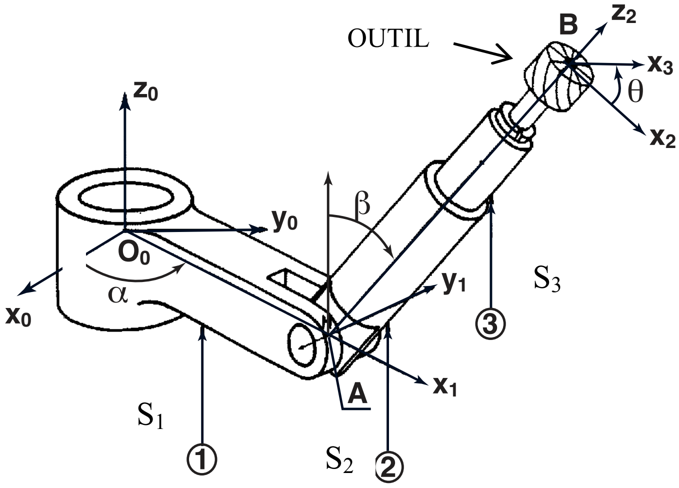
AFFUTEUSE

La figure suivante représente le dispositif porte-outil d'une machine d'affûtage formée de quatre solides : S_0, S_1, S_2 et S_3.



On considère les repères suivants :

- $R_0\left(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ lié au bâti S_0.
- $R_1(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ lié au support tournant S_1.
- $R_2(A,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$ lié au bras pivotant S_2.
- $R_3(B,\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3})$ lié à S_3 {porte outil et outil de l'affûteuse}. $R_3(B,\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3})$

Le mouvement de S_1 par rapport à S_0 est une rotation d'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$.

Le mouvement de S_2 par rapport à S_1 est une rotation d'axe $\left(A,\overrightarrow{y_1}\right)$.

Le mouvement de S_3 par rapport à S_2 est une rotation et une translation d'axe $\left(B,\overrightarrow{z_2}\right)$.

Les positions relatives des différents repères sont : $\alpha=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)$, $\beta=\left(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_2}\right)=\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\right)$ et $\theta=\left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}\right)=\left(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_3}\right)$. On définit $\overrightarrow{OA}=a\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{AB}=\lambda(t)\overrightarrow{z_2}$. Le rayon de la fraise (c'est le nom de l'outil) est r.

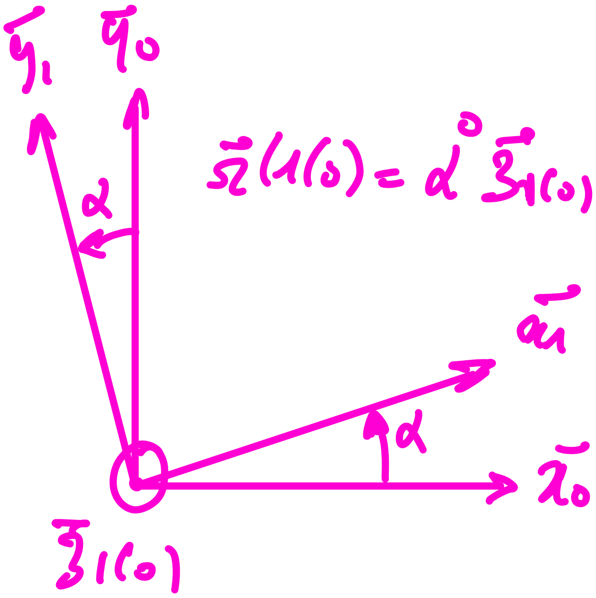
1 – Représenter les figures géométrales des vues relatives de R_1/R_0, R_2/R_1 et R_3/R_2.
2 – En déduire les vecteurs rotations de R_1/R_0, R_2/R_1 et R_3/R_2.
3 – Calculer, par dérivée vectorielle, le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(B,3/2)}$.
4 – Rédiger le graphe des liaisons.
5 – Exprimer les torseurs cinématiques V(1/0), V(2/1) et V(3/2).
6 – Calculer le torseur V(2/0) au point A. Exprimer le résultat dans R_1.
En déduire le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(B,2/0)}$. Exprimer le résultat dans R_2.
7 – Calculer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(B,3/0)}$. Exprimer le résultat dans R_2.
8 – Calculer la vitesse d'un point M de l'outil $\overrightarrow{V(M,3/0)}$, le point M étant défini par $\overrightarrow{BM}=r\overrightarrow{x_3}$.
Exprimer le résultat dans R_2.
9 – A.N. : a=800 mm, λ=300 mm, α=45°, $\mathring{\alpha}$=0,1 tr/s , β=30°=Constante, $\mathring{\lambda}$=30 mm/s=Constante,

θ=0, $\mathring{\theta}$=40 tr/s , r=50 mm

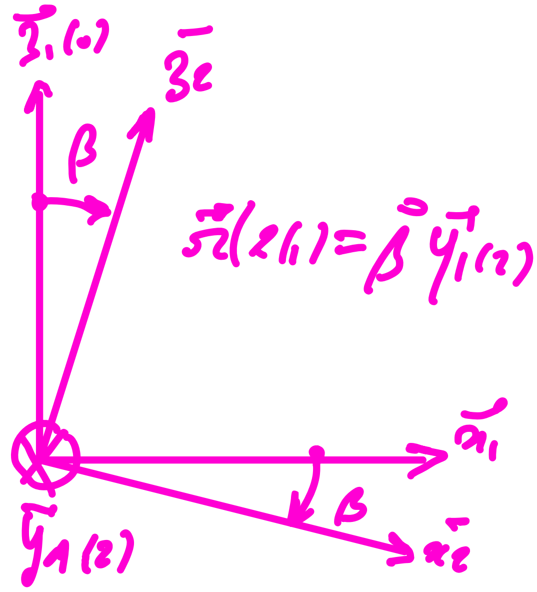
Calculer $\left\|\overrightarrow{V(B,2/0)}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{V(B,3/0)}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{A(B,2/0)}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{A(B,3/0)}\right\|$, et $\left\|\overrightarrow{V(M,3/0)}\right\|$

1.

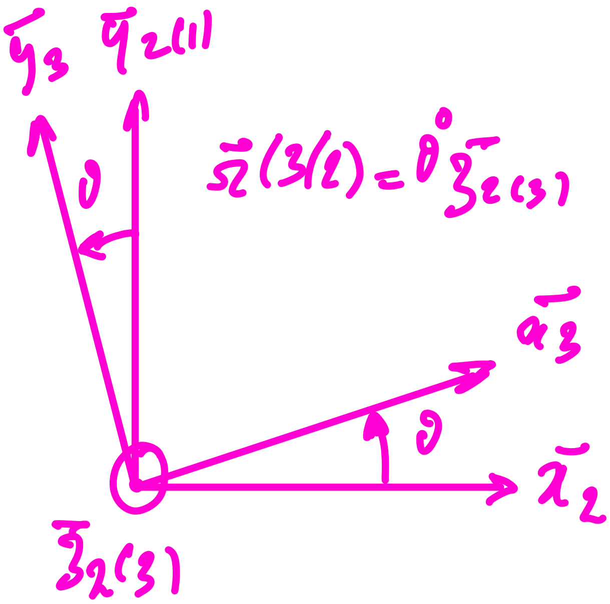
2.



$$\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}\,\vec{z}_{1(0)}$$



$$\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\beta}\,\vec{y}_{1(2)}$$

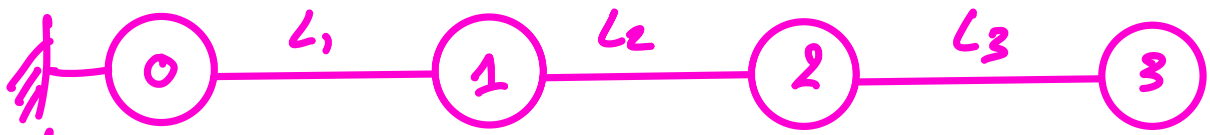


$$\vec{\Omega}(3/2) = \dot{\theta}\,\vec{z}_{2(3)}$$

---

3. $\vec{V}(B,3/2) = \left(\dfrac{d\vec{AB}}{dt}\right)_{(2)} = \dot{\lambda}(t)\,\vec{z}_2$

---

4. 

Chaîne Ouverte

L_1 : Pivot d'axe $(O_0, \vec{z}_{0(1)})$

L_2 : Pivot d'axe $(A, \vec{y}_{1(2)})$

L_3 : Pivot Glissant d'axe $(A, \vec{z}_2)$

---

5. $\mathcal{V}(1/0) = \left\{ \dot{\alpha}\, \vec{z}_{1(0)} , \vec{0} \right\}_{O_0, \forall P \in (O_0, \vec{z}_{1(0)})}$

$\mathcal{V}(2/1) = \left\{ \dot{\beta}\, \vec{y}_{1(2)} , \vec{0} \right\}_{A, \forall P \in (A, \vec{y}_{1(2)})}$

$\mathcal{V}(3/2) = \left\{ \dot{\theta}\, \vec{z}_2 , \dot{d}\, \vec{z}_2 \right\}_{A, B, \forall P \in (A, \vec{z}_2)}$

---

6. $\mathcal{V}(2/0) = \mathcal{V}(2/1) + \mathcal{V}(1/0)$

$\mathcal{V}(2/0) = \left\{ \dot{\beta}\, \vec{y}_1 + \dot{\alpha}\, \vec{z}_1 , \vec{V}(A, 2/0) \right\}_A$

$\vec{V}(A, 2/0) = \overbrace{\cancel{\vec{V}(A, 2/1)}}^{\vec{0}} + \vec{V}(A, 1/0)$

$= \underbrace{\cancel{\vec{V}(O_0, 1/0)}}_{\vec{0}} + \vec{AO_0} \wedge \vec{\Omega}(1/0)$

$$\vec{V}(A, 2/0) = -a\vec{x}_1 \wedge \dot{\alpha}\vec{z}_1 = a\dot{\alpha}\vec{y}_1$$

$$\boxed{\mathcal{V}(2/0) = \left\{ \begin{matrix} \dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\vec{z}_1 \,, & a\dot{\alpha}\vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_A}$$

$$\vec{V}(B, 2/0) = \vec{V}(A, 2/0) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(2/0)$$

$$\vec{V}(B, 2/0) = a\dot{\alpha}\vec{y}_1 + (-d\vec{z}_2) \wedge (\dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\vec{z}_1)$$

$$= a\dot{\alpha}\vec{y}_1 - d\dot{\beta}(\vec{z}_2 \wedge \underset{(1)}{\vec{y}_1}) - d\dot{\alpha}(\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_1)$$

$$= a\dot{\alpha}\underset{(2)}{\vec{y}_1} + d\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + d\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2$$

$$\boxed{\vec{V}(B, 2/0) = d\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (a + d\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_2}$$

---

7. $\vec{V}(B, 3/0) = \vec{V}(B, 3/2) + \vec{V}(B, 2/0)$

$$\vec{V}(B, 3/2) = \dot{d}\,\vec{z}_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(B, 3/0) = d\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + (a + d\sin\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_2 + \dot{d}\,\vec{z}_2}$$

---

8. $\vec{V}(M, 3/0) = \vec{V}(B, 3/0) + \vec{MB} \wedge \underbrace{\vec{\Omega}(3/0)}_{\vec{\Omega}(3/2) + \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0)}$

$$\vec{MB} \wedge \vec{\Omega}(3/0) = -r\vec{x_3} \wedge \left[\dot{\alpha}\,\vec{z_1} + \dot{\beta}\,\vec{y_{1(2)}} + \dot{\theta}\,\vec{z_2} \right]$$

$$= -r\dot{\alpha}\left(\vec{x_3} \wedge \vec{z_1}\right) - r\dot{\beta}\left(\vec{x_3} \wedge \vec{y_2}\right) - r\dot{\theta}\left(\vec{x_3} \wedge \vec{z_2}\right)$$

$$\cdot\ \vec{x_3} \wedge \vec{z_1} = \vec{x_3} \wedge \left[\cos\beta\,\vec{z_2} - \sin\beta\,\vec{x_2}\right] = \cos\beta\left(\vec{x_3} \wedge \underset{(3)}{\vec{z_2}}\right) - \sin\beta\left(\vec{x_3} \wedge \vec{x_2}\right)$$

$$= -\cos\beta\,\vec{y_3} + \sin\beta\sin\theta\,\vec{z_{2(3)}}$$

$$= \sin\beta\sin\theta\,\vec{z_2} - \cos\beta\left[\cos\theta\,\vec{y_2} - \sin\theta\,\vec{x_2}\right]$$

$$\cdot\ \vec{x_3} \wedge \vec{y_2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\vec{z_2} = \cos\theta\,\vec{z_2}$$

$$\cdot\ \vec{x_3} \wedge \vec{x_2} = -\sin\theta\,\vec{z_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{V}(M,3/0) = &\left[d\dot{\beta} - r\dot{\alpha}\cos\beta\sin\theta\right]\vec{x_2} \\ &+ \left[(a + d\sin\beta)\dot{\alpha} + r\dot{\alpha}\cos\beta\cos\theta\right]\vec{y_2} \\ &+ \left[\dot{d} - r\dot{\alpha}\sin\beta\sin\theta - r\dot{\beta}\cos\theta + r\dot{\theta}\sin\theta\right]\vec{z_2} \end{aligned}}$$

---

9. $a = 0{,}8\,m$; $d = 0{,}3\,m$; $\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}\,rad$

$\dot{\alpha} = 0{,}1\,tr/s = 0{,}2\pi\,rad/s$; $\ddot{\alpha} = 0\,rad/s^2$

$\beta = 30° = \frac{\pi}{6}$ rad ; $\dot{\beta} = 0$ rad/s ; $\ddot{\beta} = 0$ rad/s²

$\dot{d} = 30$ mm/s ; $\ddot{d} = 0$ m.s^{-2}

$\theta = 0$ rad ; $\dot{\theta} = 40$ tr/s $= 80\pi$ rad/s ; $\ddot{\theta} = 0$ rad/s²

$r = 50$ mm $= 0{,}05$ m

- $$\|\vec{V}(B,2/0)\| = \sqrt{\cancel{d^2 \underbrace{\dot{\beta}^2}_{0}} + (a + d\sin\beta)^2 \dot{\alpha}^2}$$

$$\|\vec{V}(B,2/0)\| = (a + d\sin\beta)\dot{\alpha} = \left[0{,}8 + 0{,}3 \times \frac{1}{2}\right] . \, 0{,}2\pi$$

$$= 0{,}2 \times 0{,}95\pi = 0{,}597 \text{ m/s}$$

- $$\|\vec{V}(B,3/0)\| = \sqrt{(a + d\sin\beta)^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{d}^2}$$

$$= \sqrt{0{,}597^2 + 0{,}03^2} = 0{,}597 \text{ m/s}$$

-

• $\vec{V}(M,3/0) = [d\cancel{\dot\beta}^{\,0} - r\dot\alpha\cancel{\cos\beta\sin\theta}^{\,0}]\,\vec{x}_2 \quad (\theta = 0)$

$+ [(a + d\sin\beta)\dot\alpha + r\dot\alpha\cos\beta\cancel{\cos\theta}]\,\vec{y}_2$

$+ [\cancel{\dot d}_{\,0} - r\dot\alpha\cancel{\sin\beta\sin\theta} - r\cancel{\dot\beta\cos\theta} + r\cancel{\dot\theta\sin\theta}]\,\vec{z}_2 \quad (\theta = 0)$

$\vec{V}(M,3/0) = (a + d\sin\beta + r\cos\beta)\,\dot\alpha\,\vec{y}_2$

$\|\vec{V}(M,3/0)\| = (a + d\sin\beta + r\cos\beta)\,|\dot\alpha|$

$= [0{,}8 + (0{,}3 \times \frac{1}{2}) + (0{,}05 \times \frac{\sqrt{3}}{2})] \times 0{,}2\pi$

$\boxed{\|\vec{V}(M,3/0)\| = 1{,}56 \text{ m/s}}$

• $\vec{A}(B,2/0) = \left(\dfrac{d\vec{V}(B,2/0)}{dt}\right)_{(0)}$

$\vec{V}(B,2/0) = d\dot\beta\,\vec{x}_2 + (a + d\sin\beta)\,\dot\alpha\,\vec{y}_2$

$\vec{A}(B,2/0) = d\dot\beta\left(\dfrac{d\vec{x}_2}{dt}\right)_{(0)} + (a + d\sin\beta)\,\dot\alpha\left(\dfrac{d\vec{y}_2}{dt}\right)_{(0)}$

car $\dot d = 0$, $\ddot\beta = 0$, $\dot\beta = 0$, $\ddot\alpha = 0$

$\left(\dfrac{d\vec{x}_2}{dt}\right)_{(0)} = \vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{x}_2 = (\dot\alpha\,\vec{z}_1 + \cancel{\dot\beta\,\vec{y}_2}_{\,0}) \wedge \vec{x}_2$

$$\left(\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right)_{(0)} = \dot{\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\vec{y_2} = \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{y_2}$$

$$\left(\frac{d\vec{y_2}}{dt}\right)_{(0)} = \vec{\Omega}(2/0)\wedge\vec{y_2} = \left(\dot{\alpha}\,\vec{z_1} + \cancel{\dot{\beta}\,\vec{y_2}}\right)\wedge\vec{y_2}(1)$$

$$= -\dot{\alpha}\,\vec{x_1} = -\dot{\alpha}\left[\cos\beta\,\vec{x_2} + \sin\beta\,\vec{z_2}\right]$$

$$\vec{A}(B,2/0) = d\dot{\beta}\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{y_2} - (a+d\sin\beta)\dot{\alpha}^2\cos\beta\,\vec{x_2} - (a+d\sin\beta)\dot{\alpha}^2\sin\beta\,\vec{z_2}$$