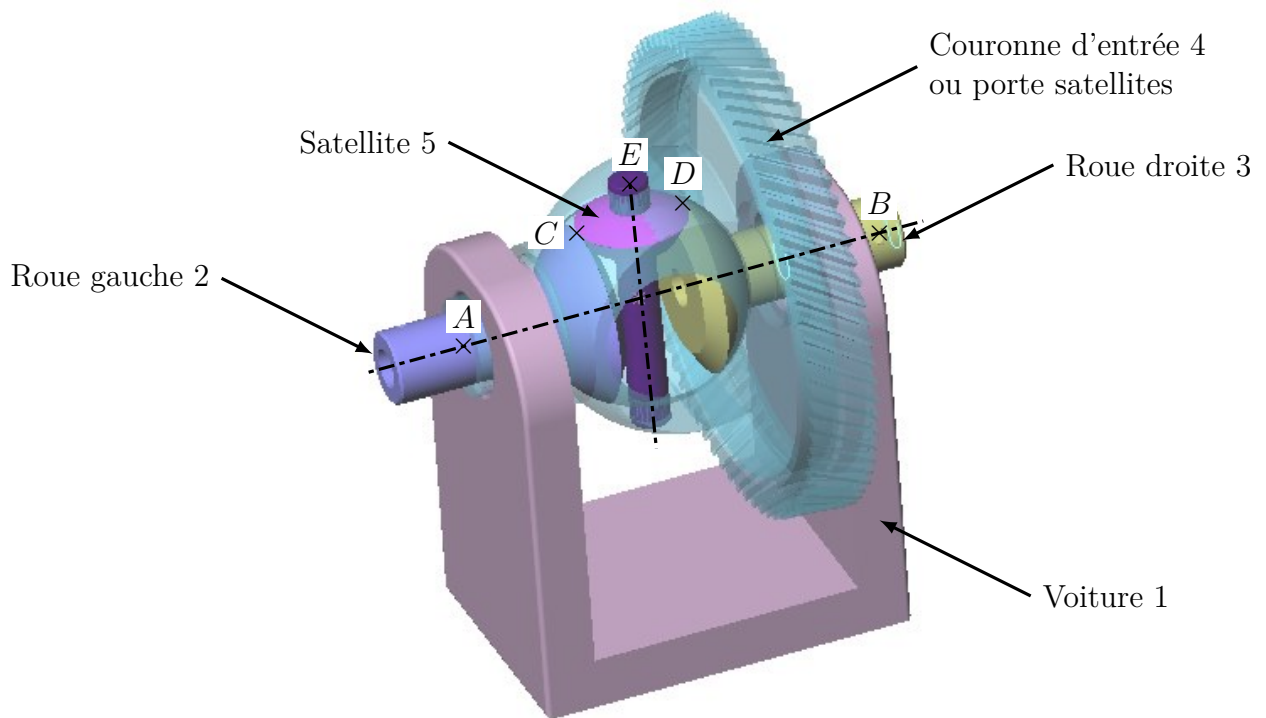
La structure d'un différentiel est celle d'un train épicycloïdal dit « sphérique », qui comporte alors :

- deux planétaires, liés aux roues droite et gauche et numérotés respectivement **3** et **2** ;



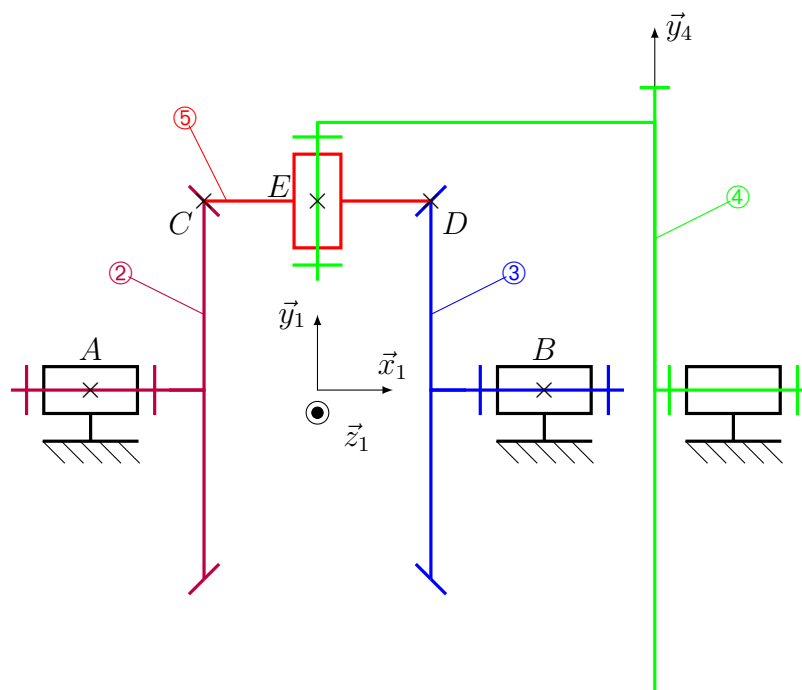
- un porte-satellites, qui correspond ici à la couronne d'entrée numérotée **4**. Cette couronne est animée par le moteur du véhicule ;
- le satellite, numéroté **5**.

La voiture est le solide nommé **1**. Un modèle de représentation CAO d'un différentiel est donné ci-dessous.



## Paramétrage et schéma cinématique

On donne ci-dessous un schéma cinématique du mécanisme.



**Attention :** par souci de clarté, les axes  $\vec{y}_1$  et  $\vec{y}_4$  ont été dessinés confondus sur la figure.

Le paramétrage est alors le suivant :

- Le solide **2** ( $A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2$ ) a un mouvement de rotation par rapport au solide **1** autour de l'axe ( $A, \vec{x}_1$ ). On a donc  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$  et on note  $\vec{\Omega}(2/1) = \omega_{21} \vec{x}_1$  ;
- Le solide **3** ( $B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3$ ) a un mouvement de rotation par rapport au solide **1** autour de l'axe ( $B, \vec{x}_1$ ). On a donc  $\vec{x}_1 = \vec{x}_3$  et on note  $\vec{\Omega}(3/1) = \omega_{31} \vec{x}_1$  ;
- Le solide **4** ( $B, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4$ ) a un mouvement de rotation par rapport au solide **1** autour de l'axe ( $B, \vec{x}_1$ ). On a donc  $\vec{x}_1 = \vec{x}_4$  et on note alors  $\vec{\Omega}(4/1) = \omega_{41} \vec{x}_1$  ;
- Le solide **5** ( $E, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5$ ) a un mouvement de rotation par rapport au solide **4** autour de l'axe ( $E, \vec{y}_4$ ). On note  $\vec{\Omega}(5/4) = \omega_{54} \vec{y}_4$ .

On donne les dimensions suivantes :  $\overrightarrow{BD} = -a\vec{x}_1 + R\vec{y}_4$ ,  $\overrightarrow{AC} = a\vec{x}_1 + R\vec{y}_4$ ,  $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{ED} = \frac{\overrightarrow{CD}}{2} = r\vec{x}_1$ .

On note  $Z_5$  le nombre de dent du satellite **5**,  $Z_3$  celui du planétaire **3** et  $Z_2$  celui du planétaire **2**. On a, compte tenu des dimensions :  $Z_3 = Z_2$ .

## Vérification du fonctionnement attendu

**Q5.** On choisit le porte satellite **4** comme référentiel. En traduisant le roulement sans glissement au point C, respectivement D, entre les solides **2** et **5**, respectivement les solides **3** et **5**, donner les rapports  $\frac{\omega_{34}}{\omega_{54}}$  et  $\frac{\omega_{24}}{\omega_{54}}$ .

**Q6.** En déduire une relation entre  $\omega_{34}$  et  $\omega_{24}$ .

**Q7.** En introduisant le solide **1**, déterminer l'équation liant  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{31}$  et  $\omega_{41}$ . À l'aide de la formule de Willis, en déduire la raison  $\lambda$  d'un train épicycloïdal d'un différentiel.

**Q8.** Conclure quant au respect de la relation déterminée à la **Q4**. Déterminer les relations entre  $\omega_{21}$  et  $\omega_{41}$  d'une part et entre  $\omega_{31}$  et  $\omega_{41}$  d'autre part.

**Q9.** Supposons que la roue gauche soit sur de la glace et la roue droite sur le goudron. La roue gauche peut alors très facilement patiner par manque d'adhérence, contrairement à la roue droite. Déterminer dans ce cas la vitesse de rotation de la roue gauche en fonction de  $\omega_{41}$ , vitesse de rotation de la couronne d'entrée du différentiel. La voiture peut-elle avancer en augmentant la vitesse de rotation du moteur ?

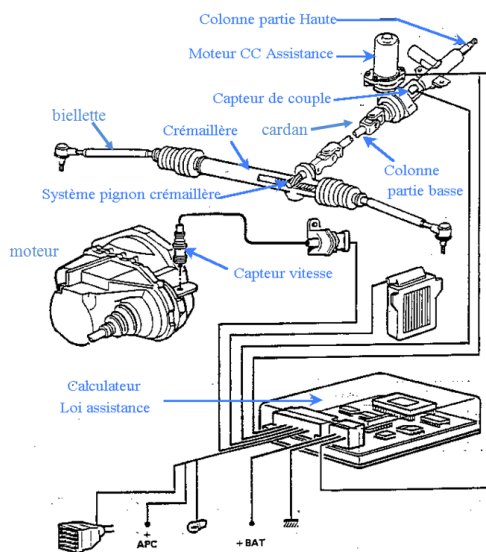
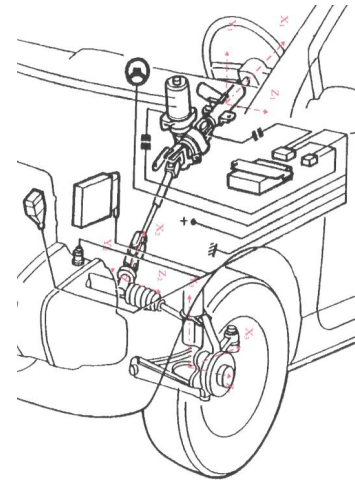
**Q10.** Énoncer alors l'inconvénient majeur d'un différentiel et proposer des solutions d'amélioration.

**Q11.** Culture technologique : combien de différentiels doit posséder un véhicule 4x4 ?

# TD 4 – Étude des transmetteurs du type Joint de ...

## Joint de Cardan

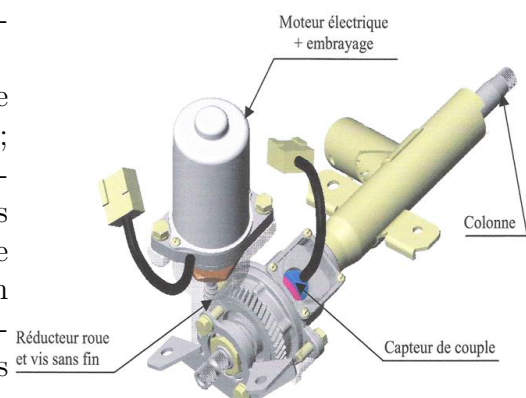
Pour une sécurité et un confort de conduite accrus, la commande de pivotement des roues avant d'un véhicule automobile peut être assistée. Le dessin en perspective ci-contre montre l'implantation de cette DAE (Direction Assistée Électrique) dans le véhicule automobile Twingo de Renault.



Un calculateur permet, à partir d'informations mesurées sur le véhicule par différents capteurs (couple au volant et vitesse du véhicule), de mettre en action le motoréducteur pour assister le conducteur dans ses manœuvres. Dès la mise en rotation du volant, un capteur informe le calculateur de l'intensité du couple (« effort tournant ») exercé sur le volant. Le motoréducteur est alors commandé en fonction de ce couple exercé par l'utilisateur.

La loi d'assistance programmée dans le calculateur permet au système d'assurer une assistance variable :

- une assistance élevée à l'arrêt ou à faible vitesse afin d'offrir un plus grand confort de manœuvre ;
- une assistance réduite à haute vitesse car les braquages sont limités et l'effort au volant ne doit pas être trop assisté pour des raisons de sécurité de conduite. À partir d'un seuil de vitesse d'environ 70 km/h où le confort de la direction traditionnelle est suffisant, le moteur électrique n'est plus alimenté.



Le mouvement du volant, combiné avec l'assistance du motoréducteur, est transmis à la partie basse de la colonne de direction par l'intermédiaire d'un joint de Cardan.

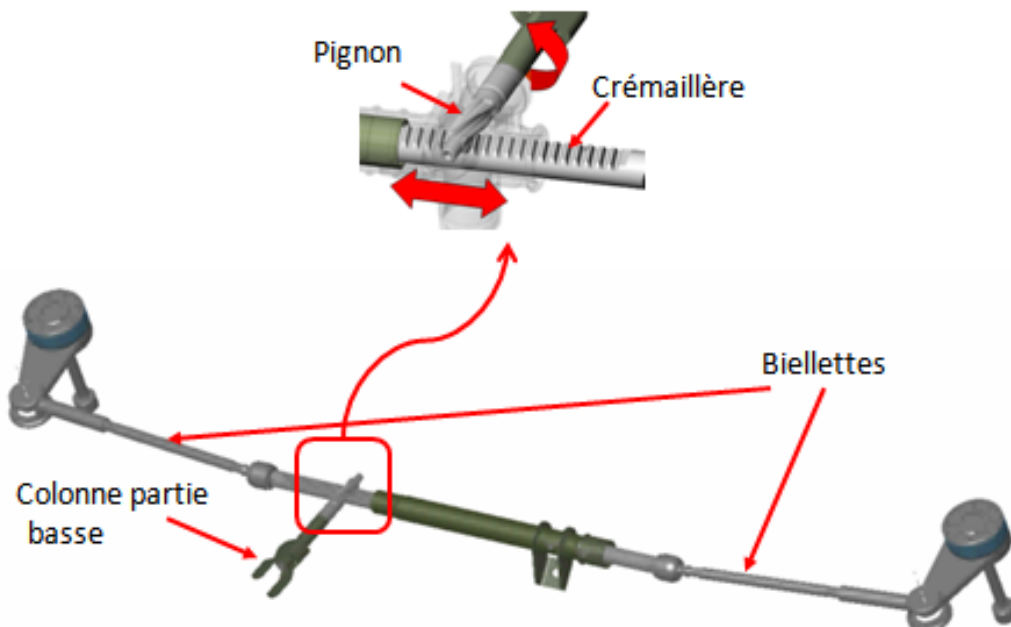


Joint de Cardan



Le mouvement de rotation de la partie basse de la colonne est ensuite transformé en mouvement de translation de la crémaillère grâce à un dispositif pignon-crémaillère.

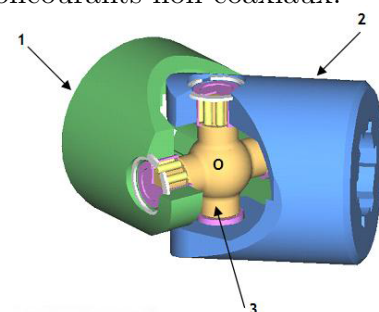
C'est le mouvement de translation de la crémaillère qui permet de faire pivoter les roues grâce aux biellettes de direction situées à chacune de ses extrémités.



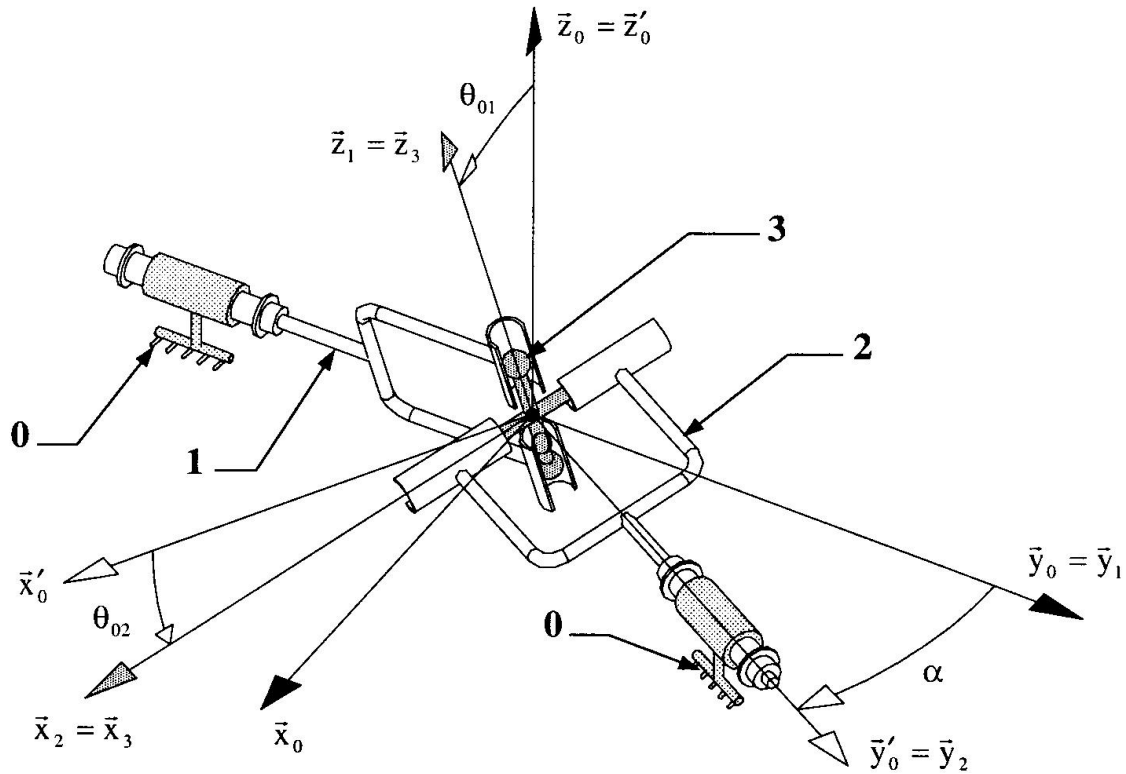
Pour transmettre le mouvement de rotation entre la partie haute et la partie basse de la colonne de direction, le concepteur a choisi d'utiliser un accouplement de type joint de Cardan. On s'intéresse dans la suite, à cette solution technique qui permet de réaliser la fonction Transmettre un mouvement de rotation entre deux arbres concourants non coaxiaux.

Il est constitué :

- d'une fourche **1**, liée par une liaison encastrement à l'arbre d'entrée (colonne partie haute) ;
- d'une fourche **2**, liée par une liaison encastrement à l'arbre de sortie (colonne partie basse) ;
- d'un croisillon **3**.



Cette transmission par joint de Cardan est représentée sous la forme du schéma cinématique ci-dessous.



### Constituants et paramétrages :

On associe les repères :

- $R_0 : (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et  $R'_0 : (O, \vec{x}'_0, \vec{y}'_0, \vec{z}'_0)$  au bâti tel que  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}'_0) = (\vec{y}_0, \vec{y}'_0)$  ;
- $R_1 : (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  à l'arbre d'entrée 1, tel que  $\theta_{01} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$  ;
- $R_2 : (O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  à l'arbre de sortie 2, tel que  $\theta_{02} = (\vec{x}'_0, \vec{x}_2) = (\vec{z}'_0, \vec{z}_2)$  ;
- $R_3 : (O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  au croisillon 3, tel que  $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$  et  $\vec{z}_1 = \vec{z}_3$ .

L'arbre d'entrée **1** et l'arbre de sortie **2** sont concourants en O.

L'angle  $\alpha$  (constant) entre l'arbre d'entrée **1** et l'arbre de sortie **2** est appelé angle de brisure.

### Objectif

*S'assurer que la vitesse de rotation du pignon qui entraîne la crémaillère est la même que la vitesse de rotation de la partie haute de la colonne entraînée par le volant et le motoréducteur d'assistance (Transmission homocinétique).*

**Q1.** Donner le graphe de liaison de ce mécanisme.

**Q2.** Donner sans calcul la liaison équivalente à 2 liaisons sphère-cylindre de même direction. Redessiner le graphe de liaison en tenant compte des liaisons équivalentes.

**Q3.** Donner les caractéristiques, la grandeur d'entrée et la grandeur de sortie du mécanisme de joint de Cardan.

**Q4.** Représenter les figures planes de changement de bases relatives aux angles  $\theta_{01}$ ,  $\theta_{02}$  et  $\alpha$ .

**Q5.** À partir de la particularité géométrique angulaire des axes du croisillon 3 (les axes  $\vec{x}_2$  et  $\vec{z}_1$  sont constamment orthogonaux), déterminer la loi entrée-sortie en position du joint de Cardan.

**Q6.** En déduire la loi entrée-sortie en vitesse  $\omega_2 = f(\alpha, \omega_1, \theta_{01})$  du joint de Cardan. On notera  $\dot{\theta}_{01} = \omega_1$  et  $\dot{\theta}_{02} = \omega_2$ .

**Q7.** Tracer l'allure du rapport  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  en fonction de  $\theta_{01}$ , pour  $\alpha = 30^\circ$  et pour  $\theta_{01} \in [0, 4\pi]$ .  
 Conclure sur le caractère homocinétique de la transmission par le joint de Cardan.  
 On envisage maintenant l'association de 2 joints de Cardan en série.

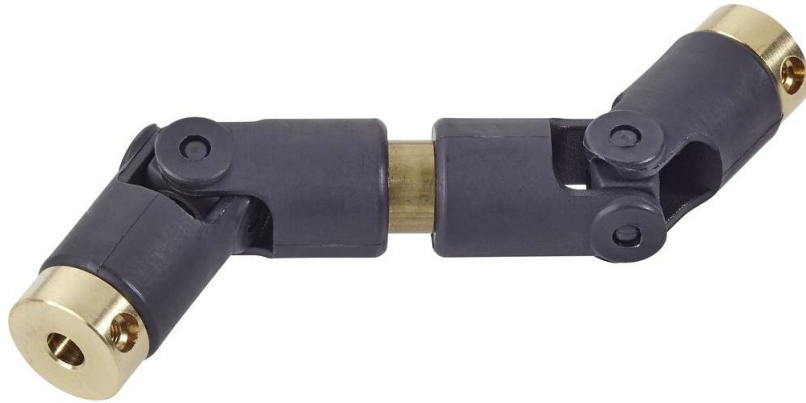


FIGURE 1 : Double-joints de Cardan

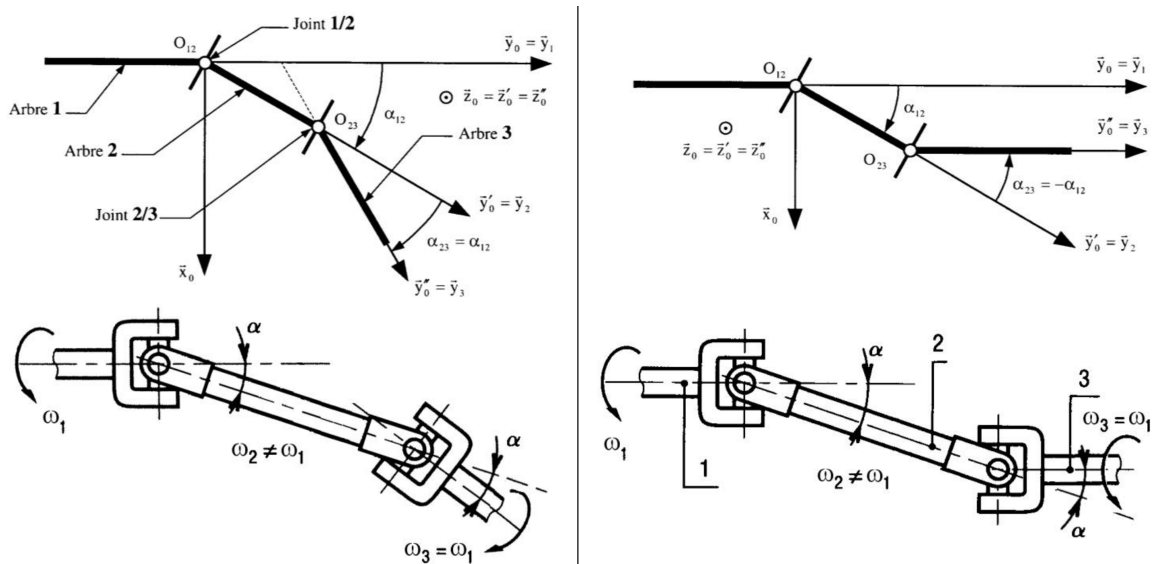
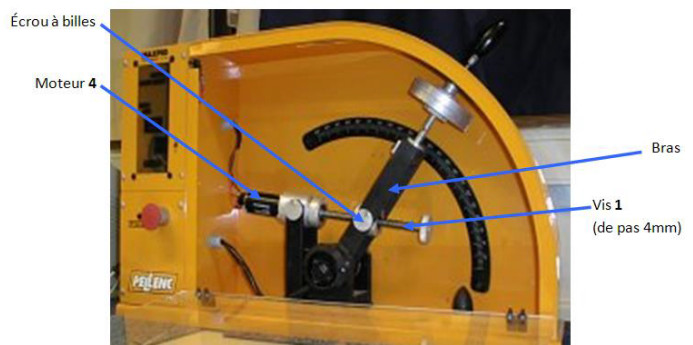


FIGURE 2 : Association de 2 joints de Cardan en série

**Q8.** À partir de la loi d'entrée-sortie en vitesse obtenue précédemment, déterminer si l'un ou l'autre (ou les 2) des associations de la Figure 2 sont homocinétiques.

## Joint de Oldham

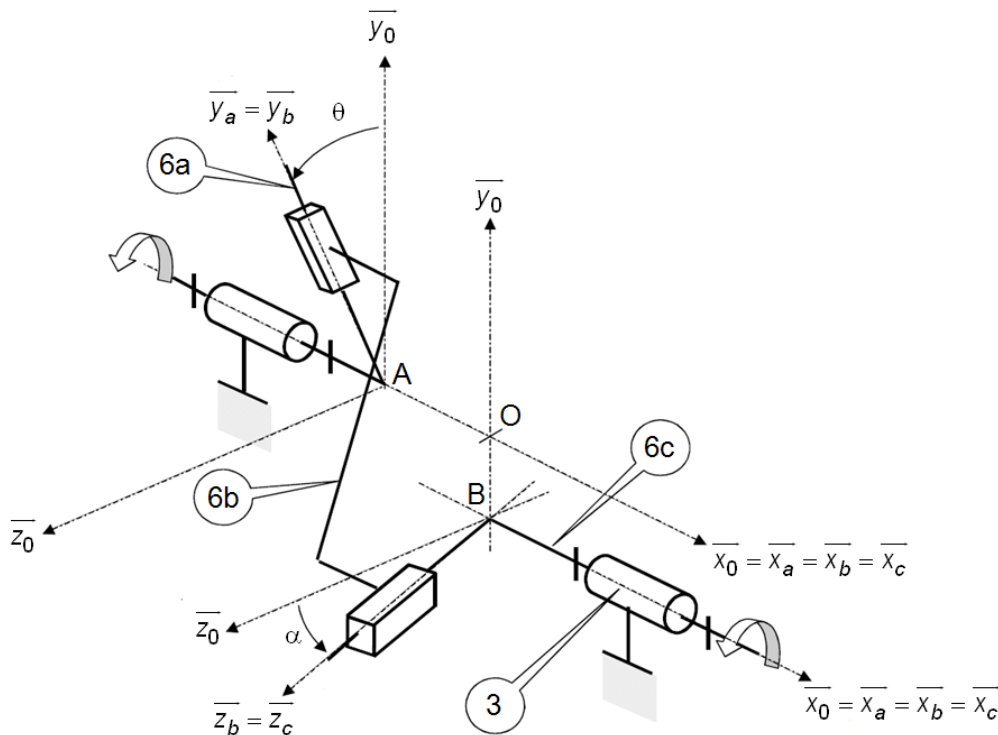
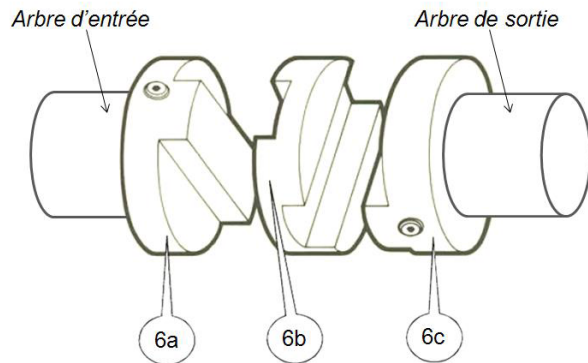
Sur le système Maxpid présent dans le laboratoire de SII, l'axe de sortie du moteur 4 n'est pas parfaitement aligné avec l'axe de la vis 1 qu'il doit entraîner en rotation. Pour transmettre le mouvement de rotation, le concepteur a choisi d'utiliser un accouplement entre l'axe moteur et la vis de type joint de Oldham.



Cette solution technique qui permet de transmettre un mouvement de rotation entre deux axes parallèles non coaxiaux, est constituée :

- d'un plateau **6a**, lié à l'arbre d'entrée (axe du moteur **4**) ;
- d'un plateau **6c**, lié à l'arbre de sortie (vis **1**) ;
- d'un élément intermédiaire **6b**.

Cette transmission par joint de Oldham est représentée sous la forme du schéma cinématique ci-dessous.



#### Constituants et paramétrages :

- Le solide **3**, de repère associé  $R_0 : (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est considéré comme fixe ;
- Le solide **6a**, de repère associé  $R_a : (A, \vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{z}_a)$ , est en mouvement de rotation d'axe  $(A, \vec{x}_a)$  par rapport au solide **3** tel que  $\vec{x}_0 = \vec{x}_a$  et  $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_a)$  ;
- Le solide **6c**, de repère associé  $R_b : (B, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$ , est en mouvement de rotation d'axe  $(B, \vec{x}_b)$  par rapport au solide **3** tel que  $\vec{x}_0 = \vec{x}_b$  et  $\alpha = (\vec{z}_0, \vec{z}_b)$  ;
- $\vec{OA} = e \cdot \vec{x}_0$  et  $\vec{OB} = -f \cdot \vec{y}_0$ .

— Objectif —

---

*S'assurer que la vitesse de rotation de la vis est la même que la vitesse de rotation de l'axe du moteur (transmission homocinétique).*

---

**Q1.** Repasser en couleur les différentes classes d'équivalence cinématique sur le schéma cinématique.

**Q2.** Dessiner le graphe des liaisons du joint de Oldham.

**Q3.** Donner les grandeurs d'entrée et de sortie du joint de Oldham.

**Q4.** Donner l'expression, en fonction des paramètres de mouvement, des torseurs cinématiques de chacune des liaisons.

**Q5.** Déterminer, à l'aide d'une fermeture cinématique, la loi d'entrée-sortie en vitesse  $\dot{\theta} = f(\dot{\alpha})$  du joint de Oldham.

**Q6.** Conclure sur le caractère homocinétique de cette transmission de mouvement.

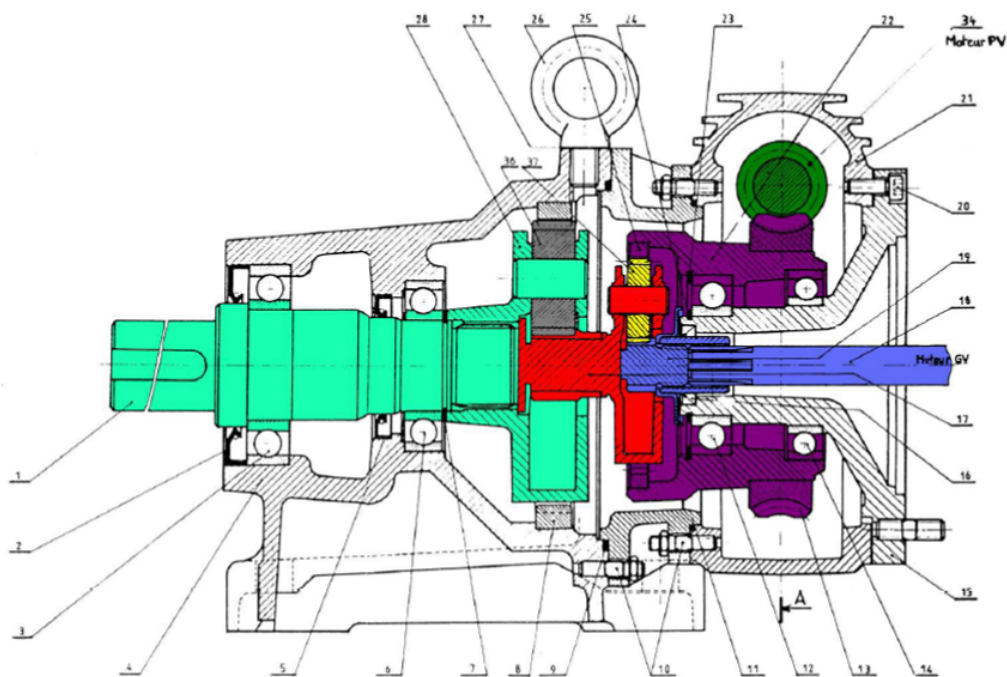
**Q7.** Déterminer l'expression de la vitesse de translation de **6a/6b** en fonction de  $\dot{\theta}$  et  $\theta$  et celle de **6b/6c** en fonction de  $\dot{\alpha}$  et  $\alpha$ . On notera  $v_{y,P \in 6a/6b} = \dot{\lambda}$  et  $v_{z,P \in 6b/6c} = \dot{\mu}$ .



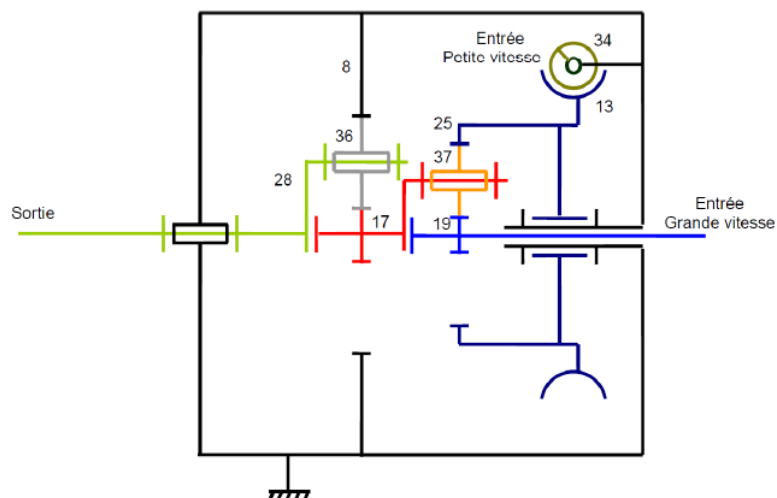
# Sujet Kholle 1 – Réducteur d'appareil de manutention

## Présentation

Le réducteur à trains épicycloïdaux ci-dessous est utilisé dans les appareils de manutention et de levage lorsqu'on a besoin d'une grande vitesse d'approche, et d'une petite vitesse de travail.



On donne ci-dessous le schéma cinématique du réducteur.



**Fonctionnement « Petite vitesse »**

Seul le moteur PV tourne à 1500 tour/min. La couronne 25 est entraînée en rotation par l'intermédiaire de la roue 13 et de la vis sans fin 34 liée à l'arbre moteur PV (Petite Vitesse). Le pignon 19 est maintenu fixe par le frein du moteur GV (Grande Vitesse).

**Fonctionnement « Grande vitesse »**

Les deux moteurs GV et PV tournent en même temps à 1500 tour/min.

**Extrait de la nomenclature**

37	3	Pignon satellite	$Z_{37} = 32$ dents ; $m = 1,25$ mm
36	3	Pignon satellite	$Z_{36} = 31$ dents ; $m = 1,8$ mm
34	1	Vis sans fin (entrée PV)	1 filet – pas à droite
25	1	Couronne	$Z_{25} = 83$ dents ; $m = 1,25$ mm
19	1	Pignon d'entrée GV	$Z_{19} = 19$ dents ; $m = 1,25$ mm
17	1	Pignon porte satellite	$Z_{17} = 17$ dents ; $m = 1,8$ mm
13	1	Roue	$Z_{13} = 41$ dents
8	1	Couronne fixe	$Z_8 = 79$ dents ; $m = 1,8$ mm
1	1	Arbre de sortie	
<b>Rep</b>	<b>Nb</b>	<b>Désignation</b>	<b>Observation</b>

**Travail demandé**

**Q1.** Identifier dans le schéma cinématique de la page précédente 2 trains épicycloïdaux et compléter le tableau ci-dessous en indiquant le numéro du solide.

	<b>Solides du train épi 1 (droite)</b>	<b>Solides du train épi 2 (gauche)</b>
Satellite		
Porte-satellite		
PlanétaireA		
PlanétaireB		

**Q2.** Exprimer la loi d'entrée-sortie du train épicycloïdal 1 à l'aide de la formule de Willis.

**Q3.** Exprimer la loi d'entrée-sortie du train épicycloïdal 2 à l'aide de la formule de Willis.

**Q4.** Déterminer la loi d'entrée sortie du système roue et vis sans fin composé des solides 13 et 34. On considèrera un pas à droite.

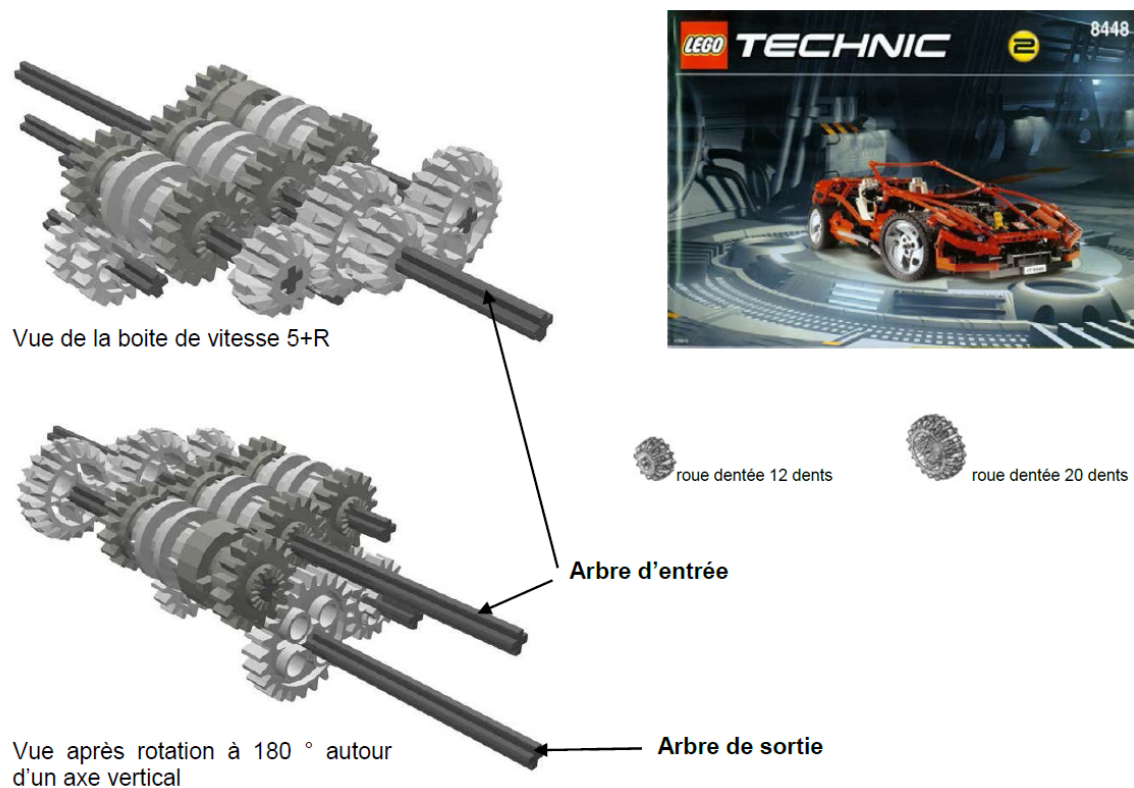
**Q5.** En déduire la vitesse de rotation de l'arbre de sortie 1 en fonctionnement « petite vitesse ».

**Q6.** En reprenant la même démarche qu'aux questions 2 et 3, déterminer la vitesse de rotation de l'arbre de sortie 1 en fonctionnement « grande vitesse ».

# Sujet Kholle 2 – Boite de vitesse LEGO Technic® - Modèle 8448

## Présentation

Le système étudié est une boîte de vitesse LEGO Technic® qu'on retrouve sur le modèle 8448 :



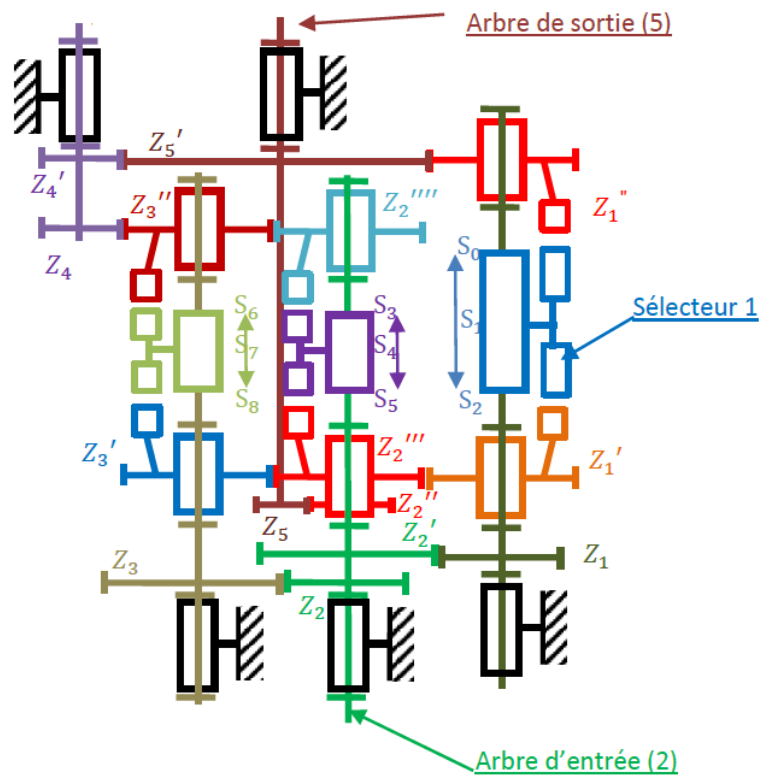
On donne le schéma cinématique de la boîte de vitesse page suivante. Les sélecteurs à 3 positions 1, 2 et 3 sont commandés par 1 levier de vitesse. Leur position médiane est dite « débrayée ». Les 2 positions extrêmes permettent de rendre temporairement solidaire de l'arbre l'une des 2 roues situées de part et d'autre du sélecteur.

On a :

- $Z_1' = Z_1'' = Z_2''' = Z_2'''' = Z_3' = Z_3'' = Z_4 = Z_4' = Z_5 = 16$  dents,
- $Z_5' = 32$  dents,
- $Z_1 = Z_2 = 12$  dents,
- $Z_2' = Z_3 = 20$  dents,
- Toutes les autres roues ont 16 dents.

### Objectif

*On souhaite déterminer les rapports des différentes vitesses disponibles sur cette boîte.*



## Travail demandé

**Q1.** Déterminer les 6 rapports de transmission en fonction des positions des 3 manchons de sélection.

**Q2.** En déduire la marche arrière, la première, deuxième, troisième quatrième et cinquième vitesse.

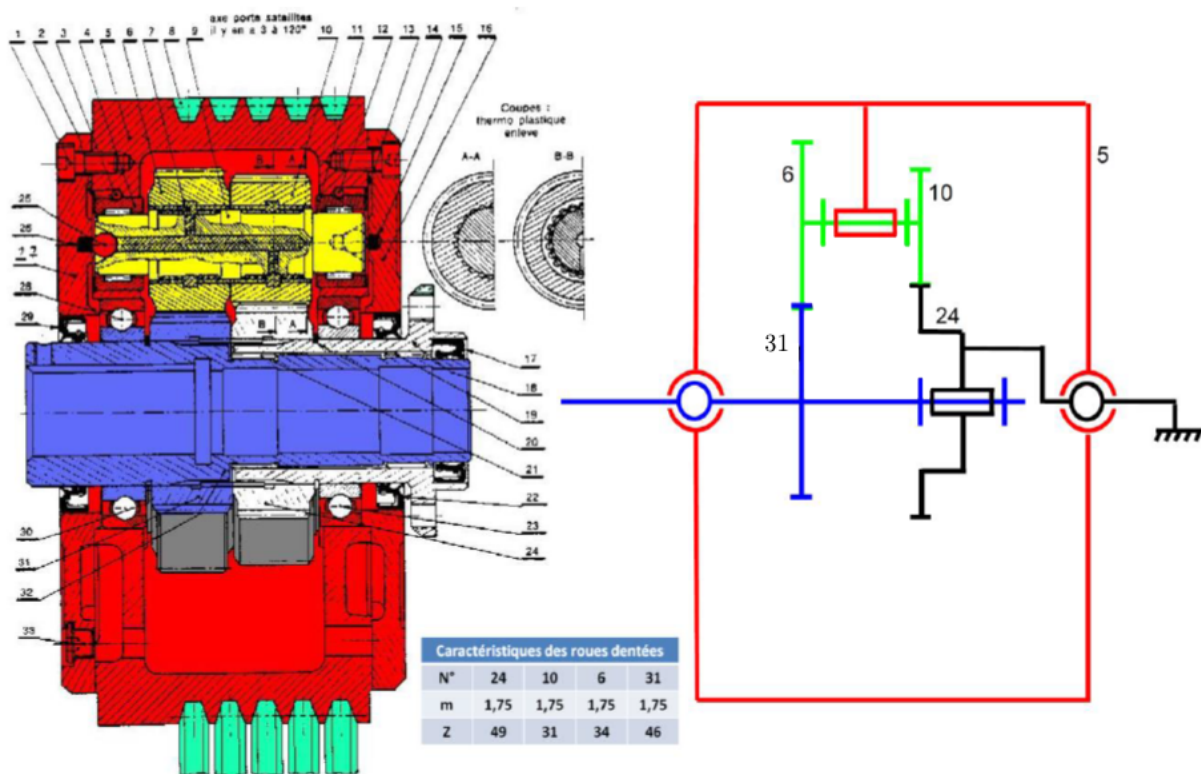
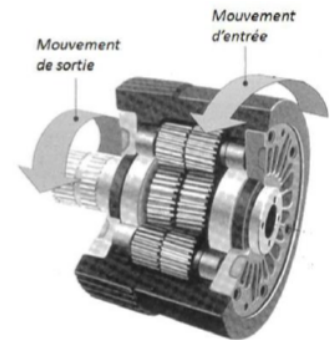
Vous pourrez consigner vos résultats dans un tableau comme suit :

Sél.1	Sél.2	Sél.3	Rapport de transmission	Vitesse
$S_1$	$S_4$	$S_7$		
$S_0$	$S_4$	$S_7$		
$S_2$	$S_4$	$S_7$		
$S_1$	$S_3$	$S_7$		
$S_1$	$S_5$	$S_7$		
$S_1$	$S_4$	$S_6$		
$S_1$	$S_4$	$S_8$		

# Sujet Kholle 3 – Poulie REDEX

## Présentation

La société Française Redex fabrique un réducteur épicycloïdal intégré à une poulie de courroies trapézoïdales. Le système est représenté sous la forme du schéma cinématique ci-dessous. Le mouvement d'entrée est reçu par le boîtier tournant 5, entraîné par cinq courroies trapézoïdales 8, et guidé en rotation par rapport au bâti 18 à l'aide de deux roulements à billes 23 et 28.



Les flasques 16 permettent le montage des organes intérieurs. Ils sont munis de joints d'étanchéité 22 et 29.

Les trois axes 9, guidés en rotation par rapport au boîtier tournant 5 à l'aide de deux roulements à aiguilles 4 et 11, portent les trois satellites doubles 6-10. Les liaisons encastrement entre les axes 9 et les satellites 6 et 10 sont assurées (élastiquement) par de la matière plastique injectée entre les axes et les pignons préalablement dentelés (voir coupe A-A et B-B).

Les satellites 10 engrènent avec le planétaire 24 (qui est en liaison encastrement avec le bâti 18 à l'aide d'un assemblage cannelé).

Les satellites 6 engrènent avec le planétaire 31 (qui est en liaison encastrement avec l'arbre de sortie 32 à l'aide d'un assemblage cannelé). Cet arbre de sortie 32 est guidé en rotation par rapport au bâti 18 à l'aide de deux roulements à aiguilles 19 et 21.

---

**Objectif**

---

*L'objectif de cet exercice est d'étudier ce système afin de déterminer si on peut oui ou non l'assimiler à un train épicycloïdal.*

---

## Travail demandé

**Q1.** Compléter le tableau ci-dessous en indiquant le numéro du solide.

	Solides
Satellite	
Porte-satellite	
PlanétaireA	
PlanétaireB	

**Q2.** Déterminer l'expression du rapport de transmission  $r$  en fonction des nombres de dents des roues dentées en utilisant la formule de Willis.

**Q3.** Faire l'application numérique.

**Q4.** Retrouver ce résultat en inversant, par rapport au choix fait précédemment (planétaireA et planétaireB), l'ordre des planétaires dans la relation de Willis.

**Q5.** À l'aide des écritures du roulement sans glissement entre les solides adéquates, démontrez que ce réducteur peut être vu comme un train épicycloïdal.